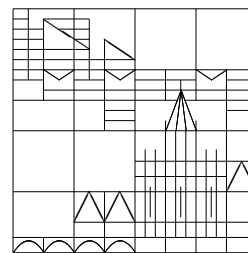


8. Januar 2010



## Analysis I 10. Übungsblatt

**Aufgabe 10.1** Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt und differenzierbar. Zeigen Sie nun, dass eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  existiert mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} f'(x_n) = 0$ .

### Aufgabe 10.2

(i) Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  eine Folge mit  $x_n \rightarrow x \neq 0$  für  $n \rightarrow \infty$ . Zeigen Sie, dass dann schon

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^n = e^x$$

gilt.

(ii) Sei  $x_0 \in \mathbb{R}$  und eine differenzierbare Funktion  $f: (x_0 - 1, x_0 + 1) \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben mit  $f(x_0) \neq 0$ . Damit definiere man die Folge

$$y_1 := 0, \quad y_n := \left(\frac{f(x_0 + \frac{1}{n})}{f(x_0)}\right)^n \quad \text{für } n \geq 2.$$

Untersuchen Sie diese Folge auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

HINWEIS: Verwenden Sie den Logarithmus  $\ln$  zur Grenzwertbestimmung.

**Aufgabe 10.3** Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall und die Funktionen  $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar. Außerdem gelte

$$f'(x)g(x) \neq f(x)g'(x)$$

für alle  $x \in I$ . Zeigen Sie nun: Hat  $f$  zwei verschiedene Nullstellen, so besitzt  $g$  stets eine Nullstelle dazwischen.

**Aufgabe 10.4** Untersuchen Sie, an welchen Stellen  $x_0 \in \mathbb{R}$  die folgenden Funktionen differenzierbar sind. Bestimmen Sie gegebenenfalls  $f'(x_0)$ .

(i)  $f_1: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^x$ ,

(ii)  $f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \cos(\sin(x^2))$ ,

(iii)  $f_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x|x|$ ,

(iv)  $f_4: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \\ x^2 & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$