Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk
Dipl.-Math. Mario Kaip

14. April 2009

Funktionalanalysis
4. Übungsblatt

Aufgabe 4.1 Sei $M \subset X$ ein abgeschlossener Untervektorraum des Hilbertraums $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Dann definiert man die *orthogonale Projektion* P durch

$$P : X \to M, x = m + m' \mapsto m,$$

wobei die Zerlegung $x = m + m'$ $(m \in M, m' \in M^\perp)$ gemäß **Satz 2.24** gegeben sei. Zeigen sie:

(i) $P \in L(X, M)$ und $\|P\|_{L(X,M)} = 1$ (wie üblich $\|x\|_M := \|x\|_X$, f.a. $x \in M$).

(ii) $P^2 = P$ und $\langle Px, y \rangle = \langle x, Py \rangle$ für alle $x, y \in X$.

(iii) Es gilt $\ker P = M^\perp$ und $\operatorname{Im} P = M$.

Aufgabe 4.2 Sei H ein Hilbertraum mit Orthonormalbasis $S := \{e_i : i \in I\}$ für eine beliebige Indexmenge I. Zudem sei $M := \{y_i : i \in I\}$ eine beliebige orthogonale und beschränkte Familie von Vektoren aus H. Zeigen Sie:

(i) Die Reihe $\sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle \, y_i$ konvergiert unbedingt.

(ii) Es existiert genau ein $T \in L(H)$ mit $Te_i = y_i$ für alle $i \in I$.

Hinweis: Zu (i): Versuchen Sie den Beweis von **2.33 Satz a)** zu modifizieren.
Zu (ii): Vergessen Sie nicht die Wohldefiniertheit von T zu begründen.

Aufgabe 4.3 Sei $F \in (\ell^1)'$ ein stetiges lineares Funktional auf ℓ^1. Man zeige:

(i) Es existiert genau eine Folge $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty$, so dass

$$F\left((\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \eta_n$$

für alle $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^1$ gilt. Insbesondere gilt dann auch $\|(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_\infty = \|F\|_{(\ell^1)'}$.

(ii) Für alle $\zeta := (\zeta_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty$ gilt schon $F_\zeta \in (\ell^1)'$, wobei $F_\zeta : \ell^1 \to \mathbb{C}, (\xi_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \zeta_n$.

Hinweis: Man zeige zunächst, dass $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}} = \lim_{N \to \infty} \sum_{k=1}^{N} \xi_k e_k$ in ℓ^1 gilt, wobei $e_k := (\delta_{kn})_{n \in \mathbb{N}}$.

Abgabetermin: Freitag 22. Mai 2009, vor 10:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.