Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk
Dipl.-Math. Mario Kaip

2. Juli 2009

Funktionalanalysis
11. Übungsblatt

Aufgabe 11.1 Sei $A \in L(H)$ ein Operator auf dem $\mathbb{C}$-Hilbertraum H. Zeigen Sie $\sigma_r(A) = \emptyset$, falls A normal ist.

Hinweis: Verwenden Sie Aussagen vorheriger Übungsblätter.

Aufgabe 11.2 Sei H ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum mit einem vollständigen Orthonormalsystem $\{e\}_{e\in S}$ und sei $\Lambda := \{\lambda_e \in \mathbb{C} : e \in S\}$ eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{C}$. Zudem definiert man $\mathcal{F} := \{f : \Lambda \to \mathbb{C} | f \text{ ist beschränkt}\}$

(i) Zeigen Sie, dass $Ax := \sum_{e\in S} \lambda_e \langle x, e\rangle\, e$ für $x \in H$ einen beschränkten Operator $A \in L(H)$ definiert.

(ii) Zeigen Sie, dass $\Phi : \mathcal{F} \to L(H), f \mapsto f(A)$ eine wohldefinierte Abbildung mit $\|f(A)\|_{L(H)} = \sup_{e\in S} |f(\lambda_e)|$ ist, wenn man $f(A)x := \sum_{e\in S} f(\lambda_e) \langle x, e\rangle\, e$ für $x \in H$ definiert.

(iii) Zeigen Sie $\Phi(f)\Phi(g) = \Phi(fg)$ für $f, g \in \mathcal{F}$. Bestimmen Sie weiterhin A^* und zeigen Sie, dass A normal ist.

(iv) Zeigen Sie $\sigma(A) = \sigma_{\text{app}}(A) = \overline{\Lambda}$.
Hinweis: Führen Sie einen indirekten Beweis für $\sigma_{\text{app}}(A) \subset \overline{\Lambda}$.

(v) Zeigen Sie $\sigma_p(A) = \Lambda$ und $\sigma_c(A) = \overline{\Lambda} \setminus \Lambda$.

Hinweis: Verwenden Sie Aussagen aus Kapitel 2d). Insbesondere Satz 2.34!

Aufgabe 11.3 Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$$

(i) Zeigen Sie nun, dass A von der Form in Aufgabe 11.2 (i) mit einem Orthonormalsystem $\{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{C}^3$ ist. Bestimmen Sie $\{v_1, v_2, v_3\}$ und stellen Sie dann A als Linearkombination von orthogonalen Projektionsmatrizen in der kanonischen Basis dar.

Hinweis: Bestimmen Sie die darstellende Matrix der Abbildungen $x \in \mathbb{C}^3 \mapsto \langle x, v_k\rangle\, v_k$ und zeigen Sie, dass es orthogonale Projektionen sind.

(ii) Berechnen Sie eine Matrix $B \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ mit $B^2 = A$. Verwenden Sie dazu den Funktionalkalkül aus Aufgabe 11.2.

Abgabetermin: Donnerstag 9. Juli 2009, vor 10:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.