Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk
Dipl.-Math. Mario Kaip

7. Mai 2009

Funktionalanalysis
3. Übungsblatt

Aufgabe 3.1 Seien die Räume $X := C([-1,1],\mathbb{R})$ und $Y := C([-1,1],\mathbb{C})$ jeweils mit der Supremumsnorm versehen. Dazu definiere man die Teilmengen

$$\begin{aligned} M_X &:= \{f \in X : f(t) > 0 \text{ für alle } t \in [-1,1]\} \subset X \\ M_Y &:= \{f \in Y : f(t) \in \mathbb{R}_{>0} \text{ für alle } t \in [-1,1]\} \subset Y. \end{aligned}$$

Erläutern Sie nun:

(i) Ist M_X eine offene Teilmenge von $(X, \|\cdot\|_\infty)$?

(ii) Ist M_Y eine offene Teilmenge von $(Y, \|\cdot\|_\infty)$?

Aufgabe 3.2 $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ sei ein gegebener Prähilbertraum. Zeigen Sie nun (**vgl. 2.20 Satz**):

(i) (*Satz des Pythagoras*) Für alle $x, y \in X$ mit $\langle x, y\rangle = 0$ gilt $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

(ii) Ist $(x_n)_{n=1}^N$ orthonormal, so gilt $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^N |\langle x, x_n\rangle|^2 + \left\| x - \sum_{n=1}^N \langle x, x_n\rangle\, x_n \right\|^2$.

(iii) (*Besselsche Ungleichung*) Ist $(x_n)_{n=1}^N$ orthonormal, so gilt $\|x\|^2 \geq \sum_{n=1}^N |\langle x, x_n\rangle|^2$.

(iv) (*Polarisationsformel*) Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ gilt $\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$ f.a. $x, y \in X$.

Aufgabe 3.3 Berechnen Sie jeweils die Operatornormen der folgenden Operatoren:

(i) $E : L^2(K) \to L^1(K), f \mapsto f$ mit kompakter Menge $K \subset \mathbb{R}^n$,

(ii) $S : \ell^1 \to \ell^2, x \mapsto x$,

(iii) $T : C([0,1]) \to \mathbb{R}, f \mapsto \int_0^1 f(x)dx - \sum_{i=1}^m \alpha_i f(x_i)$ mit $(x_i)_{i=1}^m \subset [0,1]$ paarweise verschieden und $(\alpha_i)_{i=1}^m \subset \mathbb{R}$. ($C([0,1])$ sei mit $\|\cdot\|_\infty$ versehen)

Hinweis: Vergessen Sie nicht die Wohldefiniertheit der Operatoren zu begründen.

Abgabetermin: Donnerstag 14. Mai 2009, vor 10:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.