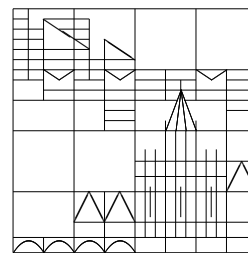


30. April 2009



## Funktionalanalysis 2. Übungsblatt

**Aufgabe 2.1** Seien  $(X, \|\cdot\|_X)$  und  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  normierte Räume und  $N \subset X$  ein abgeschlossener Unterraum. Weiterhin sei  $\pi : X \rightarrow X/N, x \mapsto [x]$ , wobei  $X/N$  der Quotientenraum (**vgl. 2.8 Definition und Satz**) sei. Dazu sei eine lineare Abbildung  $T : X \rightarrow Y$  gegeben mit  $N \subset \ker T$ . Zeigen Sie nun:

- (i) Es existiert genau eine Funktion  $f : X/N \rightarrow Y$  mit  $f \circ \pi = T$ .
- (ii)  $f$  aus (i) ist linear und genau dann stetig, falls  $T$  stetig ist.

**Aufgabe 2.2** Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum und  $Y \subset X$ .

- (i) Zeige, dass  $Y$  mit

$$\mathcal{T}_{\text{Sp}} := \{U \cap Y : U \in \mathcal{T}\}$$

zu einem topologischen Raum wird.  $\mathcal{T}_{\text{Sp}}$  wird dann die Spurtopologie von  $X$  auf  $Y$  genannt. Finde weiterhin eine Familie  $F$  von Funktionen derart, dass  $\mathcal{T}_{\text{Sp}}$  gerade die  $F$ -schwache Topologie  $\mathcal{T}(F)$  auf  $Y$  ist.

- (ii) Zeigen Sie, dass  $K \subset Y$  in  $Y$  (bzgl.  $\mathcal{T}_{\text{Sp}}$ ) genau dann kompakt ist, falls  $K$  in  $X$  (bzgl.  $\mathcal{T}$ ) kompakt ist.

**Aufgabe 2.3** Seien  $(X, \|\cdot\|_X)$  und  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  normierte Räume und  $T : X \rightarrow Y$  eine lineare Abbildung. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen (**vgl. 2.5 Satz**):

- (i)  $T$  ist beschränkt (d.h. es existiert ein  $C > 0$  mit  $\|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X$  für alle  $x \in X$ ).
- (ii)  $T$  ist stetig.
- (iii)  $T$  ist stetig in  $0 \in X$ .

**Aufgabe 2.4**

- (i) Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein kompakter topologischer Raum und  $K \subset X$  abgeschlossen. Zeigen Sie, dass  $K$  schon kompakt ist.
- (ii) Sei  $(X, \mathcal{T}_X)$  ein kompakter topologische Raum und  $(Y, d)$  ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass die Abbildung  $\varphi : X \rightarrow Y$  bereits ein Homöomorphismus ist, falls sie bijektiv und stetig ist.