Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk
Mario Kaip

18. Dezember 2009

Analysis I
9. Übungsblatt

Aufgabe 9.1 Seien $f, g \in C([0,1], \mathbb{R})$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Gilt $g(0) \leq f(0)$ und $f(1) \leq g(1)$, so existiert ein $\xi \in [0,1]$ mit $f(\xi) = g(\xi)$.

(ii) Gilt $f([0,1]) \subset [0,1]$, so gibt es ein $\xi \in [0,1]$ mit $f(\xi) = \xi$.

Aufgabe 9.2 Sei $P([0,1], \mathbb{R})$ die Menge aller Polynome in $C([0,1], \mathbb{R})$. Der Raum $C([0,1], \mathbb{R})$ sei wie üblich mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ versehen. Zeigen oder widerlegen Sie:

(i) $P([0,1], \mathbb{R})$ ist eine abgeschlossene Teilmenge von $C([0,1], \mathbb{R})$.

(ii) $P([0,1], \mathbb{R})$ ist eine offene Teilmenge von $C([0,1], \mathbb{R})$.

Aufgabe 9.3 Gegeben seien die Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sinh(x)$ und $g : [0, \infty) \to [1, \infty)$, $x \mapsto \cosh(x)$. Argumentieren sie zunächst abstrakt, warum diese Funktionen invertierbar sind und leiten Sie im Folgenden die Umkehrfunktionen f^{-1} und g^{-1} her.

Aufgabe 9.4 (Weihnachtsedition) Gegeben sei eine endliche Menge von Buntstiften B mit $\#B \geq 2$. Wenden Sie diese auf die nachstehende Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ an. Die kreativsten Lösungsvorschläge werden nach Weihnachten prämiert. Die Bearbeitung ist freiwillig, liefert bei „Korrektheit “aber 4 Zusatzpunkte. Viel Spaß beim Ausmalen!!!

Wir wünschen allen Studierenden ein schönes Weihnachtsfest und einen erfolgreichen Start ins nächste Jahr!