Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk
Dipl.-Math. Mario Kaip

28. Mai 2009

Funktionalanalysis
6. Übungsblatt

Aufgabe 6.1 Für $t \in \mathbb{R}$ definiert man

$$\varphi(t) := \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-t^2}\right) & |t| < 1 \\ 0 & |t| \geq 1. \end{cases}$$

Zeigen Sie zunächst $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ und konstruieren Sie damit anschließend eine Funktion $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp} \psi = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$.

Aufgabe 6.2 Seien X,Y Banachräume und $D \subset X$ ein dichter Unterraum. Zeigen Sie:

(i) Ist $T : D \subset X \to Y$ ein linearer Operator und gibt es eine Konstante $C > 0$ mit $\|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X$ für alle $x \in D$, so existiert eine eindeutige stetige Fortsetzung $S \in L(X, Y)$ von T und es gilt $\|S\|_{L(X,Y)} \leq C$.

(ii) Sei $(T_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset L(X, Y)$ eine beschränkte Folge von Operatoren so, dass für alle $x \in D$ die Folge $(T_k x)_{k\in\mathbb{N}} \subset Y$ eine Cauchy-Folge ist. Dann gilt: Es existiert genau ein $T \in L(X, Y)$ mit $T_k \xrightarrow{s} T$ und es gilt $\|T\|_{L(X,Y)} \leq \liminf_{k\to\infty} \|T_k\|_{L(X,Y)}$.

Aufgabe 6.3 Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum und $T \in L(H)$. Zeigen Sie:

(i) Ist $\langle Tx, x\rangle = 0$ für alle $x \in H$, so gilt $T = 0$.

(ii) T ist genau dann normal, falls $\|Tx\| = \|T^*x\|$ für alle $x \in H$ gilt.

(iii) Gilt Aussage (i) auch für $\mathbb{R}$-Hilberträume?

Aufgabe 6.4 Gegeben sei der lineare Operator

$$\begin{aligned} A : L^2([0, 1]) &\to L^2([0, 1]), \\ f &\mapsto Af, \end{aligned}$$

wobei $[Af](s) := \int_0^1 st(1 - st)f(t)dt$ für $s \in [0, 1]$. Zeigen sie, dass A beschränkt und selbstadjungiert ist. Berechnen Sie außerdem $\rho(A)$, $\sigma(A)$, $\sigma_p(A)$, $\sigma_c(A)$ und $\sigma_r(A)$.

Hinweis: Vergessen Sie nicht die Wohldefiniertheit von A. Stellen sie bei der Betrachtung von $(A - \lambda)f = g$ ein lineares Gleichungssystem auf.

Abgabetermin: Donnerstag 4. Juni 2009, vor 10:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.