Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk
Mario Kaip

22. Januar 2010

Analysis I
12. Übungsblatt

Aufgabe 12.1

(i) Ist $x \in \mathbb{R}$, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\int_0^x \exp(x-t)t^n dt = n! \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

(ii) Untersuchen Sie, ob der Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} \int_\pi^x x \exp(t^2 - x^2) dt$$

existiert und geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an.

Aufgabe 12.2 Sei $f \in R\big((a,b);\mathbb{R}\big)$ eine gegebene Funktion. Zeigen Sie nun:

(i) Es gilt $|f| \in R\big((a,b);\mathbb{R}\big)$.

(ii) Ist $c \in (a,b)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ und definiert man $\tilde{f}(x) := f(x)$ für $x \in (a,b) \setminus \{c\}$ und $\tilde{f}(c) := \alpha$, so gilt auch $\tilde{f} \in R\big((a,b);\mathbb{R}\big)$.

(iii) Ist $\tilde{f}$ die in (ii) konstruierte Funktion, so gilt

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \tilde{f}(x)dx.$$

(iv) Zeigen Sie, dass $\chi_{(0,1)\setminus\mathbb{Q}}$ keine Regelfunktion auf dem Intervall $(0,1)$ sein kann. Ist $\chi_{(0,1)\cap\mathbb{Q}}$ eine Regelfunktion auf $(0,1)$?

Aufgabe 12.3 Es sei $(a,b) \subset \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(i) Durch $\|f\|_1 := \displaystyle\int_a^b \big|f(x)\big|\, dx$ ist eine Norm auf $C\big([a,b];\mathbb{R}\big)$ gegeben. Ist $\|\cdot\|_1$ auch eine Norm auf $R\big((a,b);\mathbb{R}\big)$?

(ii) Der normierte Raum $\Big(C\big([a,b];\mathbb{R}\big), \|\cdot\|_1\Big)$ ist nicht vollständig.

Aufgabe 12.4 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := x^2 \sin(1/x)$ für $x \neq 0$ und $f(0) := 0$. Zeigen Sie, dass f differenzierbar ist und $f' \notin C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ gilt.

Abgabetermin: Freitag 29. Januar 2010, vor 10:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.