Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk
Dipl.-Math. Mario Kaip

30. April 2009

# Funktionalanalysis
## 2. Übungsblatt

**Aufgabe 2.1** Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume und $N \subset X$ ein abgeschlossener Unterraum. Weiterhin sei $\pi : X \to X/N, x \mapsto [x]$, wobei $X/N$ der Quotientenraum (**vgl. 2.8 Definition und Satz**) sei. Dazu sei eine lineare Abbildung $T : X \to Y$ gegeben mit $N \subset \ker T$. Zeigen Sie nun:

(i) Es existiert genau eine Funktion $f : X/N \to Y$ mit $f \circ \pi = T$.

(ii) $f$ aus *(i)* ist linear und genau dann stetig, falls $T$ stetig ist.

**Aufgabe 2.2** Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $Y \subset X$.

(i) Zeige, dass $Y$ mit
$$\mathcal{T}_{\text{Sp}} := \{U \cap Y : U \in \mathcal{T}\}$$
zu einem topologischen Raum wird. $\mathcal{T}_{\text{Sp}}$ wird dann die Spurtopologie von $X$ auf $Y$ genannt. Finde weiterhin eine Familie $F$ von Funktionen derart, dass $\mathcal{T}_{\text{Sp}}$ gerade die $F$-schwache Topologie $\mathcal{T}(F)$ auf $Y$ ist.

(ii) Zeigen Sie, dass $K \subset Y$ in $Y$ (bzgl. $\mathcal{T}_{\text{Sp}}$) genau dann kompakt ist, falls $K$ in $X$ (bzgl. $\mathcal{T}$) kompakt ist.

**Aufgabe 2.3** Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume und $T : X \to Y$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen (**vgl. 2.5 Satz**):

(i) $T$ ist beschränkt (d.h. es existiert ein $C > 0$ mit $\|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X$ für alle $x \in X$).

(ii) $T$ ist stetig.

(iii) $T$ ist stetig in $0 \in X$.

**Aufgabe 2.4**

(i) Sei $(X, \mathcal{T})$ ein kompakter topologischer Raum und $K \subset X$ abgeschlossen. Zeigen Sie, dass $K$ schon kompakt ist.

(ii) Sei $(X, \mathcal{T}_X)$ ein kompakter topologische Raum und $(Y, d)$ ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\varphi : X \to Y$ bereits ein Homöomorphismus ist, falls sie bijektiv und stetig ist.

Abgabetermin: Donnerstag 7. Mai 2009, vor 10:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.