Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk
Dipl.-Math. Mario Kaip

23. April 2009

Funktionalanalysis
1. Übungsblatt

Aufgabe 1.1 Für beliebige metrische Räume (X, d_X) und (Y, d_Y) zeige man:

(i) (X, d_X) ist zu einem beschränkten metrischen Raum (X, d') homöomorph (**vgl. dazu 1.15 Satz a)**).
Hinweis: Betrachten Sie: $d'(x,y) := \frac{d_X(x,y)}{1+d_X(x,y)}$.

(ii) Für jede Funktion $f : X \to Y$ ist die Definition von Stetigkeit gemäß **Definition 1.1 b)** äquivalent zum ε-δ-Kriterium. Allgemein lautet das ε-δ-Kriterium auf metrischen Räumen:

$$\forall x_0 \in X \, \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in X : (d_X(x_0, x) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x_0), f(x)) < \varepsilon)$$

Aufgabe 1.2 Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $K_j \subset X$ kompakte Mengen ($j \in \mathbb{N}$).

(i) Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ auch $K := \bigcup_{j=1}^n K_j$ kompakt ist.

(ii) Zeigen Sie: Ist $(X, \mathcal{T})$ sogar metrisierbar, so gilt $\bigcap_{j=1}^\infty K_j \neq \emptyset$, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ bereits $\bigcap_{j=1}^n K_j \neq \emptyset$ gilt.

Aufgabe 1.3 Sei $X_i := \mathbb{R}$ für $i \in \{1, 2\}$ und $X := X_1 \times X_2$, wobei X_i mit dem Betrag als topologischer Raum aufzufassen ist. Zudem sei $\mathcal{T}_P$ die dadurch induzierte Produkttopologie auf X gemäß **1.1 Definition e)** und $\mathcal{T}_e$ die durch die euklidische Norm induzierte Topologie auf X. Gilt nun $\mathcal{T}_P = \mathcal{T}_e$? Begründen Sie ihre Antwort!

Aufgabe 1.4 Sei $(X_i, \mathcal{T}_i)$ $(i \in I)$ eine Familie von topologischen Räumen und $X := \prod_{i \in I} X_i$ der zugehörige Produktraum. Sind dann die zugehörigen Projektionen

$$\mathrm{pr}_j : X \to X_j, (x_i)_{i \in I} \mapsto x_j, \quad (j \in I)$$

abgeschlossene Abbildungen (d.h. für alle abgeschlossenen Mengen $A \subset X$ ist auch $\mathrm{pr}_j(A) \subset X_j$ abgeschlossen)? Begründen Sie ihre Antwort!

Abgabetermin: Donnerstag 30. April 2009, vor 10:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.