

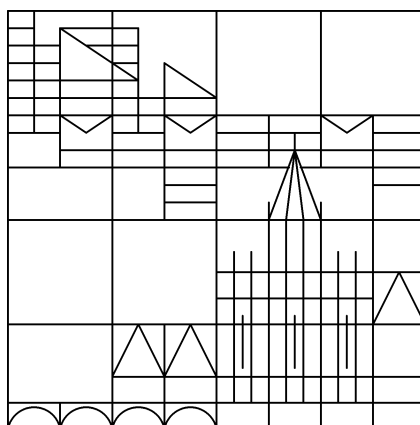
Ludger Kaup

Vorlesungen
über
Torische Varietäten

mit einem Anhang

Karl-Heinz Fieseler

Äquivariante Schnittthomologie



Universität Konstanz

Konstanzer Schriften in Mathematik und Informatik

Nr 130, Fassung vom Frühjahr 2002

ISSN 14030-3558

Fachbereich für Mathematik und Statistik

Postfach 5560 D 203

D-78457 Konstanz (Germany)

e-mail address: Ludger.Kaup@fmi.uni-konstanz.de

Inhalt

Vorwort

Kapitel I: Grundlegende Definitionen, Beispiele

§ 1 Konvexe und polyedrische Kegel	4
§ 2 Gitterkegel	19
Anhang: Der Elementarteilersatz	26
§ 3 Affine torische Varietäten	29
§ 4 Fächer und torische Varietäten	43

Kapitel II: Polytopische Fächer, Bahnenzerlegung

§ 5 Polytope und torische Varietäten	54
Anhang: Beispiele nicht polytopischer Fächer	69
§ 6 Ein-Parameter-Untergruppen und Charaktere	74
§ 7 Die Bahnenzerlegung	83

Kapitel III: Eigentliche Morphismen und Singularitätenauflösung

§ 8 Eigentliche Morphismen	97
§ 9 Simpliciale Fächer und Quotientensingularitäten	102
Anhang: Simpliciale Fächer und rationale Homologiemannigfaltigkeiten	109
§ 10 Glatte vollständige torische Flächen	118
Anhang: Invariante Kurven und der duale Graph	128
§ 11 Die Auflösung torischer Singularitäten	135

Kapitel IV: Topologie und Geradenbündel

§ 12 Die Fundamentalgruppe	145
§ 13 Eulercharakteristik	152
§ 14 Divisoren	162
§ 15 Geradenbündel	170
§ 16 Projektive torische Varietäten	180

Kapitel V: Schnitttheorie und das g -Theorem

§ 17 Chowgruppen	194
Anhang: Ein Satz über Chowgruppen von Quotienten	205
§ 18 Der Satz von Jurkiewicz-Danilov	206

§ 19 Homologie mit abgeschlossenen Trägern	216
§ 20 Das g -Theorem	238
Anhang: Äquivariante (Schnitt)kohomologie torischer Varietäten	
§ 21 Äquivariante Kohomologie simplizialer Varietäten	242
§ 22 Äquivariant formale simpliziale Fächer	259
§ 23 Einführung in die Schnittkohomologie	269
§ 24 Quasikonvexe Fächer	276
§ 25 Virtuelle Schnittkohomologie eines Fächers	286
Literaturverzeichnis	294
Symbolverzeichnis	298
Index	306

Vorwort

Torische Varietäten lassen sich hervorragend als Beispielfundus für die Illustration von Phänomenen aller Art in der algebraischen Geometrie verwenden. Ergänzend zu den sonst üblichen Beispielklassen niederer Dimensionen wie den algebraischer Kurven oder den algebraischer Flächen erhält man hier illustratives Material in allen Dimensionen. Dennoch sind die torischen Varietäten von sehr spezieller Natur: Sie sind stets rational und haben höchstens „rationale Singularitäten“.

Die Theorie torischer Varietäten entstand ursprünglich aus dem Wunsch, symmetrische Varietäten zu kompaktifizieren; daher sprach man zunächst von „torischen Einbettungen“. Diesen Gesichtspunkt werden wir im folgenden Text jedoch wenig verfolgen. Für uns ist vielmehr der enge Zusammenhang mit der elementaren Konvexgeometrie bzw. der Theorie der Gitterpolytope vorrangig, der ein faszinierendes Zusammenspiel zwischen zwei a priori völlig verschiedenen Bereichen liefert. Gerade die Übersetzung der einen Begriffswelt in die andere wird uns interessieren, die Erstellung eines Wörterbuches, das die Stärken der einen Theorie der jeweils anderen verfügbar macht.

Der folgende Text entspricht einer im akademischen Jahr 1998/99 im Anschluß an eine Veranstaltung über algebraische Geometrie [AG] gehaltenen Vorlesung, setzt aber nicht mehr als allgemeine Grundkenntnisse dieser Disziplin voraus. Er verarbeitet Notizen nach Vorträgen, die vor allem auch von Annette A'Campo, Gottfried Barthel, Karl-Heinz Fieseler, Jürgen Hausen, Franz Mauch, Michael Nüsken, Volker Puppe und Volker Strassen in den Jahren 1994 – 96 in einem Seminar zum Buch [Fu] an der Universität Konstanz gehalten wurden, bringt aber auch noch unpublizierte Ergebnisse. Des weiteren hat er von den Vorträgen im Sommerseminar 1997 an der Universität Bern profitiert. Die Illustrationen wurden von Florian Berchtold, Arno Jordan und Thomas Willhalm realisiert. Für die Übungen hat mich Florian Berchtold unterstützt; einfache Aufgaben dienen der Kontrolle des Textverständnisses. Auch den Hörern bin ich für kritische Kommentare zu Dank verpflichtet, insbesondere Matthias Franz.

Im Anhang habe ich eine Gastvorlesung von K.H. Fieseler an der Universität Konstanz im Juni 1999 ergänzt und eingearbeitet. In ihm geht es um ein kombinatorisches Verständnis der algebraisch torischen Invarianten. Zunächst wird die Kohomologie simplizialer Varietäten analysiert; dazu erweist sich die äquivariante Kohomologie als das adäquate Hilfsmittel. Die Resultate gelten nicht nur für vollständige Fächer, sondern auch für äquivariant formale; zu diesen gehören insbesondere die volldimensional erzeugten mit konvexem Träger oder konvexem Komplement des Trägers wie etwa die affinen Fächer. — Beim Übergang zu nichtsimplicialen Fächern hat man die Kohomologie durch die Schnitthomologie zu ersetzen. Dann kommt man zu einer axiomatischen Charakterisierung der äquivarianten Schnitthomologie über die sogenannten „minimalen Erweiterungen“. Damit ergeben sich rekursive kombinatorische Berechnungsmöglichkeiten für die „virtuelle Schnitthomologie“ äquivariant formaler Fächer, die nun nicht einmal mehr rational zu sein brauchen.

Kapitel I

Grundlegende Definitionen und Beispiele

Wir stellen zunächst die Begriffsbildungen von der kombinatorischen Seite zur Verfügung, nämlich Kegel und Fächer. Daraus lassen sich als erstes affin algebraische Varietäten konstruieren, die sich für einen Fächer zu einer globalen algebraischen Varietät verheften lassen. Ein besonders interessanter Spezialfall ist der eines Fächers, der von einem Polytop erzeugt wird.

1. Konvexe und polyedrische Kegel

In diesem Paragraphen gehen wir auf einige grundlegende Eigenschaften von Kegeln ein. Wir betrachten zunächst allgemein konvexe Kegel im \mathbb{R}^n und schränken uns dann auf polyedrische Kegel ein. Es seien dabei V ein n -dimensionaler (wenn nicht anders vermerkt reeller) euklidischer Vektorraum mit Dualraum $V^* = \text{Hom}(V, \mathbb{R})$ und Auswertungsabbildung

$$\langle -, - \rangle: V \times V^* \rightarrow \mathbb{R}, \quad (v, u) \mapsto u(v).$$

Mit dem Symbol $\langle -, - \rangle$ bezeichnen wir (nach Festlegung einer Basis) auch das kanonische Skalarprodukt auf V ; auf diese Weise erhalten wir eine für uns gelegentlich wichtige Identifikation von V^* mit V .

A. Kegel

Eine Teilmenge A von V heißt bekanntlich konvex, wenn gilt: Für alle $t \in I := [0, 1]$ und alle $a, b \in A$ gilt $ta + (1 - t)b \in A$. Weiter heißt A kegelförmig, wenn $A = \mathbb{R}_{\geq 0}A$ gilt. Schließlich heiÙe ein nicht leeres A ein *Kegel*, wenn A kegelförmig und konvex ist. Damit enthalten Kegel stets den Nullpunkt und folglich den „Nullkegel“ $\mathfrak{o} := \text{keg}(\emptyset) := \{0\}$.

Wir verwenden folgende Bezeichnungen: Für konvexe $A, A' \subset V$ seien

- $A + A' := \{a + a'; a \in A, a' \in A'\}$ die „Minkowskisumme“ und $A - A' := A + (-A')$;
- $\text{lin } A$ der von A in V erzeugte Untervektorraum; für Kegel A gilt $\text{lin } A = A - A$;
- $\dim A := \dim \text{lin } A$ die Dimension des von A in V erzeugten Untervektorraumes.

Dazu treffen wir die Konvention $\dim \emptyset = -1$.

1.1 Definition Für $A \subset V$ heißt $\text{keg}(A) := \{\sum_{< \infty} r_i a_i; r_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}, a_i \in A\}$ der von A erzeugte Kegel; dabei sei $\text{keg}(\emptyset) := \{0\}$.

Für einen Kegel C gilt ersichtlich $C = \text{keg}(C)$.

1.2 Beispiele 1) Die Teilmengen $\{0\}$ und V sind Kegel.

2) Ist (e_1, \dots, e_n) eine Basis von V und $m \leq n$, so ist die Menge

$$\{x \in V; x_j \geq 0, 1 \leq j \leq m, x_{m+1} = \dots = x_n = 0\}$$

ein Kegel.

3) Ist $\varphi \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$ und sind $C \subset V$, $D \subset W$ Kegel, so sind auch $\varphi(C)$ und $\varphi^{-1}(D)$ wieder Kegel. ■

1.3 Bemerkung Mit C, C' sind auch $C \cap C'$, $C + C'$, \overline{C} Kegel. ■

Aufgabe 1.1 Man zeige für die abgeschlossenen Kegel

$$\begin{aligned} C &:= \{x \in \mathbb{R}^3; x_1 \geq 0, x_3 \geq 0, x_2^2 \leq x_1 x_3\} \\ C' &:= \{x \in \mathbb{R}^3; x_1 \leq 0, x_3 \geq 0, x_2^2 \leq -x_1 x_3\}, \end{aligned}$$

daß der Kegel $C + C'$ nicht abgeschlossen ist.

Aufgabe 1.2 Es sei A eine konvexe kompakte Teilmenge von V . Man zeige:

- i) Ist 0 kein Randpunkt von A , so ist $\text{keg}(A)$ abgeschlossen.
- ii) Man gebe ein Beispiel an, in dem $\text{keg}(A)$ nicht abgeschlossen ist.

1.4 Lemma Die bezüglich Inklusion partiell geordnete Menge $\mathfrak{K} := \mathfrak{K}(V)$ der abgeschlossenen Kegel in V bildet einen Verband mit

$$\min(C, C') = C \cap C' \quad \text{und} \quad \max(C, C') = \overline{C + C'} = \overline{\text{keg}(C \cup C')}.$$

Beweis Da $C \cap C'$ ein abgeschlossener Kegel ist, ergibt sich $C \cap C'$ als größter in C wie auch in C' enthaltener Kegel und damit definitionsgemäß als $\min(C, C')$. Aus

$$\text{keg}(C \cup C') = C + C'$$

folgt andererseits, daß $C + C'$ der kleinste sowohl C als auch C' enthaltende Kegel, also dessen Abschluß $\max(C, C')$ ist. ■

Wir verwenden weiterhin folgende Notationen für $A, B \subset V$:

- $\langle A, B \rangle := \{\langle a, b \rangle; a \in A, b \in B\}$;
- $A^\vee := \{u \in V^*; \langle A, u \rangle \geq 0\}$ ist der zu A duale Kegel, er ist abgeschlossen (vgl. (1.4.1)); für $u \in V^*$ erhält man damit den Halbraum

$$u^\vee =: H^+(u) =: H^{\geq 0}(u) = \{v \in V; \langle v, u \rangle \geq 0\};$$

- $A^\perp := \{u \in V^*; \langle A, u \rangle = 0\} = A^\vee \cap (-A)^\vee$ ist der zu A orthogonale Vektorraum; für $u \in V^*$ wird die Hyperebene u^\perp mit $H(u)$ oder $H^{=0}(u)$ bezeichnet;

- $A^\circ := \{x \in A; \langle x, A^\vee \setminus A^\perp \rangle > 0\}$ ist der Kern oder das „relative Innere“ von einem Kegel A ;
- $\partial A := A \setminus A^\circ$ ist der relative Rand eines Kegels A .

Man sieht unmittelbar:

$$(1.4.1) \quad A^\vee = \{u \in V^*; A \subset H^+(u)\} = \bigcap_{v \in A} H^+(v).$$

Aufgabe 1.3 Im \mathbb{R}^2 bestimme man A_i^\vee , A_i^\perp , A_i° und ∂A_i für

$$A_1 := \mathbb{R}_{\geq 0} \times \{0\}, \quad A_2 := \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}, \quad A_3 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq y \geq 0\}.$$

Aufgabe 1.4 Es sei A ein volldimensionaler Kegel in V , i.e., $\dim A = \dim V$. Man zeige, daß topologisches Inneres $\overset{\circ}{A}$ und relatives Inneres A° von A übereinstimmen.

Grundlegend ist folgender (endlichdimensionale) Spezialfall des Satzes von Hahn-Banach [Bou, Th. II.3.1]:

1.5 Satz *Es seien C ein abgeschlossener Kegel in V und $v \in V \setminus C$. Dann existiert eine Linearform $u \in C^\vee$ mit $\langle v, u \rangle < 0$.*

Beweis Wir identifizieren V^* vermöge des Standardskalarproduktes mit V . Da C abgeschlossen ist, können wir ein $w \in C$ wählen, für das die Funktion $\|w - v\|^2$ auf C ein Minimum hat. Nach Konstruktion ist $u := w - v \neq 0$. Wenn wir

$$(1.5.1) \quad \langle w, w - v \rangle = 0$$

zeigen können, dann folgt daraus einerseits mit $u \neq 0$

$$\langle v, u \rangle = \langle v, w - v \rangle = -\langle w - v, w - v \rangle < 0.$$

Andererseits haben wir $u \in C^\vee$ zu zeigen. Dazu sei $z \in C$. Die Abbildung

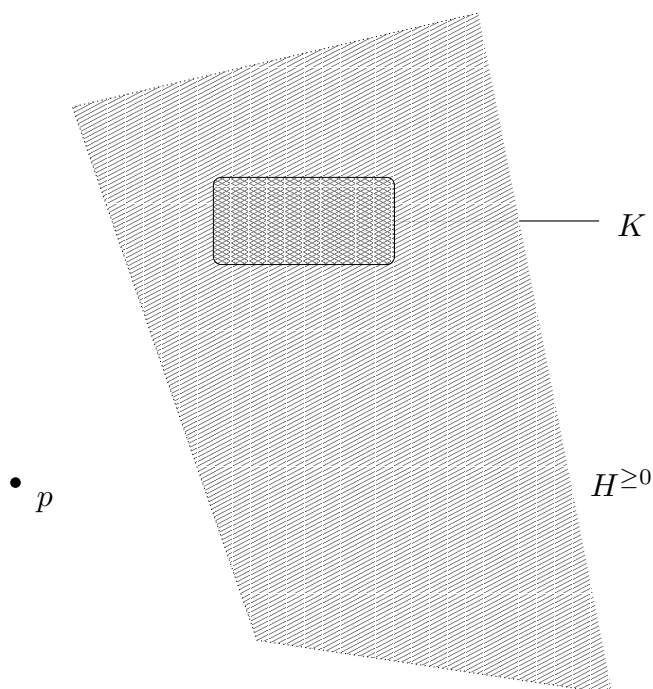
$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \|(1-t)w + tz - v\|^2$$

ist polynomial und daher stetig differenzierbar. Auf I nimmt sie in 0 ein Minimum an; daher gilt dort

$$(1.5.2) \quad 0 \leq \frac{d}{dt} \|(1-t)w + tz - v\|^2 \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \langle w - v + t(z - w), w - v + t(z - w) \rangle \Big|_{t=0} = 2\langle z - w, w - v \rangle.$$

Da dies für alle $z \in C$ zutrifft, lassen sich insbesondere $z = 0$ und $z = 2w$ einsetzen, woraus zunächst (1.5.1) folgt. Damit ergibt sich aber aus (1.5.2) unmittelbar $\langle z, u \rangle \geq 0$. ■

1.6 Bemerkung Nach Übergang zu einer Hyperebene (i.e., einem affinen, einkodimensionalen Unterraum) W in V durch v kann man 1.5 wie folgt formulieren: Ist $K \subset W$



FIGUR 1.1 Zum Satz von Hahn-Banach

abgeschlossen und konvex und $p \in W \setminus K$, so existiert ein Halbraum $H^{\geq 0}$, der K , aber nicht p enthält.

Ist K sogar kompakt, so läßt sich $H^{\geq 0}$ in der Form $H^{\geq 0}(u)$ mit einer Linearform u mit rationalen Koeffizienten wählen. ■

Wir werden gelegentlich auch die schärfere Form des Satzes von Hahn-Banach benötigen:

1.7 Korollar *Es sei K eine nicht leere kompakte konvexe Teilmenge im Komplement eines affinen Unterraumes Z von V . Dann existiert eine Hyperebene H in V , die Z enthält und für die $K \subset H^{>0}$ gilt.*

Beweis Ohne Einschränkung sei Z ein linearer Unterraum. Ist $\pi: V \rightarrow \bar{V} := V/Z$ die kanonische Projektion, so ist $\pi(K)$ konvex, abgeschlossen und enthält den Punkt 0 nicht. Man wähle gemäß 1.6 eine Linearform φ auf \bar{V} , die auf $\pi(K)$ positiv ist und setze $u := \pi^*(\varphi)$. Dann ist $u(K) > 0$, aber $u(Z) = 0$, also leistet $H(u)$ das Verlangte. ■

1.8 Korollar *Ist C ein abgeschlossener Kegel in V , so gilt $C = C^{\vee\vee}$.*

Beweis Die Inklusion $C \subset C^{\vee\vee}$ ist trivial. Ist umgekehrt $v \notin C$, so existiert nach 1.5 ein $u \in C^\vee$ mit $\langle v, u \rangle < 0$. Also liegt v nicht in $C^{\vee\vee}$. ■

1.9 Korollar *Die Abbildung*

$$\mathfrak{K}(V) \rightarrow \mathfrak{K}(V^*), \quad C \mapsto C^\vee$$

ist ein ordnungsumkehrender Isomorphismus von Verbänden. Insbesondere gilt:

$$(1.9.1) \quad \overline{(C_1 + C_2)}^\vee = C_1^\vee \cap C_2^\vee \quad \text{und} \quad (C_1 \cap C_2)^\vee = \overline{C_1^\vee + C_2^\vee}.$$

Beweis Aus (1.4.1) folgt zunächst, daß der Kegel C^\vee abgeschlossen ist. Die Zuordnung ist ordnungsumkehrend und nach 1.8 bijektiv. Daher wird $C_1 \cap C_2$ als Minimum von C_1 und C_2 in $\mathfrak{K}(V)$ durch Dualisieren auf das Maximum von C_1^\vee und C_2^\vee in $\mathfrak{K}(V^*)$, also auf $\overline{C_1^\vee + C_2^\vee}$ abgebildet. ■

1.10 Korollar Jeder Kegel C ist Durchschnitt (abgeschlossener) Halbräume:

$$(1.10.1) \quad C = \bigcap_{u \in C^\vee} H^{\geq 0}(u).$$

Beweis Man wende (1.4.1) mit $A = C^\vee$ an und beachte 1.8. ■

Aufgabe 1.5 Für einen Kegel C und einen linearen Unterraum U von V zeige man:

- i) $U^\vee = U^\perp$;
- ii) $C^{\perp\vee} = C^{\perp\perp} = \text{lin } C$ (für 1.16).
- iii) $C^{\vee\perp} = C \cap (-C)$.

