Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk
Dipl.-Math. Mario Kaip

21. April 2009

Funktionalanalysis
5. Übungsblatt

Aufgabe 5.1 Sei $A : D(A) \subset X \to Y$ ein linearer Operator zwischen den Banachräumen X und Y. Zeigen sie:

(i) A ist genau dann abgeschlossen, wenn für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ mit $x_n \to x \in X$ und $Ax_n \to y \in Y$ schon $x \in D(A)$ und $Ax = y$ gilt.

(ii) A ist genau dann abschließbar, wenn für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ mit $x_n \to 0 \in X$ und $Ax_n \to y \in Y$ schon $y = 0$ gilt.

Aufgabe 5.2 Sei X ein $\mathbb{C}$-Banachraum und $S, T \in L(X)$. Zeigen Sie:

(i) Ist $\lambda - ST$ für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ invertierbar, so ist $R := \frac{1}{\lambda}(1 + T(\lambda - ST)^{-1}S)$ die Inverse von $\lambda - TS$.

(ii) Es gilt $\sigma(ST) \setminus \{0\} = \sigma(TS) \setminus \{0\}$.

Aufgabe 5.3 Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und $T_j : D(T_j) \subset X \to X$ $(j = 1, 2)$ zwei abgeschlossene lineare Operatoren mit $D(T_1) \subset D(T_2)$.

(i) Zeigen Sie, dass ein $C > 0$ derart existiert, dass
$$\|T_2x\|^2 \leq C\left(\|T_1x\|^2 + \|x\|^2\right)$$
für alle $x \in D(T_1)$ gilt.

(ii) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ und T_1 invertierbar. Zeigen Sie, dass dann auch $\lambda T_1 + T_2$ invertierbar ist, falls $|\lambda|$ groß genug ist. (Definitionsbereich von $\lambda T_1 + T_2$ gemäß **3.24 Def.**)

(iii) Sei $X := C([0, 1])$, $D(T_1) := \{u \in X : u'' \in X, u(0) = u(1) = 0\}$ und $T_1u := u''$ für $u \in D(T_1)$. Zudem sei $a \in C^1([0, 1])$, $D(T_2) := \{u \in X : (au)' \in X\}$ und $T_2u := (au)'$ für $u \in D(T_2)$.

Zeigen Sie: Es existiert eine Konstante $M > 0$ derart, dass das Problem
$$\lambda u'' + (au)' = f, \quad u(0) = u(1) = 0,$$
für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| \geq M$ und $f \in X$ eine eindeutige Lösung $u \in D(T_1)$ besitzt.

Hinweis: Ist $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(T_1)$ mit $u_n \to u \in X$ und $u''_n \to v \in X$, so zeigen Sie zunächst mit Hilfe der Taylorformel, dass $(u'_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(u'_{n_k}(0))_{k\in\mathbb{N}}$ besitzt. Beweisen Sie damit die gleichmäßige Konvergenz von $(u'_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und nutzen Sie Resultate aus A1 um $u'' = v$ zu zeigen.

Abgabetermin: Donnerstag 28. Mai 2009, vor 10:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.