Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk
Dipl.-Math. Mario Kaip

4. Juni 2009

Funktionalanalysis
7. Übungsblatt

Aufgabe 7.1 Sei für $m \in \mathbb{N}$ $P(\frac{d}{dx}) := \sum_{k=0}^{m} a_k (\frac{d}{dx})^k$ mit $a_k \in \mathbb{C}$ für $k = 1, \ldots, m$ und $a_m = 1$. Außerdem sei $w \in C^\infty(\mathbb{R})$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} P\left(\frac{d}{dx}\right) w(x) &= 0, \text{ für alle } x \in \mathbb{R}, \\ w^{(k)}(0) &= \delta_{k,m-1} \text{ für } k = 0, \ldots, m-1. \end{aligned}$$

Zeigen Sie nun: Definiert man die Heaviside-Funktion $H := \mathbf{1}_{[0,\infty)}$, so gilt $P\left(\frac{d}{dx}\right)[wH] = \delta_0$.

Aufgabe 7.2 Sei $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von $L^2(\mathbb{R})$ und der Operator T definiert durch

$$T : D(T) \subset L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}), \quad \varphi \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n) e_n$$

mit $D(T) := \mathscr{D}(\mathbb{R})$ (T wohldefiniert?).

(i) Zeigen Sie $D(T^*) = \{0\}$.

(ii) Ist T abschliessbar?

Hinweis: Verwenden Sie für (i) die Aufgabe 6.1. Außerdem können Sie davon ausgehen, dass T dicht definiert ist, damit die Definition von T^* nach Def. 4.11 Sinn ergibt.

Aufgabe 7.3

(i) Sei $f \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{\xi_1, \ldots, \xi_m\})$ mit $\xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_m$, wobei aber $\lim_{x\to\xi_j\pm 0} f(x)$ für $j = 1, \ldots, m$ existiere. Zeigen Sie, dass

$$\frac{d}{dx}[f] = \left[\frac{d}{dx} f\right] + \sum_{j=1}^{m} s_j \delta_{\xi_j}$$

mit $s_j := \lim_{x\to\xi_j+0} f(x) - \lim_{x\to\xi_j-0} f(x)$ gilt.

(ii) Finden Sie eine Funktion $H_n \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ mit $\partial^{(1,\ldots,1)}[H_n] = \delta_0$.

(iii) Sei $f \in W^{1,p}((a,b))$ mit $a < b$, $1 \le p < \infty$ und $\psi \in \mathscr{D}((a,b))$. Zeigen Sie $\psi f \in W^{1,p}((a,b))$ und $\frac{d}{dx}[\psi f] = \left[\left(\frac{d}{dx}\psi\right) f + \psi \left(\frac{d}{dx} f\right)\right]$

Abgabetermin: Freitag 12. Juni 2009, vor 10:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.