B. Polyedrische Kegel

Wir interessieren uns im wesentlichen für endlich erzeugte Kegel:

1.11 Definition Für $\{v_1, \dots, v_m\} \subset V$ heißt der Kegel

$$\text{keg}(v_1, \dots, v_m) = \mathbb{R}_{\geq 0}v_1 + \dots + \mathbb{R}_{\geq 0}v_m = \text{keg}(v_1) + \dots + \text{keg}(v_m)$$

ein polyedrischer Kegel. Die Menge der polyedrischen Kegel in V werde mit $\mathfrak{K}_p := \mathfrak{K}_p(V)$ bezeichnet.

Für die dabei auftretenden Minkowskisummen gilt folgende nützliche Bemerkung:

1.12 Lemma Die Minkowskisumme von konvexen bzw. kompakten Teilmengen von V ist wieder konvex bzw. kompakt.

Beweis Es seien $A, B \subset V$ konvex und $a, a' \in A$, $b, b' \in B$ sowie $t \in I$. Dann gilt

$$t(a + b) + (1 - t)(a' + b') = ta + (1 - t)a' + tb + (1 - t)b' \in A + B.$$

Da die Addition $V \times V \xrightarrow{+} V$ stetig ist, ergibt sich $A + B$ als Bild des Kompaktums $A \times B$ als kompakt. ■

Man beachte, daß die Minkowskisumme abgeschlossener Mengen nach Aufgabe 1.1 nicht wieder abgeschlossen sein muß.

1.13 Bemerkung Jedes $C \in \mathfrak{K}_p(V)$ ist Durchschnitt endlich vieler Halbräume in V und damit insbesondere abgeschlossen.

Beweis Ohne Einschränkung sei $C = \text{keg}(v_1, \dots, v_m)$ volldimensional, da man jeden eins-kodimensionalen Untervektorraum als Durchschnitt zweier Halbräume schreiben kann und man somit $\text{lin } C$ als Durchschnitt von $(2 \text{codim}_V C)$ Halbräumen erhält. Damit ist $m \geq n$. Nun wähle man aus der Darstellung (1.10.1) genau diejenigen Halbräume aus, deren Rand n linear unabhängige Punkte aus $\{v_1, \dots, v_m\}$ enthalten. Dies sind nur endlich viele; sie beschreiben den Durchschnitt vollständig.

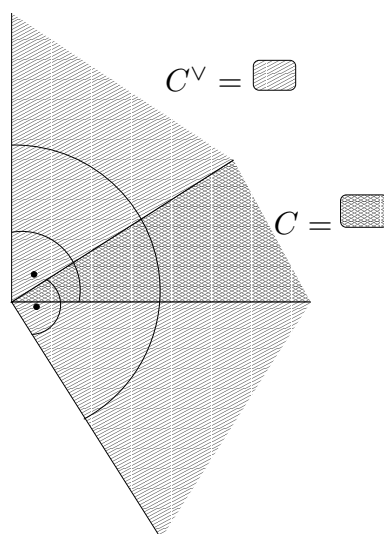
Aufgabe 1.6 Gegeben seien $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n \cong V$. Man zeige, daß sich $\text{keg}(v_1, \dots, v_m)$ als Durchschnitt endlich vieler Halbräume $H^{\geq 0}(u)$ schreiben läßt, wobei u rationale Koeffizienten hat.

1.14 Lemma Genau dann ist der Kegel C aus $\mathfrak{K}(V)$ von der Form $C = u_1^\vee \cap \dots \cap u_m^\vee$ mit Linearformen $u_j \in V^*$, wenn $C^\vee = \text{keg}(u_1, \dots, u_m)$ gilt. Insbesondere ist das Dual eines polyedrischen Kegels wieder polyedrisch.

Beweis „ \Leftarrow “ Die Darstellung von $C = C^{\vee\vee}$ folgt aus (1.9.1) mit $u_j^{\vee\vee} = \text{keg}(u_j)$.

„ \Rightarrow “ Jedes $u \in D := \text{keg}(u_1, \dots, u_m)$ nimmt als positive Linearkombination der u_i mit diesen auf C positive Werte an; damit folgt $D \subset C^\vee$. Ist andererseits $u \notin D \subset V^*$, so existiert nach 1.5 ein $w \in D^\vee$ mit $\langle w, u \rangle < 0$. Damit ist zunächst $\langle w, u_i \rangle \geq 0$ für alle i , also $w \in C$, sodaß aus $\langle w, u \rangle < 0$ folgt, daß u nicht in C^\vee liegt. — Nach 1.13 ist schließlich jedes $C \in \mathfrak{K}_p$ sich ein endlicher Durchschnitt von Halbräumen der Form u_i^\perp . ■

Für eine explizite Möglichkeit, C^\vee zu berechnen, sei auf die Fourier-Motzkin-Elimination [Zie 1.3] verwiesen. Lemma 1.14 eröffnet jedenfalls die Möglichkeit, in kleinen Dimensionen Dualkegel sofort aufzuzeichnen (vgl. Figur 1.2):



FIGUR 1.2 Dualkegel

Die Menge \mathfrak{K}_p ist nach 1.13 eine Teilmenge \mathfrak{K} ; sie ist sogar ein Unterverband:

1.15 Lemma Die bezüglich Inklusion partiell geordnete Menge $\mathfrak{K}_p(V)$ der polyedrischen Kegel in V bildet mit den Operationen

$$(1.15.1) \quad \min(C, C') = C \cap C' \quad \text{und} \quad \max(C, C') = C + C'$$

einen Verband; die Abbildung

$$\mathfrak{K}_p(V) \rightarrow \mathfrak{K}_p(V^*), \quad C \mapsto C^\vee$$

ist ein ordnungsumkehrender Isomorphismus von Verbänden. Insbesondere gilt:

$$(1.15.2) \quad (C_1 + C_2)^\vee = C_1^\vee \cap C_2^\vee \quad \text{und} \quad (C_1 \cap C_2)^\vee = C_1^\vee + C_2^\vee.$$

Beweis Nach 1.14 ist das Dual eines polyedrischen Kegels wieder polyedrisch, also die Abbildung wohldefiniert. Außerdem sind mit C_1 und C_2 auch $C_1 + C_2$ und $C_1 \cap C_2$ polyedrische Kegel, so daß die Behauptung aus 1.9 folgt: Zunächst existieren Darstellungen

$$\begin{aligned} C_1 &= \text{keg}(v_1, \dots, v_m) = \text{keg}(v_1) + \dots + \text{keg}(v_m) \\ C_2 &= \text{keg}(v_{m+1}, \dots, v_{m+s}) = \text{keg}(v_{m+1}) + \dots + \text{keg}(v_{m+s}). \end{aligned}$$

Damit ist $C_1 + C_2 = \text{keg}(v_1) + \dots + \text{keg}(v_{m+s}) = \text{keg}(v_1, \dots, v_{m+s})$ polyedrisch und insbesondere abgeschlossen. Aus (1.9.1) ergibt sich

$$(C_1 \cap C_2)^\vee = C_1^\vee + C_2^\vee, \quad \text{also} \quad C_1 \cap C_2 = (C_1^\vee + C_2^\vee)^\vee.$$

Damit ist $C_1 \cap C_2$ als Dual eines polyedrischen Kegels wiederum polyedrisch. ■

Wir wollen nun das (relative) Innere und den Rand eines Kegels $\sigma \in \mathfrak{K}_p$ charakterisieren; wir beginnen mit dem Inneren:

1.16 Bemerkung Für jeden Punkt x in $C \in \mathfrak{K}_p(V)$ sind äquivalent:

- 1) $x \in C^\circ$;
- 2) $C^\vee \cap x^\perp = C^\perp$;
- 3) $\text{lin } C = C + \mathbb{R}_{\geq 0}(-x)$;
- 4) für alle $z \in C$ existieren ein $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und ein $y \in C$ mit $\lambda x = y + z$.

Beweis In Schritt 1) \Rightarrow 2) ist die Inklusion $C^\vee \cap x^\perp \supset C^\perp$ evident; ist $u \notin C^\perp$, aber in x^\perp , so ist $u \neq 0$ und $H^{<0}(u)$ schneidet jede Umgebung von x in V und damit in C . Für 2) \Rightarrow 3) verwende man Aufgabe 1.5:

$$C + \mathbb{R}_{\geq 0}(-x) = C + \mathbb{R}x = C^{\vee\vee} + x^{\perp\vee} \stackrel{(1.9.1)}{=} (C^\vee \cap x^\perp)^\vee = C^{\perp\vee} = \text{lin } C.$$

3) \Rightarrow 4) ergibt sich aus der Zerlegung von $-z \in \text{lin } C$ gemäß 3). Für 4) \Rightarrow 1) genügt es zu zeigen, daß für jedes $z \in C$ und jedes hinreichend kleine $\varepsilon \geq 0$ auch $x - \varepsilon z$ in C liegt. Nach Voraussetzung existieren $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $y \in C$ mit $\lambda x = y + z$. Für $\lambda = 0$ liegt

auch $-z$ in C , und damit ist $x + \mathbb{R}z$ in C enthalten. Für $\lambda \neq 0$ folgt $y/\lambda = x - z/\lambda \in C$; also wählen wir $\varepsilon = 1/\lambda$. ■

Für die Untersuchung polyedrischer Kegel C ist der Begriff der Seite grundlegend. Dabei handelt es sich um den Durchschnitt mit dem Rand eines C enthaltenden Halbraumes; zusätzlich ist C eine Seite von sich selbst:

1.17 Definition Eine Teilmenge F eines Kegels $C \in \mathfrak{K}_p(V)$ heißt Seite von C , in Zeichen $F \prec C$, wenn eine Linearform $u \in C^\vee$ existiert mit $F = C \cap u^\perp$. Wir sprechen von einer echten Seite $F \not\prec C$, wenn $u \neq 0$ ist. Mit $\mathfrak{S}(C)$ bezeichnen wir die Menge aller Seiten von C .

Gewisse Seiten tragen spezielle Namen:

1.18 Definition Die Seite $F \prec C$ heißt

Kante von C , wenn F eindimensional ist;

Facette von C , wenn F einskodimensional in C ist (in Zeichen $F \prec_1 C$);

Kamm von C , wenn F der größte in C enthaltene Untervektorraum ist:

$$\text{Kamm } C := C \cap (-C) = C^{\vee\perp} = \bigcap_{F \prec C} F.$$

Die letzte Zeile verwendet Aufgabe 1.5 und die Tatsache, daß für jede echte Seite F von C mit F auch $-F$ in Kamm C enthalten ist.

Wieder kann man $\mathfrak{S}(C)$ bezüglich der Inklusion als einen Verband interpretieren, der allerdings zwar Teilmenge, aber kein Unterverband von $\mathfrak{K}_p(V)$ und daher schwieriger zu handhaben ist, da im allgemeinen nicht $\max(F, F') = F + F'$ gilt (hat $C \in \mathfrak{K}_p(V)$ mehr als drei einskodimensionale Seiten F_1, \dots, F_r , so ist $F_1 + F_2 \subsetneq C = \max(F_1, F_2)$):

1.19 Satz Für einen polyedrischen Kegel $C = \text{keg}(v_1, \dots, v_m)$ in V ist $\mathfrak{S}(C)$ ein Verband mit $\min(F, F') := F \cap F'$. Es gilt:

0) Ist $D \subset C$ ein abgeschlossener Kegel in V , so ist D genau dann Seite von C , wenn gilt:

$$(1.19.1) \quad \text{Aus } x, y \in C \text{ und } x + y \in D \text{ folgt } x, y \in D.$$

1) Ist $F \prec C$, so existiert ein $I \subset \{1, \dots, m\}$ mit $F = \text{keg}(v_i; i \in I)$; insbesondere ist die Anzahl $\#\mathfrak{S}(C)$ der Seiten von C endlich.

2) Aus $D \prec F \prec C$ folgt $D \prec C$.

$$3) \partial C = \bigcup_{D \not\prec C} D = \bigcup_{D \not\prec C} D^\circ = \bigcup_{F \prec_1 C} F.$$

Beweis Um nachzuweisen, daß $\mathfrak{S}(C)$ ein Verband ist, bleibt wesentlich zu zeigen, daß der Durchschnitt zweier Seiten $F, F' \prec C$ wieder eine Seite von C ist. Denn da C nach 1) nur endlich viele Seiten hat, existiert auch $\max(F, F')$ als die kleinste diese beiden enthaltende Seite von C . Zu zwei Seiten F, F' wende man also 1.7 auf $Z := \text{lin}(F \cap F')$

und die konvexe Hülle K aller $v_i \in C \setminus (F \cap F')$ an. Man erhält eine Linearform $u \in V^*$ mit $u(Z) = 0$ und $u(K) > 0$, es gilt also $C \cap u^\perp = F \cap F'$ und $C \subset u^\vee$.

In 0) ist zunächst evident, daß jede Seite von C die Bedingung (1.19.1) erfüllt: Schneidet man C mit der Ebene durch $0, x$ und y , so sieht man die zweidimensionale Aussage unmittelbar, da man ohne Einschränkung $C = \text{keg}((1, 0), (a, b))$ mit $b \geq 0$ und $D = \text{keg}((1, 0))$ wählen darf. Damit folgt auch 1). — In 2) dürfen wir auf die Seite F die Überlegung aus 1) anwenden, also ist auch D ein von gewissen v_j erzeugter Kegel. Mit 1.7 ergibt sich wie zu Anfang des Beweises, daß D eine Seite von C ist.

Für 3) verwenden wir 1.16:

$$\begin{aligned} \partial C &= C \setminus C^\circ = \{v \in C; C^\vee \cap v^\perp \not\supseteq C^\perp\} = \{v \in C; \exists u \in v^\perp, \langle C, u \rangle \geq 0, \langle C, u \rangle \neq 0\} \\ &= \bigcup_{u \in C^\vee \setminus C^\perp} \{v \in C; \langle v, u \rangle = 0\} = \bigcup_{u \in C^\vee \setminus C^\perp} C \cap u^\perp = \bigcup_{F \not\supseteq C} F. \end{aligned}$$

Da jede Seite von C wieder ein Kegel ist und $C = C^\circ \cup \partial C$ gilt, erhält man induktiv daraus $\partial C = \bigcup_{D \prec C} D^\circ$. Für den Nachweis von 3) haben wir noch zu beweisen, daß jeder in einer echten Seite von C liegende Punkt in einer Facette enthalten ist. Wir verifizieren, daß in ∂C das Komplement der Vereinigung aller mindestens zwei-kodimensionalen Seiten D_1, \dots, D_r dicht liegt. Dazu sei ohne Einschränkung $\dim C = n$. Wir fixieren einen Punkt $y \in C^\circ$, dann ist jeder Kegel $\text{keg}(y, D_j)$ höchstens $(n-1)$ -dimensional und in einer geeigneten Hyperebene H_j enthalten. Damit liegt $C \setminus M$ mit $M := \bigcup_{j=1}^r H_j$ dicht in C . Weil M alle D_j enthält, schneidet für jedes $x \in C \setminus M$ die Gerade durch y und x den Rand ∂C in einem Punkt, der auf einer Facette F liegt. Insbesondere gibt es Facetten, und $F \setminus M$ liegt dicht in F . Da ∂C eine endliche Vereinigung von Seiten ist, gilt auch $\overline{\partial C \setminus M} = C$.

Es bleibt in 0) die Umkehrung zu zeigen. Ausgehend vom zweidimensionalen Fall verifiziert man leicht, daß gemäß (1.19.1) $D \cap C^\circ$ offen in C° und damit ganz C° (dies impliziert $D = C$) oder leer ist. In zweiten Fall ist D im Rand ∂C enthalten. Läge D dann nicht in einer eins-kodimensionalen Seite von C , so enthielte D doch innere Punkte von C . Induktiv erhalten wir eine Seite von C , deren Inneres D schneidet und die damit mit D übereinstimmt. ■

1.20 Satz Für einen polyedrischen Kegel C gilt

1) Jede maximale Kette in $\mathfrak{S}(C)$ ist von der Form

$$\text{Kamm } C = F_k \prec_1 F_{k-1} \prec_1 \dots \prec_1 F_1 \prec_1 C.$$

2) Jede echte Seite von C ist Durchschnitt aller sie enthaltenden Facetten von C .

Beweis 1) Bei jedem Schritt verändert sich die Dimension wenigstens um 1. Wir haben damit wegen der Transitivität der Seitenrelation gemäß 1.19 2) nur zu zeigen: Ist $D \prec C$ mindestens zwei-kodimensional, so gibt es eine Facette F von C mit $D \prec F \prec C$. Dazu fixieren wir ein $x \in D^\circ$. Nach 1.19 3) existieren eine Facette F von C und eine Seite \tilde{D} von F mit $x \in F$ und $x \in \tilde{D}^\circ$. Insbesondere gilt $D^\circ \cap \tilde{D}^\circ \neq \emptyset$, woraus $D = \tilde{D} \prec F$ folgt.

2) Gemäß 1) sei eine Kette $D_k \prec_1 D_{k-1} \prec_1 \dots \prec_1 D_1 \prec_1 C$ gegeben; durch Induktion sieht man sofort, daß es genügt, $D := D_2$ zu untersuchen. Dazu sei C ohne Einschränkung n -dimensional; zu $\text{lin } D$ wähle man eine komplementäre Ebene E in V mit $\dim(E \cap C) = 2$. Es seien F_1, \dots, F_s die D enthaltenden Facetten von C ; wir wollen $s = 2$ zeigen, woraus dann aus Dimensionsgründen $D = F_1 \cap F_2$ folgt. Da $E \cap C$ zweidimensional ist, folgt $s \geq 2$. Wäre $s \geq 3$, so läge der Schnitt $F_2 \cap E$ in $\text{konv}(F_1 \cap E, F_3 \cap E)$ bei geeigneter Numerierung der Kanten $F_j \cap E$. Alle Bedingungen an E sind offene Bedingungen (man fixiere etwa einen Normalenvektor zu E und betrachte den zugehörigen Schnittpunkt s_E mit D ; für alle $s \in D$ nahe s_E erfüllen die Ebenen E die gleichen Bedingungen), also folgt ein Widerspruch $F_2 \subset \text{konv}(F_1, F_3)$. ■

Ein Kegel ist genau dann volldimensional, wenn sein Dual „spitz“ ist:

1.21 Definition und Korollar Ein Kegel $C \in \mathfrak{K}_p$ heißt *spitz*, wenn er folgende äquivalente Bedingungen erfüllt:

- 1) C enthält keine Gerade;
- 2) $\text{Kamm } C = \mathfrak{o}$;
- 3) \mathfrak{o} ist Seite von C ;
- 4) es gibt ein $u \in C^\vee$ mit $u^\perp \cap C = \mathfrak{o}$;
- 5) $\dim C^\vee = n$;
- 6) $\text{lin } C^\vee = V^*$.

