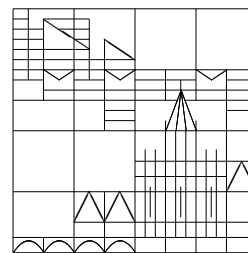


22. Januar 2010



## Analysis I 12. Übungsblatt

### Aufgabe 12.1

- (i) Ist  $x \in \mathbb{R}$ , so gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$

$$\int_0^x \exp(x-t)t^n dt = n! \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

- (ii) Untersuchen Sie, ob der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{\pi}^x x \exp(t^2 - x^2) dt$$

existiert und geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an.

**Aufgabe 12.2** Sei  $f \in R((a, b); \mathbb{R})$  eine gegebene Funktion. Zeigen Sie nun:

- (i) Es gilt  $|f| \in R((a, b); \mathbb{R})$ .
- (ii) Ist  $c \in (a, b)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  und definiert man  $\tilde{f}(x) := f(x)$  für  $x \in (a, b) \setminus \{c\}$  und  $\tilde{f}(c) := \alpha$ , so gilt auch  $\tilde{f} \in R((a, b); \mathbb{R})$ .
- (iii) Ist  $\tilde{f}$  die in (ii) konstruierte Funktion, so gilt

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \tilde{f}(x) dx.$$

- (iv) Zeigen Sie, dass  $\chi_{(0,1) \setminus \mathbb{Q}}$  keine Regelfunktion auf dem Intervall  $(0, 1)$  sein kann. Ist  $\chi_{(0,1) \cap \mathbb{Q}}$  eine Regelfunktion auf  $(0, 1)$ ?

**Aufgabe 12.3** Es sei  $(a, b) \subset \mathbb{R}$ . Zeigen Sie:

- (i) Durch  $\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)| dx$  ist eine Norm auf  $C([a, b]; \mathbb{R})$  gegeben. Ist  $\|\cdot\|_1$  auch eine Norm auf  $R((a, b); \mathbb{R})$ ?
- (ii) Der normierte Raum  $(C([a, b]; \mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$  ist nicht vollständig.

**Aufgabe 12.4** Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $f(x) := x^2 \sin(1/x)$  für  $x \neq 0$  und  $f(0) := 0$ . Zeigen Sie, dass  $f$  differenzierbar ist und  $f' \notin C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  gilt.