Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk
Dipl.-Math. Mario Kaip

9. Juli 2009

# Funktionalanalysis
## 12. Übungsblatt

**Aufgabe 12.1** Sei $T \in L(H)$ ein selbstadjungierter Operator auf einem Hilbertraum $H$. Zeigen Sie, dass beim messbaren Funktionalkalkül im Allgemeinen $\sigma(f(T)) \neq f(\sigma(T))$ gilt.

**Aufgabe 12.2** Gegeben sei der Operator $T : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ mit $(Tf)(t) := t \cdot f(t)$ für $f \in L^2([0,1])$, $t \in [0,1]$. Zeigen Sie nun $\sigma(T) = \sigma_c(T) = [0,1]$ und bestimmen Sie für alle $f \in B([0,1])$ den Operator $f(T)$.
Hinweis: Beispiel 8.25 ansehen.

**Aufgabe 12.3** Sei $(X, \mathscr{A})$ ein Messraum, $H$ ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum und $E\colon \mathscr{A} \longrightarrow L(H)$ ein projektorwertiges Maß. Zeigen Sie:

(a) $E(\emptyset) = 0$.

(b) $E(A \cup B) + E(A \cap B) = E(A) + E(B)$ $(A, B \in \mathscr{A})$.

(c) $E(B \setminus A) = E(B) - E(A)$ für $A, B \in \mathscr{A}$ mit $A \subset B$.

(d) Seien $A_n \in \mathscr{A}$ mit $A_n \subset A_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$. Dann ist $E(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \text{s-}\lim_{n\to\infty} E(A_n)$. Und für $A_n \in \mathscr{A}$ mit $A_n \supset A_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ gilt $E(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \text{s-}\lim_{n\to\infty} E(A_n)$.

(e) Seien $A, B \in \mathscr{A}$ mit $A \cap B = \emptyset$. Dann ist $R(E(A)) \perp R(E(B))$.

(f) $E(A \cap B) = E(A)E(B) = E(B)E(A)$ $(A, B \in \mathscr{A})$.

Abgabetermin: Donnerstag 16. Juli 2009, vor 10:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.