Beweis Die Eigenschaften 1) bis 4) sind ersichtlich gleichwertig, ebenso 5) und 6). Es genügt also, die Äquivalenz von 2) und 5) aufzuzeigen. In 1.24 2) werden wir für $D \prec C$ $\dim D + \dim(C^\vee \cap D^\perp) = \dim V$ beweisen. Mit $D := \text{Kamm } C$ ist $C^\vee \cap D^\perp = C^\vee$, also gilt $\dim \text{Kamm } C + \dim C^\vee = n$. Daraus folgt die Behauptung. ■

Es ist bisweilen nützlich, Aussagen über Seiten auf solche über die Nullseite reduzieren zu können:

Aufgabe 1.7 Es seien $C \in \mathfrak{K}_p(V)$ und $D \prec C$. Für die Projektion $\pi: V \rightarrow \overline{V} := V/\text{lin } D$ zeige man:

- i) $\overline{C} := \pi(C) \in \mathfrak{K}_p(\overline{V})$;
- ii) es gibt eine inklusionserhaltende Bijektion zwischen $\mathfrak{S}(\overline{C})$ und

$$\text{Stern}(D) := \{A \in \mathfrak{S}(C); D \prec A\}$$

(für Aufgabe 1.8).

Aufgabe 1.8 Für die Seite D des spitzen Kegels $C \in \mathfrak{K}_p(V)$ zeige man:

$$(C^\vee \cap D^\perp)^\perp = \text{lin } D, \quad (C^\vee \cap D^\perp)^\vee = C + \text{lin } D$$

(für 1.23).

Wir kommen noch einmal auf die Darstellung (1.10.1) zurück, wobei wir in 1.13 gesehen haben, daß ein endlicher Durchschnitt ausreicht. Durch Einschränkung auf $\text{lin } C$ sieht man, daß man sich immer auf folgende Situation zurückziehen kann, die für explizite Berechnungen wichtig ist:

1.22 Bemerkung Es sei C ein n -dimensionaler polyedrischer Kegel; jeder seiner Facetten F ordne man einen „Stützvektor“ $u_F \in C^\vee$ zu, i.e., man fixiere eine Menge

$$\mathfrak{B} = \{u_F \in C^\vee; F = C \cap u_F^\perp, F \prec_1 C\}.$$

Dann gelten

$$C = \bigcap_{u_F \in \mathfrak{B}} u_F^\vee \quad \text{und} \quad C^\vee = \text{keg}(\{u_F \in \mathfrak{B}\}).$$

Beweis Die Inklusion „ \subset “ der ersten Gleichung gilt trivialerweise. Falls die Umkehrung „ \supset “ falsch ist, so existiert ein $x \in (\bigcap u_F^\vee) \setminus C$. Man fixiere ein $y \in C^\circ$; da C° in V offen ist, gibt es ein $t \in I^\circ$, für das $w := (1-t)x + ty$ in ∂C und damit nach 1.19 3) in einer Facette F liegt. Also folgt $\langle w, u_F \rangle = 0$, obwohl $\langle y, u_F \rangle > 0$ und $\langle x, u_F \rangle \geq 0$ gilt. Die zweite Gleichung folgt damit aus (1.15.2). ■

Aufgabe 1.9 Es sei $C \in \mathfrak{K}_p(V)$ spitz, volldimensional und von r Elementen erzeugt. Man zeige:

- i) Man benötigt höchstens $\binom{r}{n-1}$ Vektoren, um C^\vee zu erzeugen.
- ii) Im allgemeinen besitzt C^\vee kein Erzeugendensystem aus r Elementen.

Wie man Seiten D von C durch eine Linearform ausschneiden kann, läßt sich dual mit einer richtig gewählten Linearform (zur Bedeutung von $C^\vee \cap D^\perp$ als zu D duale Seite in $\mathfrak{S}(C^\vee)$ vgl. 1.24) D^\vee aus C^\vee generieren:

1.23 Satz Ist D Seite eines Kegels $C \in \mathfrak{K}_p(V)$, so gilt:

- 1) $u \in C^\vee$ und $D = C \cap u^\perp \iff u \in (C^\vee \cap D^\perp)^\circ$;
- 2) Für $u \in (C^\vee \cap D^\perp)^\circ$ ist

$$D^\vee = C^\vee + \mathbb{R}_{\geq 0}(-u) = C^\vee - \text{keg}(u).$$

Beweis Ist zunächst $u \in (C^\vee \cap D^\perp)^\circ$, so folgt aus 1.16

$$(1.23.1) \quad (C^\vee \cap D^\perp)^\vee \cap u^\perp = (C^\vee \cap D^\perp)^\perp$$

und daher mit Aufgabe 1.8 wegen $(C + \text{lin } D) = (C^\vee \cap D^\perp)^\vee$

$$(1.23.2) \quad (C + \text{lin } D) \cap u^\perp = \text{lin } D.$$

Ersichtlich impliziert dies die Richtung „ \Leftarrow “ aus 1):

$$(1.23.3) \quad D \subset C \cap u^\perp \subset C \cap \text{lin } D = D.$$

Wenden wir (1.9.1) auf (1.23.3) an, so ergibt sich 2):

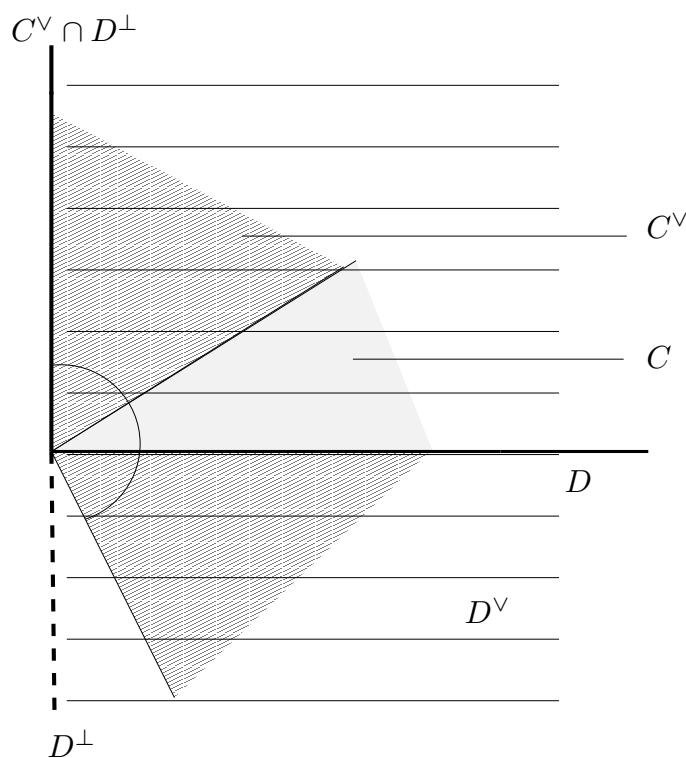
$$D^\vee = C^\vee + u^{\perp\vee} = C^\vee + \text{lin } u = C^\vee + \text{keg}(-u).$$

Läge in 1) $u \in C^\vee$ mit $D = C \cap u^\perp$ in $\partial(C^\vee \cap u^\perp)$, so wären die Gleichheitszeichen in (1.23.1) und (1.23.2) durch \supseteq zu ersetzen; aus (1.23.2) folgte wegen $\text{lin } D = D - D$ also

$$D - D \subsetneq (C - D) \cap u^\perp.$$

Es sei $s - t \in u^\perp$ mit $s \in C$ und $t \in D \subset u^\perp$; da u^\perp ein Untervektorraum von V ist, folgt $s = (s - t) + t \in u^\perp$ und damit $s \in D = C \cap u^\perp$, also kann die Inklusion nicht echt gewesen sein. ■

Wir haben in 1.15 gezeigt, daß die Zuordnung $\mathfrak{K}_p(V) \rightarrow \mathfrak{K}_p(V^*)$, $C \mapsto C^\vee$ einen Isomorphismus von Verbänden definiert. Dieser respektiert aber nicht die Seitenbeziehung, wie folgendes einfache zweidimensionale Beispiel zeigt (vgl Figur 1.3):



FIGUR 1.3 Dualisieren und Seitenbeziehung

Für den Verband $\mathfrak{S}(C)$ sieht daher die richtige Dualisierung anders aus:

1.24 Orthogonalitätssatz Für $C \in \mathfrak{K}_p(V)$ gilt:

1) Die Abbildung

$$\mathfrak{S}(C) \rightarrow \mathfrak{S}(C^\vee), \quad D \mapsto C^\vee \cap D^\perp$$

auf die jeweils „orthogonale Seite“ ist ein (involutorischer) ordnungsumkehrender Isomorphismus von Verbänden.

$$2) \dim D + \dim(C^\vee \cap D^\perp) = \dim V.$$

Beweis 1) Zunächst ist zu zeigen, daß $C^\vee \cap D^\perp$ tatsächlich eine Seite von C^\vee ist. Entsprechend dem Kriterium 1.19 0) weisen wir nach:

$$\text{Aus } x, y \in C^\vee \text{ und } x + y \in C^\vee \cap D^\perp \text{ folgt } x, y \in C^\vee \cap D^\perp :$$

Ist etwa $x \notin D^\perp$, so existiert ein $t \in D$ mit $x(t) > 0$ und daher $y(t) = -x(t) < 0$, obwohl t in C und y in C^\vee liegt. — Als nächstes ist die offensichtlich ordnungsumkehrende Abbildung in 1) injektiv: Es sei $C^\vee \cap D^\perp = C^\vee \cap D_1^\perp$; für jedes $u \in (C^\vee \cap D^\perp)^\circ$ gilt $D^\vee = C^\vee - \text{keg}(u) = D_1^\vee$ nach 1.23 2) und damit $D = D_1$ gemäß 1.8. Da $\mathfrak{S}(C)$ und $\mathfrak{S}(C^\vee)$ nach 1.19 endlich sind und $C = C^{\vee\vee}$ gilt, haben beide Verbände gleich viele Elemente, und die fragliche Abbildung ist bijektiv. Dies impliziert dann, daß ein Isomorphismus (endlicher) Verbände vorliegt.

2) Die Dimensionsformel folgt mit 1) aus 1.20 1). ■

Es ist bisweilen praktisch, Kegel als direkte Summen von Teilkegeln schreiben zu können. Dabei verwenden wir folgende Notation: Sind $C = \text{keg}(v_1, \dots, v_m) \in \mathfrak{K}_p(V)$ und $C' = \text{keg}(v'_1, \dots, v'_r) \in \mathfrak{K}_p(V')$, so heißt

$$C \oplus C' := \text{keg}(\{v_i + v'_j; i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, r\}) \in \mathfrak{K}_p(V \oplus V')$$

die direkte Summe von C und C' .

Stets ist es auf diese Weise möglich, Kegel auf spitze Kegel zu reduzieren:

1.25 Bemerkung Es sei $C \in \mathfrak{K}_p(V)$. Jeder Zerlegung $V \cong V' \oplus \text{Kamm } C \oplus \mathbb{R}^m$ mit $m := n - \dim C$ entspricht eindeutig eine Zerlegung $C = C' \oplus \text{Kamm } C \oplus \mathfrak{o}$ mit einem spitzen Kegel $C' \in \mathfrak{K}_p(V')$. ■

Wir betrachten nun einige elementare Beispiele niederdimensionaler Kegel in V und deren Dualkegel in V^* ; angesichts der Bemerkung 1.25 werden wir nur *spitze Kegel* analysieren:

1.26 Beispiele In $V = \mathbb{R}^n$ mit Basis (e_1, \dots, e_n) bezeichne $C_{i_1 \dots i_r} := \text{keg}(v_{i_1}, \dots, v_{i_r})$. Die duale Basis (e_1^*, \dots, e_n^*) von V^* werde mit (f_1, \dots, f_n) abgekürzt.

n=0 Der einzige Kegel ist der Nullkegel \mathfrak{o} .

n=1 Bis auf Isomorphie ist $C_1 = \text{keg}(e_1)$ der einzige eindimensionale Kegel. Dabei ist $C_1^\vee = \text{keg}(f_1)$.

n=2 Typische Kegel sind folgende C_{ij} mit $m \in \mathbb{N}_{>0}$ und

$$v_1 := e_2, v_2 := me_1 - e_2, v_3 := -e_1.$$

Für sie gilt:

$$C_1^\vee = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0}, C_2^\vee = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2; m\alpha \geq \beta\}, C_3^\vee = \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}.$$

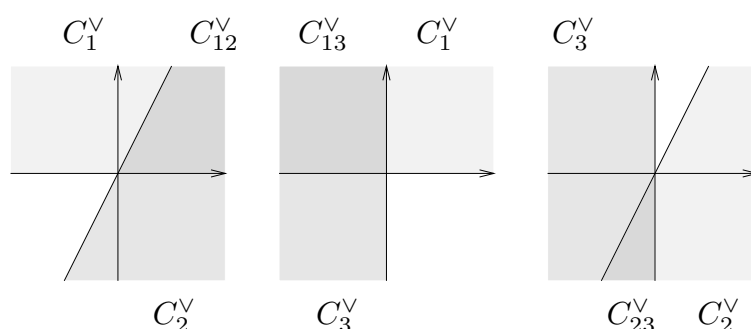
Aus der Beziehung (1.9.1)

$$C_{ij}^\vee = (C_i + C_j)^\vee = C_i^\vee \cap C_j^\vee$$

folgt daher

$$C_{12}^\vee = \text{keg}(f_1, f_1 + mf_2), \quad C_{13}^\vee = \text{keg}(-f_1, f_2), \quad C_{23}^\vee = \text{keg}(-f_2, -f_1 - mf_2).$$

In der Figur 1.4 ist $m = 2$ gewählt, was später geometrisch zum quadratischen Kegel der algebraischen Geometrie führen wird.



FIGUR 1.4 C_{ij}^\vee für $n = 2$

n=3 Es seien $v_1 := e_1, v_2 := e_2, v_3 := -(e_1 + e_3), v_4 := -(e_2 + e_3)$. In V^* ergibt sich:

$$C_1^\vee = \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^2, \quad C_2^\vee = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}, \quad C_3^\vee = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3; \alpha + \gamma \leq 0\},$$

$$C_4^\vee = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3; \beta + \gamma \leq 0\}.$$

Damit erhalten wir wieder gemäß (1.9.1) folgenden dreidimensionalen Kegel:

$$\begin{aligned} C_{1234}^\vee &= \left\{ \sum_{i=1}^3 \alpha_i f_i \in \mathbb{R}^3; \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, \alpha_1 + \alpha_3 \leq 0, \alpha_2 + \alpha_3 \leq 0 \right\} \\ &= \text{keg}(-f_3, f_1 - f_3, f_2 - f_3, f_1 + f_2 - f_3), \end{aligned}$$

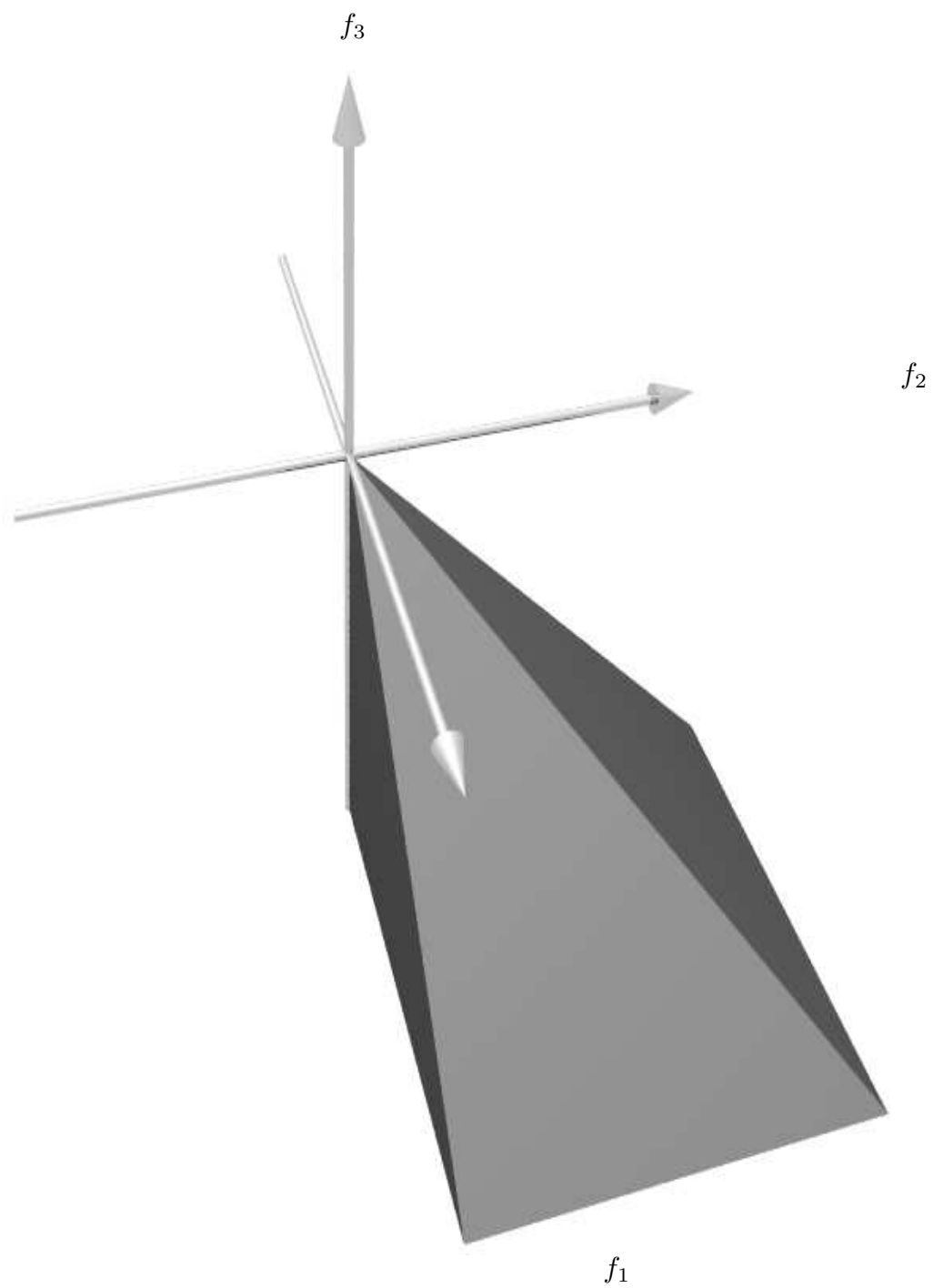
wobei für die zweite Gleichung die Inklusion „ \supset “ evident ist; die umgekehrte ergibt sich wie folgt: Hat $\xi \in C_{1234}^\vee$ etwa die Koordinaten $(\alpha, \beta, -\gamma)$ und ist (wegen der Symmetrie in α_1 und α_2) ohne Einschränkung $\beta \geq \alpha$ und damit $\gamma \geq \beta \geq \alpha \geq 0$, so läßt sich ξ als $(\alpha, \alpha + \delta, -\alpha - \delta - \varepsilon)$ mit $\delta, \varepsilon \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ schreiben und damit in der Form

$$\xi = (\alpha, \alpha, -\alpha) + (0, \delta, -\delta) + (0, 0, -\varepsilon). \quad \blacksquare$$

Aufgabe 1.10 In den Bezeichnungen von 1.26 mit $n = 3$ sei noch $v_5 := e_3 - 2(e_1 + e_2)$. Man zeige, daß die Kegel

$$C_{125}, C_{235}, C_{345}, C_{451}, C_{1234}$$

eine Überdeckung von V bilden, und berechne die Dualkegel C_{ijk}^\vee .

