Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk
Dipl.-Math. Mario Kaip

25. Juni 2009

Funktionalanalysis
10. Übungsblatt

Aufgabe 10.1 Sei X ein Hilbertraum und $T \in L(X)$. Zeigen Sie nun:

(i) $\rho(T^*) = (\rho(T))^*$, (iii) $\sigma_c(T^*) = (\sigma_c(T))^*$,

(ii) $\sigma(T^*) = (\sigma(T))^*$, (iv) $\sigma_r(T) = (\sigma_p(T^*))^* \setminus \sigma_p(T)$.

Hinweis: Für $A \subset \mathbb{C}$ definiert man $A^* := \{\overline{\lambda} : \lambda \in A\}$.

Aufgabe 10.2 Sei X ein Hilbertraum und $T \in L(X)$ ein unitärer Operator. Zeigen Sie nun die folgenden Aussagen:

(i) Es gilt $\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$.

(ii) Für $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| \neq 1$ gilt $\|(T-\lambda)^{-1}\|_{L(X)} \leq ||\lambda| - 1|^{-1}$.

(iii) Für alle $\lambda \in \sigma_p(T)$ ist $\ker(T-\lambda) = N_\lambda^{(a)}(T)$.

(iv) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.

(v) Es gilt $\sigma_r(T) = \emptyset$.

Aufgabe 10.3

(i) Sei $T : D(T) \subset X \to X$ ein abgeschlossener Operator auf dem Banachraum X. Zeigen Sie

$$\partial\sigma(T) \subset \sigma_{\text{app}}(T).$$

Hinweis: Man definiert den Rand für eine Menge $A \subset \mathbb{C}$ durch $\partial A := \overline{A} \cap (\overline{\mathbb{C} \setminus A})$.

(ii) Geben Sie einen abgeschlossenen Operator $T : D(T) \subset X \to X$ für einen Banachraum X an, bei welchem $\sigma_{\text{app}}(T) \subsetneqq \sigma(T)$ gilt.
Hinweis: Betrachten Sie 'Shift-operatoren'.

Aufgabe 10.4 Sei X ein normierter Raum und $A_j : D(A_j) \subset X \to X$ $(j = 1, 2)$ abgeschlossene lineare Operatoren. Ist $A_1 + A_2$ auch abgeschlossen? Beweisen oder widerlegen Sie ihre Antwort!
Hinweis: $A_1 + A_2$ ist gemäß **3.24 Definition** gegeben.

Abgabetermin: Donnerstag 2. Juli 2009, vor 10:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.