Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk
Mario Kaip

8. Januar 2010

Analysis I
10. Übungsblatt

Aufgabe 10.1 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschränkt und differenzierbar. Zeigen Sie nun, dass eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ existiert mit $\lim_{n\to\infty} f'(x_n) = 0$.

Aufgabe 10.2

(i) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Folge mit $x_n \to x \neq 0$ für $n \to \infty$. Zeigen Sie, dass dann schon

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^n = e^x$$

gilt.

(ii) Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und eine differenzierbare Funktion $f : (x_0 - 1, x_0 + 1) \to \mathbb{R}$ gegeben mit $f(x_0) \neq 0$. Damit definiere man die Folge

$$y_1 := 0, \quad y_n := \left(\frac{f(x_0 + \frac{1}{n})}{f(x_0)}\right)^n \quad \text{für } n \geq 2.$$

Untersuchen Sie diese Folge auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Hinweis: Verwenden Sie den Logarithmus ln zur Grenzwertbestimmung.

Aufgabe 10.3 Sei $I \subset \mathbb{R}$ eine offenes Intervall und die Funktionen $f, g : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Außerdem gelte

$$f'(x)g(x) \neq f(x)g'(x)$$

für alle $x \in I$. Zeigen Sie nun: Hat f zwei verschiedene Nullstellen, so besitzt g stets eine Nullstelle dazwischen.

Aufgabe 10.4 Untersuchen Sie, an welchen Stellen $x_0 \in \mathbb{R}$ die folgenden Funktionen differenzierbar sind. Bestimmen sie gegebenenfalls $f'(x_0)$.

(i) $f_1 \colon (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^x$,

(ii) $f_2 \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \cos(\sin(x^2))$,

(iii) $f_3 \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x|x|$,

(iv) $f_4 \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ x^2 & \text{falls} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Abgabetermin: Freitag 15. Januar 2010, vor 10:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.