FIGUR 1.5 C_{1234}^\vee für $n = 3$

2. Gitterkegel

In diesem Paragraphen kommen wir schließlich zu den Gitterkegeln im n -dimensionalen reellen Vektorraum V und damit zu den uns eigentlich interessierenden Kegeln.

Es sei nun N ein *Gitter* in V , i.e., eine freie abelsche Untergruppe von $(V, +)$ vom Rang n mit einer Basis (e_1, \dots, e_n) , und

$$M := \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$$

sei das duale Gitter mit der dualen Basis $(f_1, \dots, f_n) := (e_1^*, \dots, e_n^*)$. Dann gelten

$$V \cong N_{\mathbb{R}} := N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \quad \text{und} \quad V^* \cong M_{\mathbb{R}} := M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}.$$

Der erste Isomorphismus legt eine Basis in V fest, die wir wieder mit (e_1, \dots, e_n) bezeichnen; entsprechendes gilt für V^* . Insbesondere ist damit $N = \mathbb{Z}^n \subset V$. Für die nun einzuführenden Kegel werden wir stets kleine griechische Buchstaben verwenden.

2.1 Definition *Ein Kegel σ in V heißt N -rationaler Kegel oder rationaler polyedrischer Kegel, wenn Elemente $v_1, \dots, v_r \in N$ existieren mit $\sigma = \text{keg}(v_1, \dots, v_r)$.*

Bei Bedarf kann man dabei annehmen, daß jedes v_i ein „primitiver Vektor in N “ ist, i.e., daß er nicht ganzzahliges Vielfaches eines kürzeren Vektors in N ist. — Die Bezeichnung „rationaler“ polyedrischer Kegel läßt sich wie folgt motivieren: Statt im Vektorraum $N_{\mathbb{R}}$ hätten wir die Theorie polyedrischer Kegel auch im rationalen Vektorraum $N_{\mathbb{Q}}$ aufbauen und dann die so entstandenen Kegel in der Koeffizientenerweiterung $N_{\mathbb{R}} = N_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ betrachten können. Die so erhaltenen Kegel sind genau die N -rationalen Kegel in $N_{\mathbb{R}}$. Insbesondere hat für einen N -rationalen Kegel σ jedes $v \in \sigma \cap N_{\mathbb{Q}}$ eine Darstellung der Form

$$(2.1.1) \quad v = \sum_{i=1}^r \lambda_i v_i \quad \text{mit} \quad \lambda_i \in \mathbb{Q}_{\geq 0}.$$

Wir werden später fast ausschließlich *spitze* N -rationale Kegel betrachten, für die wir die abkürzende Bezeichnung „ N -Kegel“ verwenden. Wir bringen zunächst einige besonders wichtige Beispiele solcher N -Kegel:

2.2 Definition Ein N -Kegel $\sigma = \text{keg}(v_1, \dots, v_r)$ heißt

- 1) *simplicial*, wenn v_1, \dots, v_r linear unabhängig wählbar sind;
- 2) *regulär*, wenn v_1, \dots, v_r zu einem System v_1, \dots, v_n primitiver Gittervektoren mit $\det(v_1, \dots, v_n) = \pm 1$ ergänzt werden kann.

2.3 Beispiele 1) Jeder höchstens eindimensionale N -Kegel ist regulär.

- 2) Zweidimensionale N -Kegel sind simplicial, $\text{keg}(e_1, e_2)$ ist regulär, $\text{keg}(e_1 + e_2, e_1 - e_2)$ dagegen nicht, denn es ist $\det(e_1 + e_2, e_1 - e_2) = -2$.
- 3) Jeder Kegel der Form $\text{keg}(e_1, \dots, e_m)$ für ein m mit $0 \leq m \leq n$ ist ein N -Kegel.
- 4) Der Kegel C_{1234} im \mathbb{R}^3 aus 1.26 ist sozusagen der kleinste nicht simpliciale Kegel.

Für jeden simplicialen Kegel $\text{keg}(v_1, \dots, v_r)$ ist die Menge $\{v_1, \dots, v_r\}$ affin linear unabhängig, also definitionsgemäß $\text{konv}(v_1, \dots, v_r)$ ein „ $(r - 1)$ -Simplex“.

Die regulären Kegel werden später zu regulären affinen torischen Varietäten führen, vgl. 6.5, während die simplicialen Kegel, die man auch *\mathbb{Q} -reguläre Kegel* nennen könnte, in der Sprache der algebraischen Topologie \mathbb{Q} -Homologiemannigfaltigkeiten liefern.

Aufgabe 2.1 Man zeige für einen n -dimensionalen N -Kegel $\sigma = \text{keg}(v_1, \dots, v_n)$ mit primitiven $v_i \in N$ die Äquivalenz folgender Aussagen:

- i) σ ist regulär.
- ii) Jeder Gitterpunkt aus N ist über \mathbb{Z} aus v_1, \dots, v_n linear kombinierbar.
- iii) Jeder Punkt aus $\sigma \cap N$ ist über \mathbb{N} aus v_1, \dots, v_n linear kombinierbar.
- iv) Es gibt eine unimodulare lineare Transformation (also eine zu einer Matrix aus $\text{GL}(n, \mathbb{Z})$) von V , die (v_1, \dots, v_n) in die kanonische Basis (e_1, \dots, e_n) abbildet.

Entscheidend für unsere späteren Anwendungen von N -Kegeln ist, daß die wesentlichen Permanenzeigenschaften von polyedrischen Kegeln erhalten bleiben: Zunächst ist nach 1.19 1) jede Seite eines N -Kegels wieder ein N -Kegel, also bilden die Menge der N -rationalen Kegel in V sowie die Menge $\mathfrak{K}_N(V)$ der N -Kegel in V Unterverbände von $\mathfrak{K}_p(V)$.

Des weiteren ist die Zerlegung 1.25 gitterverträglich durchführbar:

2.4 Bemerkung Der Kegel σ sei N -rational. Der Zerlegung $V \cong V' \oplus \text{Kamm } \sigma \oplus \mathbb{R}^m$ mit $m := n - \dim \sigma$ aus 1.25 entsprechen eine Gitterzerlegung $N = N' \oplus N_1 \oplus N_0$ und eine Zerlegung $\sigma = \sigma' \oplus \text{Kamm } \sigma \oplus \mathfrak{o}$, in der σ' ein N' -Kegel ist.

Beweis Die erforderlichen Zerlegungen von N folgen aus 2.20; damit ergibt sich der Rest unmittelbar aus Zerlegungen folgenden Typs für σ :

- a) $\sigma = \sigma_1 \oplus \mathfrak{o}$, wobei $\sigma_1 = \sigma \cap \text{lin } \sigma$ in $\text{lin } \sigma$ volldimensional ist;
- b) $\sigma_1 = \sigma' \oplus \text{Kamm } \sigma_1$ mit einem spitzen N' -Kegel σ' . ■

2.5 Zerlegungsprinzip *Es sei σ ein N -Kegel in V von der Form $\sigma = \sigma_1 \oplus \sigma_2 \oplus \mathfrak{o}$. Dann existieren Zerlegungen*

$$(V, N, \sigma) \cong (\text{lin } \sigma_1 \times \text{lin } \sigma_2 \times \mathbb{R}^{n-p}, N_1 \oplus N_2 \oplus N_0, \sigma_1 \oplus \sigma_2 \oplus \mathfrak{o})$$

$$(V^*, M, \sigma^\vee) \cong ((\text{lin } \sigma_1)^* \times (\text{lin } \sigma_2)^* \times (\mathbb{R}^{n-p})^*, M_1 \oplus M_2 \oplus M_0, \sigma_1^\vee \oplus \sigma_2^\vee \oplus (\mathbb{R}^{n-p})^*)$$

mit $N_i = N \cap \text{lin } \sigma_i$ für $i = 1, 2$, wobei σ_i^\vee in $(\text{lin } \sigma_i)^*$ gebildet wird.

Beweis Nach 2.20 gibt es eine Gitterzerlegung $N = N_1 \oplus N_2 \oplus N_0$. Damit ergeben sich die zugehörigen Zerlegungen unmittelbar. ■

Grundlegend für unsere Anwendungen von N -Kegeln ist auch, daß diese Begriffsbildung mit der Dualisierung verträglich ist:

2.6 Satz *Ein Kegel σ ist genau dann N -rational, wenn σ^\vee ein M -rationaler Kegel ist.*

Beweis Auf Grund des Dualitätssatzes 1.8 reicht es aus, eine Richtung zu zeigen. Nach dem Zerlegungsprinzip 2.5 dürfen wir annehmen, daß σ volldimensional ist. Wie in 1.22 wählen wir $\mathfrak{B} \subset \sigma^\vee$ so, daß $\sigma = \bigcap_{u \in \mathfrak{B}} u^\vee$ ist. Gemäß Aufgabe 1.6 kommt dabei ohne Einschränkung jedes u von einer rationalen Linearform und liegt damit (nach Multiplikation mit dem Hauptnenner) ohne Einschränkung sogar in M . Aus 1.9 2) folgt

$$\sigma^\vee = \sum_{u \in \mathfrak{B}} u^{\vee\vee} = \text{keg}(u; u \in \mathfrak{B}). \blacksquare$$

Jedem N -rationalen Kegel σ entspricht eine kommutative Halbgruppe

$$S_\sigma := M \cap \sigma^\vee$$

mit neutralem Element 0. Sie wird die entscheidende Brücke von der Konvexgeometrie in die Algebra, von der aus wir dann in die algebraische Geometrie überwechseln werden.

Kommen wir auf unsere elementaren Beispiele zurück:

2.7 Beispiel Für $N := \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ geben wir für die in 1.26 eingeführten Kegel $\sigma_i := C_i$ minimale Erzeugendensysteme (u_1, \dots, u_r) der Halbgruppen $S_{i_1 \dots i_r} := S_{\sigma_{i_1 \dots i_r}}$ über \mathbb{N} an; dabei bezeichnen wir die zur Standardbasis duale in V^* wieder mit (f_1, \dots, f_n) :

n = 1 $S_1 = \mathbb{N}(f_1).$

n = 2 $S_1 = \mathbb{N}(\pm f_1, f_2), S_2 = \mathbb{N}(\pm(f_1 + m f_2), -f_2), S_3 = \mathbb{N}(-f_1, \pm f_2), S_{12} = \mathbb{N}(f_1 + j f_2, j = 0, \dots, m), S_{13} = \mathbb{N}(-f_1, f_2), S_{23} = \mathbb{N}(-f_2, -f_1 - m f_2).$

n = 3 $S_1 = \mathbb{N}(f_1, \pm f_2, \pm f_3), S_2 = \mathbb{N}(\pm f_1, f_2, \pm f_3),$
 $S_3 = \mathbb{N}(\pm f_2, \pm(f_1 - f_3), -f_3), S_4 = \mathbb{N}(\pm f_1, \pm((f_2 - f_3), -f_3)$
 $S_{1234} = \mathbb{N}(-f_3, f_1 - f_3, f_2 - f_3, f_1 + f_2 - f_3). \blacksquare$

Aufgabe 2.2 In den Bezeichnungen von Aufgabe 1.10 mit $n = 3$ bestimme man minimale Erzeugendensysteme E_{ij5} über \mathbb{N} für S_{ij5} .

Zum M -Kegel σ^\vee gibt es einen Gitterisomorphismus $\varphi: M \rightarrow \mathbb{Z}^n$ mit $\varphi(\sigma^\vee) \subset \mathbb{N}^n$; für einen konstruktiven Beweis sei auf die Hermitesche Normalform zur Matrix der primitiven Kantenvektoren von σ^\vee verwiesen, vgl. [AdWei, 5.2]. Damit subsumiert sich die Bestimmung einer Hilbertbasis von S_σ (s.u.) auf die minimaler Lösungen linearer diophantischer Gleichungen und Ungleichungen, wobei letztere durch Einführung neuer Variablen in Gleichungen überführbar sind.

Wir erhalten folgende Verschärfung von 1.23:

2.8 Satz *Ist τ Seite eines N -rationalen Kegels σ in V , so ist die Menge $M \cap (\sigma^\vee \cap \tau^\perp)^\circ$ nicht leer. Für jedes $u \in M \cap (\sigma^\vee \cap \tau^\perp)^\circ$ gilt:*

$$S_\tau = S_\sigma + \mathbb{N} \cdot (-u).$$

Beweis Mit $\sigma^\vee \cap \tau^\perp$ ist auch das (relative) Innere $(\sigma^\vee \cap \tau^\perp)^\circ$ nicht leer. Es enthält einen Punkt mit M -rationalen Koordinaten; Multiplikation mit dem Hauptnenner aller Komponenten liefert ein $u \in M \cap (\sigma^\vee \cap \tau^\perp)^\circ$. — Aus 1.23 folgt nun für $u \in M \cap (\sigma^\vee \cap \tau^\perp)^\circ$ die Beziehung $\tau^\vee = \sigma^\vee + \mathbb{R}_{\geq 0}(-u)$ und damit zunächst die Inklusion

$$S_\tau = M \cap \tau^\vee = M \cap (\sigma^\vee + \mathbb{R}_{\geq 0}(-u)) \supset M \cap \sigma^\vee + M \cap (\mathbb{N} \cdot (-u)) = S_\sigma + \mathbb{N} \cdot (-u).$$

Ist umgekehrt $w \in S_\tau$, so reicht es, ein $p \in \mathbb{N}$ mit $w + pu \in S_\sigma$ finden, denn dann folgt:

$$w = (w + pu) + p(-u) \in S_\sigma + \mathbb{N} \cdot (-u).$$

Dazu wählen wir nach 1.23 zunächst eine Darstellung $w = s - \lambda u$ mit $s \in \sigma^\vee, \lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$; damit folgt $s = w + \lambda u = w + ([\lambda] + t)u \in \sigma^\vee$ mit einem $0 \leq t < 1$; wegen $(1-t)u \in \sigma^\vee$ ist auch $s + (1-t)u \in \sigma^\vee$, also kann man $p := [\lambda] + 1$ wählen. ■

Wir betrachten wieder unsere elementaren Beispiele:

2.9 Beispiel Für $N := \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ gilt in den Bezeichnungen von 2.7:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} = 1 & \quad S_\circ = S_1 + \mathbb{N} \cdot (-f_1) \\ \mathbf{n} = 2 & \quad S_1 = S_{12} + \mathbb{N} \cdot (-f_1) = S_{13} + \mathbb{N} \cdot (f_1) \\ & \quad S_2 = S_{12} + \mathbb{N} \cdot (-(f_1 + mf_2)) = S_{23} + \mathbb{N} \cdot (f_1 + mf_2) \\ & \quad S_3 = S_{13} + \mathbb{N} \cdot (-f_2) = S_{23} + \mathbb{N} \cdot (f_2) \\ \mathbf{n} = 3 & \quad S_1 = S_{1234} + \mathbb{N} \cdot (-(f_2 - 2f_3)) \\ & \quad S_2 = S_{1234} + \mathbb{N} \cdot (-(f_1 - 2f_3)) \\ & \quad S_3 = S_{1234} + \mathbb{N} \cdot (-(2f_1 + f_2 - 2f_3)) \\ & \quad S_4 = S_{1234} + \mathbb{N} \cdot (-(f_1 + 2f_2 - 2f_3)) \end{aligned}$$

Aufgabe 2.3 In den Bezeichnungen von 2.9 bestimme man für $n = 3$ Elemente u_{ijk} mit $S_{ijk} = S_{1234} + \mathbb{N}(-u_{ijk})$.

Daß für N -Kegel σ der Übergang $\sigma \mapsto S_\sigma$ von so grundlegender Bedeutung für den Übergang in die algebraische Geometrie ist, liegt an dem folgenden Endlichkeitssatz; für die Definition affin algebraischer Varietäten werden wir nämlich in § 3 die von S_σ erzeugte komplexe Algebra verwenden.

2.10 Lemma von Gordan *Ist σ ein N -Kegel, so ist die additive Halbgruppe S_σ endlich erzeugt.*

Beweis Nach 2.6 ist σ^\vee von der Form $\sigma^\vee = \text{keg}(u_1, \dots, u_r)$ mit primitiven $u_j \in S_\sigma$. Bezeichnet

$$F_\sigma := \left\{ \sum_{i=1}^r t_i u_i ; t_i \in I \right\}$$

einen kompakten „Fundamentalebene“, so ist die Menge $E_\sigma := F_\sigma \cap M$ ein offensichtlich endliches Erzeugendensystem von S_σ : Jedes $u \in S_\sigma$ läßt sich mit geeigneten $a_i \in \mathbb{N}$ und $t_i \in [0, 1[$ in der Form

$$u = \sum_{i=1}^r (a_i + t_i) u_i = \sum_{i=1}^r a_i u_i + \sum_{i=1}^r t_i u_i$$

schreiben; da die u_i in E_σ liegen, genügt es, $w := \sum t_i u_i \in E_\sigma$ zu zeigen. Ersichtlich liegt w in $\text{keg}(u_1, \dots, u_r)$; da M eine Gruppe ist, enthält es $w = u - \sum_{i=1}^r a_i u_i$. ■

Man nennt ein Erzeugendensystem minimaler Länge eines endlich erzeugten Untermonoids S von M eine „Hilbertbasis von S “. Die im Beweis von 2.10 betrachtete Menge E_σ ist allerdings keine Hilbertbasis, da sie nicht minimal ist. Denn alle echten Summen, in denen alle t_i den Wert 1 haben, sind ersichtlich redundant.

Aufgabe 2.4 Man zeige, daß für einen N -Kegel σ die Hilbertbasis von S_σ eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe 2.5 Für $n = 2$ und die Basis (f_1, f_2) von V^* zeige man: Ist $\sigma^\vee := \text{keg}(f_1, f_1 + r f_2)$ für ein $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, so ist $\sigma^\vee \cap M$ nicht endlich erzeugt und damit $\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M]$ nicht noethersch.

