Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk
Mario Kaip

29. Januar 2010

Analysis I
13. Übungsblatt

Aufgabe 13.1 Gegeben sei die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und definiere

$$\rho := \begin{cases} \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} & \text{falls } \left(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergent ist,} \\ \infty & \text{falls } \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \to \infty. \end{cases}$$

Zeigen Sie nun, dass ρ bereits der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ist.

Aufgabe 13.2 Berechnen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{100^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)} z^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2+i^n} z^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{2^n+1} z^{n^2}.$$

Aufgabe 13.3 Es sei $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n^2 x)}{2^n}.$$

Zeigen Sie:

(i) f ist wohldefiniert (d.h. die Reihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$) und überall unendlich oft differenzierbar.

(ii) Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $f^{(2k-1)}(0) = 0$ und $\left|f^{(2k)}(0)\right| > \frac{(2k)^{4k}}{2^{2k}}$.

(iii) Für $x \neq 0$ divergiert $\left(\frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$.

(iv) Die Taylor-Reihe von f an der Stelle 0 besitzt den Konvergenzradius 0.

Aufgabe 13.4 Gegeben seien die folgenden Funktionen:

$$f(x) := e^x \cdot \sin(x), \qquad g(x) := (1-x)^{-2}, \quad x \in (-1,1).$$

Bestimmen Sie jeweils die Taylor-Reihe mit Entwicklungspunkt 0. Werden f und g durch ihre Taylor-Reihen in $(-1,1)$ dargestellt?

Abgabetermin: Freitag 5. Februar 2010, vor 10:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.