Zwei N -rationale Kegel, deren Schnitt eine gemeinsame echte Seite ist, lassen sich durch eine Hyperebene „trennen“; die im folgenden Satz unter 2) aufgeführte unmittelbare Konsequenz liefert später, daß sich beim Verheften affiner torischer Varietäten zu allgemeinen torischen Prävarietäten (separierte) Varietäten ergeben:

2.11 Separationssatz *Sind σ', σ zwei N -rationale Kegel, deren Schnitt eine gemeinsame echte Seite τ ist, so gilt:*

- 1) *Es gibt ein $u \in S_\sigma \cap S_{-\sigma'}$ mit $\tau = \sigma \cap u^\perp = \sigma' \cap u^\perp$.*
- 2) *$S_\tau = S_\sigma + S'_{-\sigma'}$.*

Beweis 1) Zunächst gilt $S_{\sigma-\sigma'} \subset S_\sigma \cap S_{-\sigma'}$. Wenn $\text{lin } \tau = \text{Kamm}(\sigma - \sigma')$ gilt, so wähle man zur Seite $\text{Kamm}(\sigma - \sigma')$ von $\sigma - \sigma'$ gemäß 1.23 1) und 2.8 ein

$$u \in ((\sigma - \sigma')^\vee \cap \text{Kamm}(\sigma - \sigma')^\perp)^\circ \cap M$$

mit

$$u^\perp \cap (\sigma - \sigma') = \text{Kamm}(\sigma - \sigma') \quad (= u^\perp \cap (\sigma' - \sigma)).$$

Dann folgt — und analog erhält man $\tau = \sigma' \cap u^\perp$:

$$\tau = \sigma \cap \text{lin } \tau = \sigma \cap \text{Kamm}(\sigma - \sigma') = \sigma \cap (\sigma - \sigma') \cap u^\perp = \sigma \cap u^\perp.$$

Es genügt also zu zeigen, daß die Vektorräume

$$\operatorname{lin} \tau = (\sigma' \cap \sigma) - (\sigma' \cap \sigma) \subset (\sigma - \sigma') \cap (\sigma' - \sigma) = \operatorname{Kamm}(\sigma - \sigma')$$

gleich sind: Zerlegen wir $z \in \operatorname{Kamm}(\sigma - \sigma')$ entsprechend als $z = s_1 - s'_1 = s'_2 - s_2$, so ist $s_1 + s_2 = s'_1 + s'_2 \in \sigma \cap \sigma' = \tau$, also sind $s_1, s'_1 \in \tau$ nach 1.19 0), d.h. $z \in \operatorname{lin} \tau$.

2) Für ein u wie in 1) gilt nach 2.8

$$S_\tau = S_\sigma + \mathbb{N} \cdot (-u) \subset S_\sigma + S'_\sigma.$$

Die umgekehrte Inklusion ist trivial, da S_σ und $S_{-\sigma'}$ Unterhalbgruppen von S_τ sind. ■

Die folgende Eigenschaft garantiert zunächst in 3.2 die Normalität torischer Varietäten. Einige Autoren (vgl. etwa [He], ...) betrachten auch nicht saturierte Unterhalbgruppen und damit „nicht normale torische Varietäten“; wir gehen darauf jedoch nicht näher ein. Die zweite Eigenschaft gewährleistet, daß die einem N -Kegel zugeordnete torische Varietät die komplexe Dimension $\dim_{\mathbb{R}} V$ hat:

2.12 Definition Eine Unterhalbgruppe S von M heißt

saturiert, wenn aus $m \in M$, $p \in \mathbb{N}$ und $pm \in S$ stets $m \in S$ folgt;

erzeugend, wenn $M = S - S$ gilt, also M die von S erzeugte Gruppe ist.

2.13 Bemerkung Eine endlich erzeugte Unterhalbgruppe S von M ist genau dann saturiert und erzeugend, wenn ein N -Kegel σ mit $S = S_\sigma$ existiert.

Beweis Für einen N -Kegel σ ist S_σ ersichtlich saturiert. Außerdem enthält σ^\vee nach 1.21 6) eine Vektorraumbasis u_1, \dots, u_r von V^* , die einen Unterkegel γ von σ^\vee erzeugt. Jedes $m \in M$ ist eine reelle Linearkombination $m = \sum \lambda_i u_i$, andererseits findet man ein $m' \in \gamma \cap M$ mit $m + m' \in \gamma$. Insgesamt gilt $m', m + m' \in S_\sigma$ und damit auch $m = (m + m') - m' \in S_\sigma - S_\sigma$. Also folgt $M \subset S_\sigma - S_\sigma \subset M$.

Umgekehrt sei S eine erzeugende saturierte Unterhalbgruppe von M mit erzeugenden Elementen m_1, \dots, m_r . Es bezeichne σ den dualen Kegel von $\sigma^\vee := \operatorname{keg}(m_1, \dots, m_r)$ in V^* . Aus $M = S - S \subset \sigma^\vee - \sigma^\vee = V^*$ folgt nach 1.21, daß σ spitz ist. Ersichtlich liegt mit m_1, \dots, m_r auch S in $S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$. Umgekehrt hat jedes $m \in S_\sigma$ gemäß (2.1.1) eine Darstellung $m = \sum \lambda_i m_i$ mit $\lambda_i \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$. Für genügend großes $q \in \mathbb{N}_{>0}$ sind alle $q\lambda_i \in \mathbb{N}$, also ist $qm = \sum (q\lambda_i)m_i$ in S und damit auch m , weil S saturiert ist. ■

Aufgabe 2.6 Die saturierte Unterhalbgruppe S von M werde von s_1, \dots, s_r erzeugt. Man zeige, daß S genau dann erzeugend ist, wenn $M = S - \mathbb{N} \cdot \sum_{j=1}^r s_j$ gilt.

Nun soll die genaue Beziehung zwischen den N -Kegeln und den endlich erzeugten saturierten Unterhalbgruppen von M geklärt werden. Dazu verwenden wir eine kategoriale Sprechweise.

Wir wollen zunächst *Morphismen* von N -Kegeln einführen. Dazu eine Vorbemerkung: Jeder Gitterhomomorphismus $\varphi: N \rightarrow N'$ induziert kanonisch einen Vektorraumhomomorphismus $\varphi_{\mathbb{R}} := \varphi \otimes \text{id}_{\mathbb{R}}: N_{\mathbb{R}} \rightarrow N'_{\mathbb{R}}$, den wir meist ebenfalls mit dem Buchstaben φ bezeichnen. Weiter sei

$$|\sigma| := \{v \in \sigma\} \subset V$$

der „Träger von σ “; wenn das aus dem Zusammenhang unmißverständlich erscheint, schreiben wir auch einfach σ statt $|\sigma|$.

2.14 Definition Ist σ ein N -Kegel und σ' ein N' -Kegel, so ist ein Kegelmorphismus φ eine Abbildung $\varphi: (N, \sigma) \rightarrow (N', \sigma')$ mit folgenden Eigenschaften:

- 1) φ definiert einen Gitterhomomorphismus $N \rightarrow N'$;
- 2) $\varphi(|\sigma|) \subset |\sigma'|$.

Damit ist φ auf σ Einschränkung einer linearen Abbildung von Gruppen. Ferner ist φ genau dann ein Isomorphismus von Kegeln, wenn φ einen Gitterisomorphismus induziert und $\varphi(|\sigma|) = |\sigma'|$ gilt. Wir erinnern daran, daß ein Gitterisomorphismus eine unimodulare Abbildung, also durch eine Matrix aus $\text{GL}(n, \mathbb{Z})$ gegeben ist; diese hat damit die Determinante ± 1 .

2.15 Beispiel Sind $\sigma, \sigma' \in \mathfrak{K}_N(V)$ mit $\sigma' \subset \sigma$ und bezeichnet $j: \sigma' \rightarrow \sigma$ die Inklusionsabbildung, so ist

$$\varphi := (\text{id}_N, j): (N, \sigma') \rightarrow (N, \sigma)$$

ein Kegelmorphismus. Wir heben zwei Spezialfälle hervor:

- 1) „Seitenmorphismus“: Man betrachte den Fall $\sigma' \prec \sigma$.
- 2) Durch $v \in \sigma^\circ \cap N$ wird eine „Unterteilung von σ “ induziert: Jedem $\tau \prec_1 \sigma$ entspricht der $(\dim \sigma)$ -dimensionale Kegel $\tau_v := \text{keg}(v, \tau)$. Es gilt

$$|\sigma| = \bigcup_{\tau \prec_1 \sigma} |\tau_v|.$$

Mit den zugehörigen Inklusionen j_{τ_v} ergeben sich Kegelmorphismen

$$\varphi := (\text{id}_N, j_{\tau_v}): (N, \tau_v) \rightarrow (N, \sigma).$$

Man sieht unmittelbar:

2.16 Bemerkung Jeder Kegelmorphismus $\varphi: (N, \sigma) \rightarrow (N', \sigma')$ induziert auf funktioneller Weise einen Morphismus

$$\varphi^*: (M', (\mathbb{R}^{n'})^*) \rightarrow (M, (\mathbb{R}^n)^*) \quad \text{mit } m' \mapsto m' \circ \varphi$$

und damit Morphismen

$$\varphi^*: (M', \sigma'^{\vee}) \rightarrow (M, \sigma^{\vee}) \quad \text{sowie } S(\varphi) := \varphi^*: S_{\sigma'} \rightarrow S_{\sigma}. \blacksquare$$

Als nächstes betrachten wir saturierte endlich erzeugte erzeugende Unterhalbgruppen S von M . Ein *Morphismus von Unterhalbgruppen* $\psi: (M, S) \rightarrow (M, S')$ ist ein Gruppenhomomorphismus $\psi: M \rightarrow M'$ mit $\psi(S) \subset S'$; wir schreiben auch kurz $\psi: S \rightarrow S'$.

Damit haben wir die Klasse der spitzen Gitterkegel einerseits, die der endlich erzeugten saturierten erzeugenden Gitterhalbgruppen andererseits zu einer Kategorie gemacht.

2.17 Bemerkung Der Funktor

$$(N, \sigma) \rightarrow (N^*, S_\sigma), \quad \varphi \mapsto \varphi^*$$

zwischen der Kategorie der (spitzen) Gitterkegel und der Kategorie der endlich erzeugten saturierten erzeugenden Gitterhalbgruppen ist eine Äquivalenz von Kategorien.

Beweis Nach dem Lemma von Gordan ist S_σ endlich erzeugt, nach 2.13 sind damit die endlich erzeugten saturierten erzeugenden Gitterhalbgruppen genau die Bildelemente unter der Zuordnung. Diese ist offensichtlich funktoriell; eine Umkehrung wird durch

$$(M, S) \mapsto (M^*, \text{keg}(S)^\vee), \quad \psi \mapsto \psi^*$$

gegeben, denn es gilt wegen der Saturiertheit von S zunächst

$$(\text{keg}(S))^{\vee\vee} \cap M^{**} = \text{keg}(S) \cap M = S.$$

Ist $\psi: (M, S) \rightarrow (M', S')$ ein Morphismus, so bestimme man gemäß 2.13 spitze Gitterkegel σ und σ' mit $S = S_\sigma$ und $S' = S_{\sigma'}$. Sind m_1, \dots, m_r Erzeugende von S , so ist $\sigma^\vee = \text{keg}(m_1, \dots, m_r)$ sowie $\psi(\text{keg}(m_1, \dots, m_r)) = \psi(\text{keg}(\psi(m_1), \dots, \psi(m_r))) \subset \sigma'^\vee$ und damit $\psi^{**} = \psi$. ■

§ 2 Anhang: Der Elementarteilersatz

Ist V_0 Untervektorraum des Vektorraumes V , so existiert stets ein direktes Komplement $V_1 \subset V$, i.e., $V = V_0 \oplus V_1$. Dies gilt für abelsche Gruppen nicht allgemein, wie das Beispiel $\mathbb{Z} \cdot 2 \subset \mathbb{Z}$ zeigt. Dennoch gilt für spezielle Gitter ein Zerlegungssatz, was wir nun beweisen wollen. Dafür zeigen wir zunächst ein wichtiges Resultat über endlich erzeugte freie abelsche Gruppen (der Beweis ist allgemeiner für Hauptidealbereiche R statt \mathbb{Z} richtig, was wir in 19.24 in einer äquivalenten Version benutzen):

2.18 Elementarteilersatz *Es sei U eine Untergruppe einer endlich erzeugten freien abelschen Gruppe F vom Rang n . Dann existieren eine Basis (x_1, \dots, x_n) von F , ein $p \in \mathbb{N}$ und positive Zahlen $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p \in \mathbb{N}$, so daß gilt:*

- 1) Die Elemente $\varepsilon_1 x_1, \dots, \varepsilon_p x_p$ bilden eine Basis von U .
- 2) Für $j = 1, \dots, p-1$ wird ε_{j+1} von ε_j geteilt.

Vorbereitend zeigen wir folgendes

2.19 Lemma *In der Situation von 2.18 gelte $U \subset \mathfrak{a}F$ für kein anderes Ideal $\mathfrak{a} \hookrightarrow \mathbb{Z}$ als für $\mathfrak{a} = \mathbb{Z}$. Dann enthält U ein Element, das Teil einer Basis von F ist.*

Beweis Es sei (f_1, \dots, f_n) eine Basis von F ; die Menge

$$\mathfrak{i} := \left\{ r \in \mathbb{Z}; \exists u = \sum_{i=1}^n r_i f_i \in U, \exists i \text{ mit } r = r_i \right\}$$

ist ersichtlich ein Ideal in \mathbb{Z} . Die Voraussetzung an U besagt, daß 1 der größte gemeinsame Teiler aller Elemente aus \mathfrak{i} ist. Man kann sogar schon mit endlich vielen $u_1, \dots, u_m \in U$ erreichen, daß der kurz mit $\text{ggT}(u_1, \dots, u_m)$ bezeichnete „größte gemeinsame Teiler“ dieser u_j den Wert 1 hat.

Zunächst zeigen wir, daß man stets eine Basis von F finden kann, in der $m \leq 2$ wählbar ist. Andernfalls ist nach dem Prinzip vom kleinsten Verbrecher das kleinste m , das für geeignetes U und geeignete Basis von F auftritt, mindestens 3. Man wähle dazu teilerfremde $u_1, \dots, u_m \in U$. Für $g := \text{ggT}(u_2, \dots, u_m)$ und $j = 2, \dots, m$ liegen alle $v_j := u_j/g$ in F . Weil m minimal ist, enthält die Untergruppe $\mathbb{Z} \cdot (v_2, \dots, v_m)$ von F ein v , das zu einer Basis von F ergänzt werden kann. Aber U enthält u_1 und gv mit $\text{ggT}(u_1, gv) = 1$, so daß $m = 2$ doch realisierbar ist!

Der Fall $m = 1$ ist einfach: Es gibt zu $u_1 \in U$ eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \cdot u_1 \rightarrow F \rightarrow F/(\mathbb{Z} \cdot u_1) \rightarrow 0.$$

Die Gruppe $\overline{F} := F/(\mathbb{Z} \cdot u_1)$ ist „torsionsfrei“, i.e., aus $m\overline{f} = 0$ mit $m \in \mathbb{Z}$ folgt $m = 0$ oder $\overline{f} = 0$. Damit ist \overline{F} frei ([ScheSt, Satz 61.9]), also ist $F \cong \mathbb{Z} \cdot u_1 \oplus \overline{F}$ und u_1 somit Teil einer Basis von F .

Der Fall $m = 2$ ist lästig: Zu „teilerfremden“ $u_1, u_2 \in U$ sei $u_1 = a(a_1 f_1 + \dots + a_n f_n)$ mit $\text{ggT}(a_1, \dots, a_n) = 1$. Dann ist $y_1 = u_1/a$ als unteilbares Element gemäß dem Fall $m = 1$ zu einer Basis von F ergänzbar; ist a eine Einheit, so ist u_1 Teil einer Basis. Nun sei a eine Nichteinheit. Durch Induktion über die Anzahl $k \geq 1$ der Primfaktoren von a zeigen wir die Behauptung. Dazu seien (y_1, \dots, y_n) eine geeignete Basis von F und $u_2 =: \sum_{j=1}^n b_j y_j$:

„ $k = 1$ “: Ist $\text{ggT}(a, b_1) = 1$, so wähle man $r, s \in \mathbb{Z}$ mit $ra + sb_1 = 1$. Dann ist auch $(y_1 + s \sum_{j=2}^n b_j y_j, y_2, \dots, y_n)$ eine Basis von f , und es gilt

$$y_1 + s \sum_{j=2}^n b_j y_j = ray_1 + sb_1 y_1 + s \sum_{j=2}^n b_j y_j = ru_1 + su_2 \in U.$$

Ist dagegen a ein Teiler von b_1 , so folgt mit $t := b_1/a$ einerseits

$$ay_1 + \sum_{j=2}^n b_j y_j = ((1-t)a + ta)y_1 + \sum_{j=2}^n b_j y_j = (1-t)u_1 + u_2 \in U.$$

Andererseits folgt $\text{ggT}(a, b_2, \dots, b_n) = \text{ggT}(a, b_1, \dots, b_n) = \text{ggT}(u_1, u_2) = 1$, also erhalten wir mit dem System $(ay_1 + \sum_{j=2}^n b_j y_j, y_2, \dots, y_n)$ eine Basis von F .

„ $k \Rightarrow k + 1$ “: Es sei $a = qa'$ mit einer Primzahl q . Gemäß dem Fall $k = 1$ existiert eine Basis (z_1, \dots, z_n) von F , für die $z_1 \in \mathbb{Z} \cdot (qy_1, u_2)$ und damit $u'_1 := a'z_1 \in U$ gilt. Für u'_1 und die Darstellung $u_2 = \sum_{j=1}^n c_j z_j$ in der Basis (z_1, \dots, z_n) kann man die Induktionsvoraussetzung anwenden, da a' weniger Primfaktoren als a hat, wenn $\text{ggT}(u'_1, u_2) = 1$ sichergestellt ist. Nun ist letzteres einerseits ein Teiler von $\text{ggT}(u'_1) = a'$, andererseits jedoch von $\text{ggT}(u_2)$. Aus $\text{ggT}(a, b_1, \dots, b_n) = 1$ folgt jedoch erst recht $\text{ggT}(a', u_2) = 1$. ■

Beweis von Satz 2.18 Ohne Einschränkung sei $U \neq 0$. Wir führen Induktion über n . Der Fall $n = 1$ ist trivial. Für allgemeines n und eine Basis von F sei nun $a(U)$ der größte gemeinsame Teiler aller Koeffizienten von Elementen aus U ; da eine Untergruppe U' von F mit $U = a(U)U'$ existiert, sei ohne Einschränkung $a(U) = 1$. Dann existiert nach 2.19 eine Basis (y_1, \dots, y_n) von F mit $y_1 \in U$. Zu $F' := \mathbb{Z} \cdot (y_2, \dots, y_n)$ existieren nach Induktionsvoraussetzung eine Basis (z_2, \dots, z_n) und Elemente $\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_p \in \mathbb{Z}^*$, so daß $\varepsilon_{j+1} | \varepsilon_j$ für $j = 2, \dots, p - 1$ und $U \cap F' = \mathbb{Z} \cdot (\varepsilon_2 z_2, \dots, \varepsilon_p z_p)$ gelten. Damit ist

$$U = \mathbb{Z} \cdot (y_1, \varepsilon_2 z_2, \dots, \varepsilon_p z_p),$$

und als Basis von F kann man

$$(z_2, \dots, z_p, y_1, z_{p+1}, \dots, z_n)$$

wählen. Schließlich ist noch $\varepsilon_p = 1$ zu setzen (für allgemeines $a(U)$ ergeben sich damit als „Elementarteiler“ die Zahlen $a(U)\varepsilon_1, \dots, a(U)$). ■

2.20 Korollar Ist N ein Gitter im Vektorraum V und V_0 ein p -dimensionaler Untervektorraum von V , so existiert eine Zerlegung

$$(V, N) \cong (V_0 \times \mathbb{R}^{n-p}, V_0 \cap N \oplus N_2)$$

mit einem Gitter N_2 in \mathbb{R}^{n-p} .

Beweis Wählen wir x_i, y_i und ε_i wie in 2.18 zu $U := V_0 \cap N \subset N =: F$, so liegt mit jedem $y_i = \varepsilon_i x_i$ auch $y_i / \varepsilon_i = x_i$ in $N \cap V_0$; also ist $V_0 \cap N$ ein direkter Faktor von N . ■

Aufgabe 2.7 Für die Kante ρ eines Kegels $\sigma \in \mathfrak{K}_N(V)$ zeige man, daß in einer geeigneten Basis (e_1, \dots, e_n) die Darstellung $\rho = \text{keg}(e_1)$ gilt.

Für eine explizite Berechnung der x_j und ε_j in 2.18 sei auf die Bestimmung der Smith-Normalform in [AdWei, 5.3] verwiesen.

3. Affine torische Varietäten

In diesem Paragraphen sei ein Gitter N im Vektorraum $V = N_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^n$ fixiert. Wir wollen jedem (spitzen) N -Kegel im n -dimensionalen Vektorraum V eine komplexe n -dimensionale affin algebraische Varietät X_σ zuordnen. Dazu erinnern wir an einige Begriffe aus der algebraischen Geometrie [Ha, Sh, AG]:

Es sei A eine kommutative reduzierte \mathbb{C} -Algebra mit einem Erzeugendensystem a_1, \dots, a_r . Dazu existiert ein eindeutig bestimmter Algebromorphismus

$$(3.0.1) \quad \varphi: \mathbb{C}[T] := \mathbb{C}[T_1, \dots, T_r] \rightarrow A, \quad T_i \mapsto a_i ;$$

also ist $A \cong \mathbb{C}[T_1, \dots, T_r] / \ker \varphi$. Unter dem Spektrum $\mathrm{Sp}(A)$ von A verstehen wir immer das *Maximalspektrum*:

$$(3.0.2) \quad \mathrm{Sp}(A) = \{ \mathfrak{m}; \mathfrak{m} \text{ maximales Ideal in } A \} \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg}}(A, \mathbb{C}) .$$

Insbesondere ist $\mathrm{Sp}(A)$ eine affin algebraische Varietät. Wir werden sie mit der Zariski-Topologie und auch mit der feineren \mathbb{C} -Topologie betrachten. Die Surjektion φ induziert eine Einbettung

$$(3.0.3) \quad \mathrm{Sp}(A) \hookrightarrow \mathrm{Sp}(\mathbb{C}[T_1, \dots, T_r]) = \mathbb{C}^r ,$$

die damit die komplexe Topologie auf $\mathrm{Sp}(A)$ beschreibt und „Koordinaten“ (y_1, \dots, y_r) einführt, die $\mathrm{Sp}(A)$ in \mathbb{C}^r darstellen.

Ist nun S eine kommutative (additiv geschriebene) Halbgruppe mit 0, so wird der \mathbb{C} -Vektorraum

$$(3.0.4) \quad \mathbb{C}[S] := \bigoplus_{u \in S} \mathbb{C} \cdot \chi^u$$

mit formalen Elementen χ^u durch die Setzung $\chi^u \cdot \chi^{u'} := \chi^{u+u'}$ eine \mathbb{C} -Algebra. Jedem Homomorphismus von Halbgruppen $\vartheta: S \rightarrow S'$ entspricht ein „monomialer Algebromorphismus“

$$(3.0.5) \quad \vartheta_* := \mathbb{C}[\vartheta]: \mathbb{C}[S] \rightarrow \mathbb{C}[S'], \quad \chi^u \mapsto \chi^{\vartheta(u)} .$$

3.1 Beispiel Zwar wird das duale Gitter $M = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$ als *Gruppe* von den kanonischen Basisvektoren $f_1, \dots, f_n \in V^*$ erzeugt, für eine Erzeugung von M als *Halbgruppe* muß man dies System jedoch zu $(\pm f_1, \dots, \pm f_n)$ ergänzen. Man setzt

$$T_i := \chi^{f_i}, \quad T_i^{-1} := \chi^{-f_i}, \quad T^u := T_1^{u_1} \cdot \dots \cdot T_n^{u_n} \quad \text{für } u = (u_1, \dots, u_n) \in M$$

und nennt

$$\mathbf{C}[M] = \bigoplus_{u \in M} \mathbf{C} \cdot \chi^u = \mathbf{C}[T_1, T_1^{-1}, \dots, T_n, T_n^{-1}] := \mathbf{C}[T^{\pm 1}]$$

die „Laurentalgebra“ oder „Algebra der Laurentpolynome“. Sie ist nullteilerfrei und damit insbesondere reduziert. Die Elemente heißen *Laurentpolynome*.

Wenn man die Algebra \mathbf{C} nur als multiplikative Halbgruppe betrachtet, so erhält man eine Bijektion

$$(3.1.0) \quad \text{Hom}_{\text{Hgr}}(S, \mathbf{C}) \cong \text{Hom}_{\text{Alg}}(\mathbf{C}[S], \mathbf{C}), \quad x \mapsto (\vartheta: \chi^u \mapsto x(u)).$$

Ist S sogar eine *Gruppe*, so gilt ersichtlich

$$(3.1.1) \quad \text{Hom}_{\text{Hgr}}(S, \mathbf{C}) = \text{Hom}_{\text{Gr}}(S, \mathbf{C}^*).$$

Zu einer Unterhalbgruppe S von M gehört eine Inklusion

$$(3.1.2) \quad \mathbf{C}[S] \subset \mathbf{C}[M];$$

insbesondere sind die Elemente von $\mathbf{C}[S]$ als Laurentpolynome darstellbar. Damit ist $\mathbf{C}[S]$ für endlich erzeugtes S eine nullteilerfreie affine Algebra.

Aufgabe 3.1 Für Unterhalbgruppen S, S' von M und $\mathbf{C}(S) := Q(\mathbf{C}[S])$ zeige man die Äquivalenz folgender Eigenschaften:

- i) $S - S = S' - S'$;
- ii) $\mathbf{C}[S - S] = \mathbf{C}[S' - S']$;
- iii) $\mathbf{C}(S) = \mathbf{C}(S')$;

(für 3.3).

Aufgabe 3.2 Es seien $S' \subset S$ endlich erzeugte Unterhalbgruppen von M . Man zeige: Der induzierte Morphismus $\psi: \text{Sp}(\mathbf{C}[S]) \rightarrow \text{Sp}(\mathbf{C}[S'])$ ist genau dann birational, wenn für die zugehörigen Gruppen gilt

$$(3.2.1) \quad S' - S' = S - S.$$

3.2 Bemerkung Es sei S eine endlich erzeugte erzeugende Unterhalbgruppe von M . Dann ist S genau dann saturiert, wenn $\mathbf{C}[S]$ ein normaler Ring ist.

Beweis „ \Rightarrow “ Nach 2.13 existiert ein N -Kegel σ mit $S = S_\sigma$. Zunächst sei σ ein Strahl ρ , ohne Einschränkung sei $\rho = \text{keg}(e_1)$ für den Basisvektor $e_1 \in V$. Offensichtlich gilt für die duale Basis (f_1, \dots, f_n) von V^*

$$S_\rho = \mathbb{N} \cdot f_1 \oplus \bigoplus_{i=2}^n \mathbb{Z} \cdot f_i$$

und damit

$$\mathbf{C}[S_\rho] = \mathbf{C}[T_1, T_2, T_2^{-1}, \dots, T_n, T_n^{-1}] \subset \mathbf{C}[M].$$

Mit $\mathbf{C}[T]$ ist auch dessen Lokalisierung

$$\mathbf{C}[T_1, T_2, T_2^{-1}, \dots, T_n, T_n^{-1}] = \mathbf{C}[T]_{T_1 \cdots T_n} = (\dots (\mathbf{C}[T]_{T_2})_{T_3} \dots)_{T_n}$$

normal: Ist nämlich allgemeiner R ein normaler Ring und \mathfrak{p} ein Primideal, so ist auch $R_{\mathfrak{p}}$ normal: Ist $S := R \setminus \mathfrak{p}$, und ist $q \in Q(R)$ ganz über $R_{\mathfrak{p}}$, so existiert eine Gleichung

$$q^m + \sum_{j=1}^m (r_j/s_j)q^{m-j} = 0$$

über $R_{\mathfrak{p}}$. Nun liegt $s := s_1 \cdots s_m$ in S . Multiplikation mit s^m gibt mit $c_j := s^j r_j/s_j \in R$ eine Ganzheitsgleichung

$$(sq)^m + \sum_{j=1}^m c_j (sq)^{m-j} = 0$$

für qs über R . Da R normal ist, liegt qs in R und somit $q = qs/s$ in $R_{\mathfrak{p}}$.

Für allgemeines σ mit Strahlen ρ_1, \dots, ρ_r gilt $\sigma = \sum \rho_j$, also $\sigma^\vee = \bigcap \rho_j^\vee$ und $S_\sigma = \bigcap S_{\rho_j}$. Daher ist

$$\mathbf{C}[S_\sigma] = \bigcap_{j=1}^r \mathbf{C}[S_{\rho_j}] \subset \mathbf{C}[M]$$

als Durchschnitt normaler Unterringe von $\mathbf{C}[M]$ wieder normal.

„ \Leftarrow “ Für $p \in \mathbb{N}_{>0}$ und $m \in M$ mit $pm \in S$ ist $m \in S$ zu zeigen. Mit der Unbestimmten T ist $T^p - \chi^{pm} \in (\mathbf{C}[S])[T]$ eine Ganzheitsgleichung für $\chi^m \in \mathbf{C}[M] \subset \mathbf{C}(M)$; wegen der Normalität von $\mathbf{C}[S]$ liegt χ^m in $\mathbf{C}[S]$, also m in S . ■

Der Bequemlichkeit halber wollen wir folgende Sprechweise verwenden: Als

- „Kategorie der Gitterunterhalbgruppen“ bezeichnen wir die Klasse aller endlich erzeugten saturierten erzeugenden Untermonoide von Gittern mit den am Ende von § 1 eingeführten Morphismen,
- „Kategorie der Laurent-Teilalgebren“ bezeichnen wir die Kategorie aller affinen Algebren der Form $\mathbf{C}[S_\sigma]$; die Morphismen $\psi: \mathbf{C}[S_\sigma] \rightarrow \mathbf{C}[S_{\sigma'}]$ seien „monomial“, i.e., für jedes $m \in S_\sigma$ gibt es ein $m' \in S_{\sigma'}$ mit $\psi(\chi^m) = \chi^{m'}$.

3.3 Satz *Der Funktor auf der Kategorie der Unterhalbgruppen mit Werten in der Kategorie der Laurent-Teilalgebren, gegeben durch*

$$F: S \mapsto \mathbf{C}[S], \quad \varphi \mapsto \mathbf{C}[\varphi]$$

ist eine Äquivalenz von Kategorien.

Beweis Nach 2.13 kommt jede der betrachteten Gitterhalbgruppen S von einem N -Kegel σ ; also ist $F(S)$ eine Laurent-Teilalgebra, und jeder Morphismus $\mathbf{C}[\varphi]$ ist nach (3.0.5) monomial. Evident ist F funktoriell.

Kommen wir zum Umkehrfunktor: Jede Laurentalgebra $\mathbf{C}[S]$ der Bildkategorie tritt als Bild des Monoids S aller Exponenten m mit $\chi^m \in \mathbf{C}[S]$ auf. Die Halbgruppe S ist genau dann endlich erzeugt, wenn die Algebra $\mathbf{C}[S]$ endlich erzeugt ist: Es sei $M := S - S$. Ist (ohne Einschränkung) $\chi^{s_1}, \dots, \chi^{s_r}$ ein Erzeugendensystem von $\mathbf{C}[S]$ und $\chi^s \in \mathbf{C}[S]$, so hat χ^s in der graduierten Unteralgebra $\mathbf{C}[S]$ von $\mathbf{C}[M]$ eine Darstellung $\chi^s = \prod \chi^{s_j a_j}$, also gilt $s = \sum a_j s_j$. Weiter ist S nach 3.2 saturiert.

Es sei nun $\psi: \mathbf{C}[S] \rightarrow \mathbf{C}[S_1]$ ein monomialer Algebrhomomorphismus; wir haben ihm einen $\varphi: S \rightarrow S'$ zuzuordnen. Wir setzen wieder $M = S - S$ und $M_1 = S_1 - S_1$. Nach Aufgabe 3.1 ist $\mathbf{C}[S]$ eine Unteralgebra von $\mathbf{C}[M]$ und $\mathbf{C}[S_1]$ von $\mathbf{C}[M_1]$. Zu ψ existiert eine eindeutige Fortsetzung als monomialer Algebrhomomorphismus

$$(3.3.1) \quad \psi: \mathbf{C}[M] \rightarrow \mathbf{C}[M_1].$$

Denn es sei $\mathbf{C}[M] = \mathbf{C}[w_1, w_1^{-1}, \dots, w_m, w_m^{-1}]$ und $\mathbf{C}[M_1] = \mathbf{C}[z_1, z_1^{-1}, \dots, z_n, z_n^{-1}]$. Für die kanonische Basis (f_1, \dots, f_m) von M existiert wegen $M = S - S$ ein $u \in S$, das $u + f_j \in S$ für $j = 1, \dots, m$ erfüllt. Das Element w^{u+f_j} aus $\mathbf{C}[S]$ hat in $\mathbf{C}[M]$ die Zerlegung $w^{u+f_j} = w^u w^{f_j} = w^u w_j$. Wenn die gesuchte Fortsetzung existiert, so muß sie

$$(3.3.2) \quad \psi(w_j) = \psi(w^{u+f_j})/\psi(w^u), \quad j = 1, \dots, m$$

erfüllen. Da andererseits durch die Vorschrift (3.3.2) ein monomialer Algebrhomomorphismus des Typs (3.3.1) definiert wird, haben wir die Fortsetzung konstruiert.

Der fortgesetzte Algebrhomomorphismus ψ bestimmt nun eindeutig einen Gruppenhomomorphismus $\varphi: M \rightarrow M_1$. Aus $\psi(\mathbf{C}[S]) \subset \mathbf{C}[S_1]$ folgt, weil ψ monomial ist, ersichtlich $\varphi(S) \subset S_1$, so daß wir insgesamt den gesuchten Halbgruppenhomomorphismus erhalten.

Wir zeigen nun, daß S durch $\mathbf{C}[S]$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist: Jeder (monomiale) Algebraisomorphismus $\psi: \mathbf{C}[S] \rightarrow \mathbf{C}[S_1]$ liefert einen Monoidisomorphismus $\varphi: S \rightarrow S'$. Denn gemäß (3.3.1) verschaffen wir uns zu ψ die Fortsetzung

$$\psi: \mathbf{C}[w_1, w_1^{-1}, \dots, w_m, w_m^{-1}] \rightarrow \mathbf{C}[z_1, z_1^{-1}, \dots, z_n, z_n^{-1}], \quad w_j \mapsto z^{\mu_j}$$

mit $\mu_j = (\mu_{j_1}, \dots, \mu_{j_n}) \in \mathbb{Z}^n := N \subset \mathbb{N}_{\mathbb{R}}$. Entsprechend hat die Umkehrung die Form

$$\psi^{-1}: \mathbf{C}[z, z^{-1}] \rightarrow \mathbf{C}[w, w^{-1}], \quad z_i \mapsto w^{\nu_i}$$

mit $\nu_i \in \mathbb{Z}^m$. Damit gilt für $j = 1, \dots, m$:

$$w_j = \psi^{-1}(z^{\mu_j}) = \prod_{i=1}^n \psi^{-1}(z_i^{\mu_{ji}}) = \prod_{u=1}^n w^{\mu_{ji} \nu_i}.$$

Daraus ergibt sich für $j, k = 1, \dots, m$ die Beziehung $\mu_{ji} \nu_{ik} = \delta_{jk}$. Entsprechend folgt aus $z_i = \psi(w^{\nu_i})$ die Beziehung $\nu_{ij} \mu_{jk} = \delta_{ik}$. Insbesondere sind die Matrizen $(\mu_{ji}) \in \mathbb{Z}^{m \times n}$

und $(\nu_{ij}) \in \mathbb{Z}^{n \times m}$ zueinander invers, also gilt $m = n$, und die Matrix (μ_{ji}) ist unimodular, definiert also einen Gitterisomorphismus. Da ein Gleiches für die Umkehrung gilt, ist das induzierte φ ein Isomorphismus.

Weil die beiden Funktoren einander umkehren, folgt die Behauptung. ■

Für einen N -Kegel σ ist die Halbgruppe S_σ nach dem Lemma von Gordan 2.10 endlich erzeugt. Wir setzen:

3.4 Definition Mit $A_\sigma := \mathbb{C}[S_\sigma]$ bezeichnen wir die zu σ assoziierte Algebra und mit $X_\sigma := \text{Sp}(\mathbb{C}[S_\sigma])$ die zugehörige affine „torische“ Varietät.

Für $\chi^u \in \mathbb{C}[S_\sigma] = \mathcal{O}(X_\sigma)$ und $x \in X_\sigma = \text{Hom}_{\text{Hgr}}(S_\sigma, \mathbb{C})$ ist

$$(3.4.0) \quad \chi^u(x) = x(u).$$

3.5 Bemerkung Die affine torische Varietät X_σ ist normal und damit insbesondere irreduzibel.

Beweis Nach 3.2 ist die Algebra regulärer Funktionen $\mathcal{O}(X_\sigma) = \mathbb{C}[S_\sigma]$ normal, was wegen X_σ affin äquivalent zur Behauptung ist ([AG, Satz 11.2]). ■

Wir kommen auf die Situation von (3.0.1) zurück: Es seien (e_1, \dots, e_n) eine Basis von N , (f_1, \dots, f_n) die duale Basis von M und $T_i := \chi^{f_i} \in \mathbb{C}[M]$. Für ein Erzeugendensystem (u_1, \dots, u_r) von S_σ erhält man einen Algebrahomomorphismus

$$(3.4.1) \quad \varphi: \mathbb{C}[T] = \mathbb{C}[T_1, \dots, T_r] \rightarrow A_\sigma, \quad T_i \mapsto \chi^{u_i};$$

damit sind die durch T_i gegebenen Funktionen die Koordinaten von X_σ in \mathbb{C}^r .

Wir sehen uns wieder unsere elementaren Beispiele an:

3.6 Beispiele 1) $S_\sigma = M$ liefert $A_\sigma = \mathbb{C}[M] = \mathbb{C}[T_1, T_1^{-1}, \dots, T_n, T_n^{-1}]$ und damit

$$X_\sigma = \text{Sp}(\mathbb{C}[M]) = (\mathbb{C}^*)^n =: \mathbb{T}_N,$$

den *algebraischen Torus* zu N . Also gilt nach (3.0.2) und (3.0.5)

$$(3.6.1) \quad \mathbb{T}_N \stackrel{(3.0.2)}{=} \text{Hom}_{\text{Alg}}(\mathbb{C}[M], \mathbb{C}) \stackrel{(3.0.5)}{=} \text{Hom}_{\text{Hgr}}(M, \mathbb{C}) \\ = \text{Hom}_{\text{Gr}}(M, \mathbb{C}^*) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{C}^*) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^* \cong N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^*.$$

Dabei wurde der Isomorphismus

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^* \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{C}^*), \quad (\varphi, t) \mapsto t \cdot \varphi$$

verwendet. Wir schreiben für einen algebraischen Torus auch einfach \mathbb{T} bzw. \mathbb{T}^n , wenn wir die Dimension festhalten wollen. — Für N -Kegel σ wissen wir bereits, daß sich die Elemente der Algebra A_σ als Laurentpolynome aus $\mathbb{C}[M]$ schreiben lassen.

2) Ist $\sigma = \text{keg}(e_1, \dots, e_n)$, so gilt $\sigma^\vee = \text{keg}(f_1, \dots, f_n)$ und damit

$$A_\sigma = \mathbb{C}[T_1, \dots, T_n] \quad \text{ sowie } \quad X_\sigma = \mathbb{C}^n. \quad \blacksquare$$

Die in 2.5 betrachtete Zerlegung ist auch mit der Bildung affiner torischer Varietäten verträglich:

3.7 Bemerkung Ist σ ein N -Kegel in V und σ' ein N' -Kegel in V' , so ist $\sigma \oplus \sigma'$ ein $(N \oplus N')$ -Kegel in $V \times V'$, und es gilt

$$(3.7.1) \quad X_{\sigma \oplus \sigma'} \cong X_\sigma \times X_{\sigma'}.$$

Beweis Die erste Behauptung ist unmittelbar zu verifizieren. Andererseits gilt ersichtlich $S_{\sigma \oplus \sigma'} \cong S_\sigma \oplus S_{\sigma'}$, und damit folgt

$$\begin{aligned} X_{\sigma \oplus \sigma'} &= \text{Hom}_{\text{Hgr}}(S_{\sigma \oplus \sigma'}, \mathbb{C}) \cong \text{Hom}_{\text{Hgr}}(S_\sigma \oplus S_{\sigma'}, \mathbb{C}) \\ &\cong \text{Hom}_{\text{Hgr}}(S_\sigma, \mathbb{C}) \times \text{Hom}_{\text{Hgr}}(S_{\sigma'}, \mathbb{C}) = X_\sigma \times X_{\sigma'}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

3.6 Beispiele 3) Ist $p := \dim \text{lin } \sigma$, so induziert die Zerlegung $\sigma = \sigma' \oplus \mathfrak{o} \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ aus 2.4 nach (3.7.1) eine Zerlegung

$$(3.6.2) \quad X_\sigma \cong X_{\sigma'} \times (\mathbb{C}^*)^{n-p}$$

nach 3.7 und 3.6 1). Wählen wir speziell in 3.7

$$\sigma = \text{keg}(e_1, \dots, e_p) \subset \mathbb{R}^p \cong \mathbb{R}^p \times \{0\} \hookrightarrow \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p},$$

so ist nach 3.6 2)

$$(3.6.3) \quad X_\sigma \cong \mathbb{C}^p \times (\mathbb{C}^*)^{n-p}. \quad \blacksquare$$

3.8 Beispiel Wir kommen auf die in 2.7 untersuchten elementaren Beispiele zurück; dabei bezeichne $\sigma_{i_1 \dots i_r} := \text{keg}(v_{i_1}, \dots, v_{i_r})$ und entsprechend

$$A_{i_1 \dots i_r} := \mathbb{C}[S_{\sigma_{i_1 \dots i_r}}] \subset \mathbb{C}[T_1^{\pm 1}, \dots, T_n^{\pm 1}]:$$

n = 1 Für $v_1 := e_1$ ist $A_1 = \mathbb{C}[T_1]$.

n = 2 Für $v_1 := e_2, v_2 := me_1 - e_2, v_3 := -e_1$ ist

$$\begin{aligned} A_1 &= \mathbb{C}[T_1^{\pm 1}, T_2], \quad A_2 = \mathbb{C}[T_2^{-1}, (T_1 T_2^m)^{\pm 1}], \quad A_3 = \mathbb{C}[T_1^{-1}, T_2^{\pm 1}], \\ A_{12} &= \mathbb{C}[T_1 T_2^j, j = 0, \dots, m], \quad A_{13} = \mathbb{C}[T_1^{-1}, T_2], \quad A_{23} = \mathbb{C}[T_1^{-1} T_2^{-m}, T_2^{-1}]. \end{aligned}$$

n = 3 Für $v_1 := e_1, v_2 := e_2, v_3 := -(e_1 + e_3), v_4 := -(e_2 + e_3)$ ist

$$A_{1234} = \mathbb{C}[T_1 T_3^{-1}, T_2 T_3^{-1}, T_1 T_2 T_3^{-1}, T_3^{-1}].$$

Aufgabe 3.3 In den Bezeichnungen von Beispiel 3.8 mit $n = 3$ und $v_5 := e_3 - 2(e_1 + e_2)$ bestimme man die auftretenden A_{ijk} .

Aufgabe 3.4 Man zeige, daß für einen regulären Kegel σ die Varietät X_σ regulär (i.e., singularitätenfrei) ist (für 6.5).

Die Umkehrung der Aufgabe 3.4 wird in 6.5 gezeigt. Insbesondere ist jede reguläre affine Varietät X_σ von der Form $\mathbb{C}^{\dim \sigma} \times \mathbb{C}^{*\text{codim } \sigma}$.

Die Algebren A_σ und damit die affinen Varietäten X_σ haben eine sehr spezielle einfache Darstellung, in der wir folgende Bezeichnung verwenden: Für r -Vektoren $\alpha := (a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{N}^r$ und $\mu := (u_1, \dots, u_r) \in (S)^r$ sei

$$\langle \alpha, \mu \rangle := \sum_{i=1}^r a_i u_i \in S.$$

3.9 Lemma *Es sei S eine Unterhalbgruppe mit 0 von M . Ist $\mu := (u_1, \dots, u_r)$ ein Erzeugendensystem von S und \mathfrak{b} das von den Binomen $T^\alpha - T^\beta$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^r$ mit $\langle \alpha - \beta, \mu \rangle = 0$ in $\mathbb{C}[T]$ erzeugte Ideal, so induziert der Homomorphismus (3.4.1) einen Algebrasomorphismus*

$$\mathbb{C}[S] \cong \mathbb{C}[T_1, \dots, T_r] / \mathfrak{b}.$$

Beweis Offensichtlich ist $\varphi: \mathbb{C}[T] \rightarrow \mathbb{C}[S]$, $T_i \mapsto \chi^{u_i}$ surjektiv; es bleibt $\mathfrak{b} = \ker \varphi$ zu zeigen. Aus $T^\alpha - T^\beta \in \mathfrak{b}$ folgt $\varphi(T^\alpha - T^\beta) = \chi^{\langle \alpha, \mu \rangle} - \chi^{\langle \beta, \mu \rangle} = 0$, also gilt $\mathfrak{b} \subset \ker \varphi$. Umgekehrt sei $\sum_{i=1}^p \lambda_i T^{\alpha_i}$ aus $\ker \varphi$. Damit ergibt sich in naheliegender Weise die Darstellung

$$0 = \varphi\left(\sum_{i=1}^p \lambda_i T^{\alpha_i}\right) = \sum_{i=1}^p \lambda_i \chi^{\langle \alpha_i, \mu \rangle} = \sum_{u \in S} \left(\sum_{\langle \alpha_i, \mu \rangle = u} \lambda_i\right) \chi^u.$$

Da $(\chi^u)_{u \in S}$ eine Vektorraumbasis von $\mathbb{C}[S]$ bildet, können wir annehmen, daß alle α_i das gleiche Element $u = \langle \alpha_i, \mu \rangle$ liefern. Also folgt $\sum_i \lambda_i = 0$ und daher $\lambda_1 = -\sum_{i=2}^p \lambda_i$. Damit ist

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i T^{\alpha_i} = \sum_{i=2}^p \lambda_i (T^{\alpha_i} - T^{\alpha_1}) \in \mathfrak{b}. \blacksquare$$

Aufgabe 3.5 Es sei $S := \mathbb{Z} \cdot m_1 + \mathbb{Z} \cdot m_2 \subset \mathbb{Z}$ mit teilerfremden $m_i \in \mathbb{N}_{>0}$. Man bestimme das Ideal \mathfrak{b} in 3.9.

3.10 Bemerkung In Beispielen erweisen sich folgende Prinzipien oft als nützlich:

- 1) Ist S_σ von einem Teil einer Monoidbasis der Form $(\pm f_1, \dots, \pm f_n)$ von M erzeugt, so ist die zugehörige affine Varietät nach 3.7 und 3.6 3) isomorph zu einem Produkt der Form $\mathbb{C}^p \times (\mathbb{C}^*)^{n-p}$.

- 2) Man schreibe A_σ gemäß 3.9 in der Form $\mathbf{C}[T]/\mathfrak{b}$. Existieren Binomome $B_j, j \in J$ in \mathfrak{b} , so daß $\text{Sp}(\mathbf{C}[T]/(B_j, j \in J))$ eine normale algebraische Varietät der Dimension $\dim X_\sigma$ ist, so induziert die zu $(B_j, j \in J) \subset \mathfrak{b}$ gehörige Inklusion

$$X_\sigma \hookrightarrow \text{Sp}(\mathbf{C}[T]/(B_j, j \in J))$$

einen Isomorphismus algebraischer Varietäten, vgl. Aufgabe 3.12.

Das können wir in folgendem Beispiel verwenden:

3.11 Beispiele In den Bezeichnungen von 3.8 gilt für $X_{\sigma_{i_1 \dots i_k}} = \text{Sp}(A_{\sigma_{i_1 \dots i_k}})$:

n=1 $X_\sigma = \mathbf{C}$.

n=2 Nach 3.10 1) ist $X_{\sigma_1} \cong \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}$ und $X_{\sigma_3} \cong \mathbf{C} \times \mathbf{C}^*$,

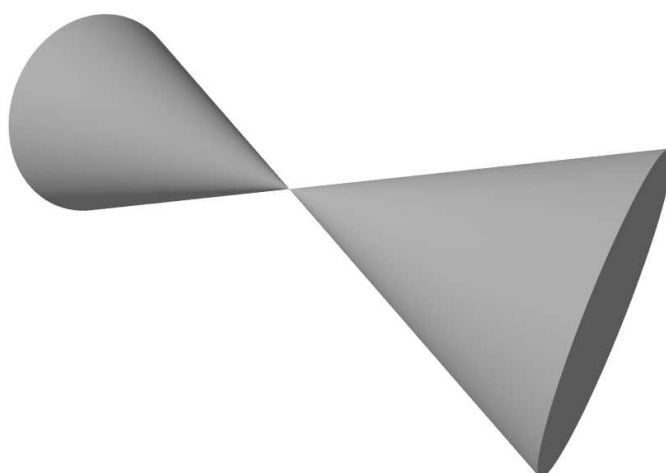
$$X_{\sigma_2} = \text{Sp}(A_{\sigma_2}) \cong \text{Sp}(\mathbf{C}[T_2^{-1}, (T_1 T_2^m)^{\pm 1}]) \cong \text{Sp}(\mathbf{C}[Y_1, Y_2, Y_3]/(Y_2 Y_3 - 1)) \cong \mathbf{C} \times \mathbf{C}^*,$$

$$X_{\sigma_{13}} \cong \mathbf{C}^2, \quad X_{\sigma_{23}} = \text{Sp}(A_{\sigma_{23}}) = \text{Sp}(\mathbf{C}[T_1^{-1} T_2^{-m}, T_2^{-1}]) \cong \text{Sp}(\mathbf{C}[Y_1, Y_2]) \cong \mathbf{C}^2,$$

während man für A_{12} mit $m = 2$ in den Bezeichnungen von 3.10 2) $B_1 = Y_2^2 - Y_1 Y_3$ wählen kann; also ist

$$X_{\sigma_{12}} = \{(x, y, z) \in \mathbf{C}^3; y^2 = xz\}$$

ein quadratischer Kegel im \mathbf{C}^3 mit einer Singularität in 0, vgl. Figur 3.1.



FIGUR 3.1 Affiner quadratischer Kegel

Auf den Fall $m \geq 3$ werden wir in 9.2 zurückkommen.

n=3 Wiederum verwenden wir 3.10 2), diesmal mit $B_1 = Y_1Y_4 - Y_2Y_3$; damit erhalten wir den *Segrekegel*

$$X_{\sigma_{1234}} \cong V(\mathbb{C}^4; Y_1Y_2 - Y_3Y_4) \hookrightarrow \mathbb{C}^4.$$

Aufgabe 3.6 Man bestimme zu den A_{ijk} von Aufgabe 3.3 für $n = 3$ die Varietäten X_{ijk} .

3.12 Bemerkung Ein Kegelmorphismus $\varphi: (N, \sigma) \rightarrow (N', \sigma')$ induziert nach 2.16 und (3.0.5) einen monomialen Algebrhomomorphismus

$$\mathbb{C}[\varphi^*]: \mathbb{C}[S] \rightarrow \mathbb{C}[S'], \quad \chi^u \mapsto \chi^{\varphi^*(u)}$$

und damit auf funktorielle Weise einen Morphismus von Varietäten

$$\varphi_* = \text{Sp}(\varphi): X_\sigma = \text{Hom}_{\text{Hgr}}(S_\sigma, \mathbb{C}) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Hgr}}(S'_\sigma, \mathbb{C}) = X_{\sigma'}, \quad x \mapsto x \circ \varphi^*.$$

3.13 Beispiele 1) Sind $\sigma = \mathfrak{o}$ und $\sigma' = \mathfrak{o}'$, so ist der Morphismus

$$\varphi_*: \mathbb{T}_N = X_\sigma \rightarrow X_{\sigma'} = \mathbb{T}_{N'}$$

ein Gruppenhomomorphismus, denn es gilt $(x + y) \circ \varphi^* = x \circ \varphi^* + y \circ \varphi^*$ in $\text{Hom}_{\text{Hgr}}(M', \mathbb{C})$.

2) Für $\tau \prec \sigma \in \mathfrak{K}_N(V)$ ist der zugehörige „Seitenmorphismus“ durch

$$(3.13.1) \quad j_{\sigma\tau}: X_\tau = \text{Hom}_{\text{Hgr}}(S_\tau, \mathbb{C}) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Hgr}}(S_\sigma, \mathbb{C}) = X_\sigma, \quad \varphi \mapsto \varphi|_{S_\tau}$$

gegeben. Es gilt also insbesondere:

$$j_{\sigma\gamma} = j_{\sigma\tau} \circ j_{\tau\gamma} \quad \text{für} \quad \gamma \prec \tau \prec \sigma.$$

Wir wollen den Seitenmorphismus weiter untersuchen; dazu erinnern wir an folgenden Begriff: Für eine affin-algebraische Varietät X und eine reguläre Funktion f auf X bezeichnet $X_f := X \setminus N(X; f)$ die zugehörige (offene) *Hauptmenge*.

3.14 Lemma *Ist τ Seite eines N -Kegels σ , so ist X_τ vermöge des zugehörigen Seitenmorphismus eine Hauptmenge in X_σ .*

Beweis Wählen wir gemäß 2.8 ein $u \in (\sigma^\vee \cap \tau^\perp)^\circ$, so ist $S_\tau = S_\sigma + \mathbb{N} \cdot (-u)$. Dann haben die Basiselemente des Vektorraumes A_τ in $\mathbb{C}[M]$ die Gestalt

$$\chi^{w-pu} = \chi^w / (\chi^u)^p \quad \text{mit} \quad w \in S_\sigma, \quad p \in \mathbb{N}.$$

Also ist A_τ die Lokalisierung $(A_\sigma)_{\chi^u}$, und damit folgt $X_\tau = (X_\sigma)_{\chi^u} \subseteq X_\sigma$, vgl. [AG, 3.23].

Konkret läßt sich die Inklusion wie folgt realisieren: Zu u wähle man ein Erzeugendensystem (u_1, \dots, u_k) von S_σ mit $u_k = u$. Dann ist $(u_1, \dots, u_k, u_{k+1})$ mit $u_{k+1} := -u$ ein Erzeugendensystem von S_τ . In S_τ gilt außer der Relation $u_k + u_{k+1} = 0$ keine neue Relation: In einer Relation $\sum_{j=1}^{k+1} n_j u_j = \sum_{j=1}^{k+1} m_j u_j$ mit $n_j, m_j \in \mathbb{N}$ sei ohne Einschränkung $n_{k+1} \geq m_{k+1}$; Subtraktion von $m_{k+1} u_{k+1}$ auf beiden Seiten liefert ohne Einschränkung $m_{k+1} = 0$; Addition von $n_{k+1} u_k$ liefert wegen $u_k + u_{k+1} = 0$ eine äquivalente Relation nur in u_1, \dots, u_k . Also kommt in der Algebra A_τ in der Bezeichnung $y_i = T^{u_i}$ zu den Relationen in A_σ als einzige neue die Relation $y_k y_{k+1} = 1$ hinzu. Daher bildet die Projektion

$$\text{pr} : \mathbb{C}^{k+1} \rightarrow \mathbb{C}^k, \quad (y_1, \dots, y_{k+1}) \mapsto (y_1, \dots, y_k)$$

die affine Varietät X_τ isomorph auf $\{y \in X_\sigma; y_k \neq 0\}$ ab. Daß die Abbildung die gewünschte Form hat, ergibt sich etwa aus folgendem kommutativen Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Hom}_{\text{Hgr}}(S_\tau, \mathbb{C}) & \cong & \text{Hom}_{\text{Alg}}(\mathbb{C}[S_\tau], \mathbb{C}) & \hookrightarrow & \text{Hom}_{\text{Alg}}(\mathbb{C}[T_1, \dots, T_{k+1}], \mathbb{C}) & \cong & \mathbb{C}^{k+1} \\ \downarrow F & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \text{pr} \\ \text{Hom}_{\text{Hgr}}(S_\sigma, \mathbb{C}) & \cong & \text{Hom}_{\text{Alg}}(\mathbb{C}[S_\sigma], \mathbb{C}) & \hookrightarrow & \text{Hom}_{\text{Alg}}(\mathbb{C}[T_1, \dots, T_k], \mathbb{C}) & \cong & \mathbb{C}^k \end{array}$$

mit $F: \varphi \mapsto \varphi|_{S_\sigma}$. ■

Wir erhalten also folgende Darstellung für $u \in (\sigma^\vee \cap \tau^\perp)^\circ$ und $y_k = \chi^u$:

$$(3.14.0) \quad X_\tau = (X_\sigma)_{y_k}.$$

3.15 Korollar Die affine torische Varietät X_σ enthält den Torus $\mathbb{T} \cong X_\circ$ als Zariski-offene dichte Teilmenge; insbesondere ist sie rational und n -dimensional.

Beweis Für die affine Varietät X_σ wenden wir die Überlegungen des letzten Beweises auf $\tau = \circ \prec \sigma$ an. Es sei dazu mit $u_k \in (\sigma^\vee \cap \tau^\perp)^\circ = (\sigma^\vee)^\circ$ ein Erzeugendensystem (u_1, \dots, u_k) von S_σ gegeben. Dann hat die zugehörige Abbildung nach (3.4.1) die Gestalt

$$\mathbb{T} \cong X_\circ \rightarrow X_\sigma \hookrightarrow \mathbb{C}^k, \quad t = (t_1, \dots, t_n) \mapsto (t^{u_1}, \dots, t^{u_k})$$

und induziert einen Isomorphismus

$$\mathbb{T} \rightarrow X_\sigma \cap (\mathbb{C}^*)^k, \quad t \mapsto (t^{u_1}, \dots, t^{u_k}).$$

Da X_σ irreduzibel ist, liegt die offene Teilmenge X_\circ dicht in X_σ , und es gilt

$$\dim X_\sigma = \dim X_\circ = n. \blacksquare$$

Wir werden in Punkt 7) des kleinen Wörterbuches von § 7 sehen, daß umgekehrt $X_\tau \subseteq X_\sigma$ impliziert, daß τ Seite von σ ist.

Aufgabe 3.7 Man gebe für die folgende Beschreibung von Morphismen algebraischer Gruppen kanonische Isomorphismen an:

- i) $\text{Mor}(\mathbf{C}^*, \mathbf{C}^*) \cong \mathbb{Z}$;
- ii) $\text{Mor}((\mathbf{C}^*)^m, (\mathbf{C}^*)^n) \cong \text{Hom}(\mathbb{Z}^m, \mathbb{Z}^n)$ (für 6.7).

Wir wollen 3.14 am Beispiel 3.11 für $n = 2$ und $m = 2$ illustrieren.

3.16 Beispiel Für $N = \mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$ mit

$$v_1 = e_2, v_2 = 2e_1 - e_2, v_3 = -e_1, \quad \sigma_i = \text{keg}(v_i), \quad \sigma_{ij} = \text{keg}(v_i, v_j)$$

gilt im Beispiel 3.11 unter Verwendung von 2.9:

$$\begin{aligned} X_{\sigma_1} &= (X_{\sigma_{12}})_{\chi^{f_1}} = \{(x, y, z) \in \mathbf{C}^3; y^2 = xz, x \neq 0\} \cong \mathbf{C}^* \times \mathbf{C} \\ X_{\sigma_2} &= (X_{\sigma_{12}})_{\chi^{f_1+2f_2}} = \{(x, y, z) \in \mathbf{C}^3; y^2 = xz, z \neq 0\} \cong \mathbf{C} \times \mathbf{C}^* \\ X_{\sigma_3} &= (X_{\sigma_{13}})_{\chi^{f_2}} \cong \mathbf{C} \times \mathbf{C}^* = (X_{\sigma_{23}})_{\chi^{-f_2}}. \end{aligned}$$

Aufgabe 3.8 Man untersuche entsprechend zu 3.16 Beispiel 3.11 für $n = 3$.

3.17 Bemerkung Der von einem Kegelmorphismus $\varphi: (N, \sigma) \rightarrow (N', \sigma')$ gemäß 3.12 induzierte Morphismus $\varphi_*: X_\sigma \rightarrow X_{\sigma'}$ ist nach Konstruktion „torisch“, i.e., für die Inklusionen $X_\sigma \hookrightarrow \mathbf{C}^r$ und $X_{\sigma'} \hookrightarrow \mathbf{C}^{r'}$ gemäß (3.0.5) existiert ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X_\sigma & \hookrightarrow & \mathbf{C}^r \\ \downarrow \varphi_* & & \downarrow \Phi \\ X_{\sigma'} & \hookrightarrow & \mathbf{C}^{r'} \end{array},$$

wobei $\Phi: \mathbf{C}^r \rightarrow \mathbf{C}^{r'}$ durch Monome gegeben ist.

Grundlegend für die Theorie torischer Varietäten ist folgende Toruswirkung:

3.18 Bemerkung Ist σ ein N -Kegel, so wird durch den Algebra-Homomorphismus

$$\mathbf{C}[S_\sigma] \rightarrow \mathbf{C}[M] \otimes_{\mathbf{C}} \mathbf{C}[S_\sigma] = \mathbf{C}[M \times S_\sigma], \quad \chi^u \mapsto \chi^u \otimes \chi^u$$

eine Toruswirkung

$$\mathbb{T}_N \times X_\sigma \rightarrow X_\sigma; \quad (t, x) \mapsto t \cdot x$$

mit

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\text{Hgr}}(M, \mathbf{C}^*) \times \text{Hom}_{\text{Hgr}}(S_\sigma, \mathbf{C}) &\rightarrow \text{Hom}_{\text{Hgr}}(S_\sigma, \mathbf{C}) \\ (t, x) &\mapsto (t \cdot x = tx: u \mapsto t(u)x(u)) \end{aligned}$$

definiert. Beide Abbildungen sind mit Seiteninklusionen verträglich. Insbesondere setzt die Torusoperation die Multiplikation von $\mathbb{T}_N = X_\sigma \subset X_\sigma$ auf X_σ fort. In der Darstellung gemäß (3.0.1) hat sie mit den Erzeugenden u_1, \dots, u_r von S_σ aus (3.5.1) die Form

$$(3.18.1) \quad \mathbb{T}_N \times X_\sigma \rightarrow X_\sigma, \quad (t, x) \mapsto (t^{u_1}x_1, \dots, t^{u_r}x_r).$$

Beweis Zu $\chi^u \otimes \chi^u \in \mathbf{C}[M \times S_\sigma]$ gehört nach (3.4.0) ersichtlich auf $\mathbb{T}_N \times X_\sigma$ die reguläre Funktion $(t, x) \mapsto t(u)x(u)$. Also ist nur die Verträglichkeit mit $\tau \prec \sigma$ zu verifizieren. Für $\sigma = \mathfrak{o}$ ist die Wirkung gerade die Multiplikation von \mathbb{T}_N . Für die offene dichte Teilmenge $X_{\mathfrak{o}}$ von X_σ schränkt sich die Wirkung $\mathbb{T}_N \times X_\sigma \rightarrow X_\sigma$ zu $\mathbb{T}_N \times X_{\mathfrak{o}} \rightarrow X_{\mathfrak{o}}$ ein, also ist die stetige Wirkung von \mathbb{T}_N auf X_σ als Fortsetzung eindeutig bestimmt. Insbesondere ergibt sich nach 3.14, daß die Wirkung auf der Hauptmenge X_τ von X_σ durch Einschränkung gegeben ist. ■

Es seien X eine G -Varietät, X' eine G' -Varietät und $\varphi: G \rightarrow G'$ ein Morphismus algebraischer Gruppen. Wir nennen einen Morphismus der algebraischen Varietäten $f: X \rightarrow X'$ (φ -) äquivariant, wenn f mit der Wirkung der Gruppen vertauschbar ist:

$$f(g(x)) = \varphi(g)(f(x)) \quad \text{für alle } x \in X, g \in G.$$

- 3.19 Bemerkung** 1) Ist τ Seite eines N -Kegels σ , so ist der Seitenmorphismus $j_{\sigma\tau}: X_\tau \rightarrow X_\sigma$ bezüglich der Wirkung aus 3.18 äquivariant.
- 2) Ist $\varphi: (N, \sigma) \rightarrow (N', \sigma')$ ein Kegelmorphismus, so ist der induzierte Morphismus $\varphi_*: X_\sigma \rightarrow X_{\sigma'}$ bezüglich $\varphi_0: \mathbb{T}_N = X_{\mathfrak{o}} \rightarrow X_{\mathfrak{o}'} = \mathbb{T}_{N'}$ äquivariant.
- 3) Sind σ in V und σ' in V' N - bzw. N' -Kegel, so ist $\mathbf{C}[S_\sigma \oplus S_{\sigma'}] = \mathbf{C}[S_\sigma] \otimes_{\mathbf{C}} \mathbf{C}[S_{\sigma'}]$ und (vgl. 3.7)

$$\mathbb{T}_{N \oplus N'} \cong \mathbb{T}_N \times \mathbb{T}_{N'} \quad \text{und} \quad X_{\sigma \oplus \sigma'} \cong X_\sigma \times X_{\sigma'}.$$

Läßt man $\mathbb{T}_{N \oplus N'}$ komponentenweise auf $X_{\sigma \oplus \sigma'}$ operieren, so wird die Produktzerlegung äquivariant, da letzteres auf den durch die entsprechenden Tori gegebenen offenen Teilmengen gilt.

- 4) Ist $\dim \sigma = d$, so gehört zur Zerlegung $\sigma = \sigma' \oplus \mathfrak{o}' \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$ eine kanonische (äquivariante) Produktzerlegung

$$(3.19.1) \quad X_\sigma \cong X_{\sigma'} \times \mathbb{T}^{n-d}.$$

Beweis für 2): Aus $\varphi(0) = 0' \in N'$ folgt, daß φ eine reguläre Abbildung $\varphi_0: X_{\mathfrak{o}} \rightarrow X_{\mathfrak{o}'}$ induziert, die nach (3.13.1) bei Identifikation mit \mathbb{T}_N bzw. $\mathbb{T}_{N'}$ ein Gruppenhomomorphismus ist. Die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}_N \times X_\sigma & \longrightarrow & X_\sigma \\ \downarrow \varphi_0 \times \varphi_* & & \downarrow \varphi_* \\ \mathbb{T}_{N'} \times X_{\sigma'} & \longrightarrow & X_{\sigma'} \end{array}$$

folgt nun daraus, daß sie für folgendes dicht liegende Teildiagramm gilt:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}_N \times X_{\mathfrak{o}} & \longrightarrow & X_{\mathfrak{o}} \\ \downarrow \varphi_0 \times \varphi_0 & & \downarrow \varphi_0 \\ \mathbb{T}_{N'} \times X_{\mathfrak{o}'} & \longrightarrow & X_{\mathfrak{o}'} \quad . \quad \blacksquare \end{array}$$

3.20 Satz Die Kategorie der Laurent-Teilalgebren und die Kategorie der affinen torischen Varietäten sind vermöge

$$\mathbb{C}[S_\sigma] \rightarrow X_\sigma, \quad \psi \mapsto \mathrm{Sp}(\psi)$$

antiäquivalent.

Beweis Nach dem Antiäquivalenzsatz [AG, 3.9] gilt eine solche Beziehung zwischen der größeren Kategorie der affinen Algebren und jener der affinen Varietäten. Wir haben daher nur zu verifizieren, daß sich in den jeweiligen (nicht vollen) Unterkategorien die Morphismen entsprechen. Nach 3.17 gehört zu einem monomialen Algebramorphismus ψ ein torischer Morphismus. Umgekehrt induziert ein torischer Morphismus $\varphi: X_\sigma \rightarrow X_{\sigma'}$ einen monomialen Algebramorphismus $\mathbb{C}(\varphi) = \varphi^*: \mathbb{C}[X_{\sigma'}] \rightarrow \mathbb{C}[X_\sigma]$, wie folgende Beschreibung von φ^* zeigt: Es existiert nach Voraussetzung ein Morphismus

$$\Phi: \mathbb{C}^r \rightarrow \mathbb{C}^{r'}, \quad x \mapsto (a_1 x^{\mu_1}, \dots, a_{r'} x^{\mu_{r'}})$$

mit $a_j \in \mathbb{C}$ und $\mu_j \in \mathbb{Z}^r$, der ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} X_\sigma & \cong & V(\mathbb{C}^r; \mathfrak{b}) & \hookrightarrow & \mathbb{C}^r \\ \downarrow \varphi & & \downarrow & & \downarrow \Phi \\ X_{\sigma'} & \cong & V(\mathbb{C}^{r'}; \mathfrak{b}') & \hookrightarrow & \mathbb{C}^{r'} \end{array}$$

induziert. Der zu Φ gehörige Homomorphismus von Polynomalgebren

$$\Phi^*: \mathbb{C}[y_1, \dots, y_{r'}] \rightarrow \mathbb{C}[x_1, \dots, x_r], \quad f \mapsto f \circ \Phi$$

ist monomial, denn es gilt $\Phi^*(y_j) = a_j x^{\mu_j}$. Aus $\Phi(V(\mathbb{C}^r; \mathfrak{b})) \subset V(\mathbb{C}^{r'}; \mathfrak{b}')$ folgt weiterhin $\Phi^*(\mathfrak{b}') \subset \mathfrak{b}$; damit gilt für den induzierten Homomorphismus

$$\varphi^*: A_{\sigma'} = \mathbb{C}[y]/\mathfrak{b}' \rightarrow \mathbb{C}[x]/\mathfrak{b} = A_\sigma \quad \blacksquare$$

Fassen wir aus 3.3 und 3.20 zusammen:

3.21 Korollar Für einen N -Kegel σ in $N_{\mathbb{R}}$ und einen N' -Kegel σ' in $N'_{\mathbb{R}}$ sind äquivalent:

- 1) σ und σ' sind isomorphe Kegel.
- 2) $A_{\sigma'}$ und A_σ sind (vermöge monomialer Algebramorphismen) isomorph.
- 3) X_σ und $X_{\sigma'}$ sind (vermöge torischer Morphismen) isomorph. \blacksquare

Dazu sei noch folgendes vermerkt: Gemäß [Gu] sind affine torische Varietäten genau dann bezüglich torischer Morphismen isomorph, wenn sie als abstrakte algebraische Varietäten isomorph sind. Interessanterweise gilt dieses Ergebnis ganz allgemein für die im folgenden eingeführten torischen Varietäten (vgl. [Bt]).

Wir schließen mit Beispielen nicht saturierter Algebren $\mathbb{C}[S]$, die folglich nicht zu (insbesondere normalen) torischen affinen Varietäten gehören:

3.22 Beispiel Es sei $S := \mathbb{Z} \cdot m_1 + \mathbb{Z} \cdot m_2 \subset \mathbb{Z}$ mit teilerfremden $m_i \in \mathbb{N}_{>0}$. Dann gilt

$$\mathbb{C}[S] = \mathbb{C}[T^{m_1}, T^{m_2}] = \mathbb{C}[Y_1, Y_2]/(Y_1^{m_2} - Y_2^{m_1}),$$

nach Aufgabe 3.5. Die zugehörige affin algebraische Varietät ist eine verallgemeinerte „Neilsche Parabel“, also eine (nicht normale) rationale Kurve mit Spitze.

Aufgabe 3.9 Es sei S eine endlich erzeugte erzeugende Unterhalbgruppe von M und \tilde{S} die „saturierte Hülle“ $\{m \in M; \exists p \in \mathbb{N} \text{ mit } pm \in S\}$. Man zeige, daß die zugehörige Varietät $X_{\tilde{S}}$ die Normalisierung von X_S ist.

Aufgabe 3.10 Für $n = 1$ und $S := \mathbb{Z} \cdot 3 + \mathbb{Z} \cdot 5 + \mathbb{Z} \cdot 7 \subset \mathbb{Z}$ gebe man $\mathbb{C}[S]$ an, beschreibe die zugehörige affine Kurve im \mathbb{C}^3 und zeige, daß sie kein idealtheoretisch vollständiger Durchschnitt ist. Man bestimme ihre Normalisierung.

Aufgabe 3.11 Es sei $\varphi : \mathbb{C}^* \rightarrow (\mathbb{C}^*)^n$ ein Morphismus abelscher Gruppen. Man zeige, daß φ von der Gestalt $\varphi(z) = (z_1^{m_1}, \dots, z_n^{m_n})$ für gewisse $m_i \in \mathbb{Z}$ ($1 \leq i \leq n$) ist.

Aufgabe 3.12 Es sei $f : X \rightarrow Y$ ein injektiver Morphismus irreduzibler algebraischer \mathbb{C} -Varietäten, dabei sei Y normal. Man zeige:

- i) Ist f dominant, so ist f birational.¹⁾
- ii) Ist f bijektiv, so ist f ein Isomorphismus von Varietäten.

Man zeige durch Beispiele, daß f in folgenden Fällen kein Isomorphismus sein muß:

- iii) f ist bijektiv, aber Y ist nicht normal.
- iv) f ist bijektiv, X und Y sind glatt, aber X ist reduzibel.

Aufgabe 3.13 Man bestimme die Einheiten in $\mathbb{R}[T_1^{\pm}, \dots, T_r^{\pm}]$ (für Aufgabe 3.11).

Aufgabe 3.14 Ist $f : \mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{T}^n$ ein Morphismus algebraischer Varietäten, so ist f auch ein Gruppenhomomorphismus (Hinweis: Aufgabe 3.13).

Kleines Wörterbuch § 3

Theorie in (V, N)	torische Theorie
$\dim V$	Dimension der torischen Varietät
N -Kegel σ	affine torische Varietät X_σ
Seite $\tau \prec \sigma$	Hauptmenge $X_\tau \subseteq X_\sigma$
0-Kegel \mathfrak{o}	Torus \mathbb{T}
Gitterpunkt $m \in M$	Monom $T^m \in \mathbb{C}[T, T^{-1}]$
Summe $m + m' \in M$	Produkt $T^m T^{m'} \in \mathbb{C}[T, T^{-1}]$
Monoid $S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$	$\mathbb{C}[S_\sigma], \text{Sp}(\mathbb{C}[S_\sigma])$
saturiertes Untermonoid	normale torische Varietät
regulärer Kegel	reguläre Varietät
Gitter N	algebraischer Torus \mathbb{T}_N
Morphismus von Untermonoiden	torischer Morphismus

¹⁾ Man verwende folgenden Satz, vgl. [Ho, III.2.4]: Es seien A eine endlich erzeugte nullteilerfreie \mathbb{C} -Algebra und B eine \mathbb{C} -Unteralgebra. Existiert zu $a \in A$ ein $\psi \in \text{Hom}_{\text{Alg}}(A, \mathbb{C})$ mit der Eigenschaft „Für alle $\varphi \in \text{Hom}_{\text{Alg}}(A, \mathbb{C})$ mit $\varphi|_B = \psi|_B$ gilt $\varphi(a) = \psi(a)$ “, so ist $a \in Q(B)$.

4. Fächer und torische Varietäten

In diesem Paragraphen werden spitze Kegel im n -dimensionalen Vektorraum V zu Fächern zusammengefügt, was möglich ist, da deren Dual nach 1.21 von maximaler Dimension ist.. Wenn es sich dabei um N -Kegel handelt erhalten wir N -Fächer, mit denen affine torische Varietäten zu torischen Varietäten verheftet werden. Erst im Anhang beschäftigen wir uns ernsthaft mit Fächern, die nicht von einem Gitter kommen.

4.1 Definition *Unter einem Fächer Δ im V verstehen wir eine nichtleere endliche Menge von spitzen Kegeln in V , so daß gilt:*

- 1) *Jede Seite eines Kegels σ aus Δ gehört zu Δ ;*
- 2) *der Durchschnitt je zweier Kegel aus Δ ist eine gemeinsame Seite beider Kegel.*

Sind alle auftretenden Kegel N -Kegel, so heißt Δ ein N -Fächer.

Ist Δ ein Fächer und sind $\sigma_1, \dots, \sigma_r \in \Delta$, so bezeichnen wir mit $\mathfrak{S}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ den zugehörigen Seitenfächer, d.h. den kleinsten Teilfächer von Δ , der $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ enthält. Jeder Fächer ist Seitenfächer seiner (bezüglich Inklusion) maximalen Kegel. Weiter sei

- Δ^j die Menge der j -dimensionalen Kegel aus Δ ,
- $\Delta^{\leq j}$ der Teilfächer der höchstens j -dimensionalen Kegel aus Δ ,
- $\Delta^{\geq j}$ die Menge der mindestens j -dimensionalen Kegel aus Δ ,
- Δ^{\max} die Menge der maximalen Kegel aus Δ .

Für einen N -Fächer Δ existiert zu jedem *Kantenvektor* $\rho_i \in \Delta^1$ ein eindeutig bestimmter Vektor minimaler Länge $v_i \in N$ mit $\rho_i = \mathbb{R}_{\geq 0} v_i$; wir nennen v_i einen *primitiven Fächervektor* und schreiben häufig auch v_i statt ρ_i .

Ist $\Lambda \subset \Delta$ ebenfalls ein Fächer und damit ein Teilfächer von Δ , so schreiben wir $\Lambda \prec \Delta$.

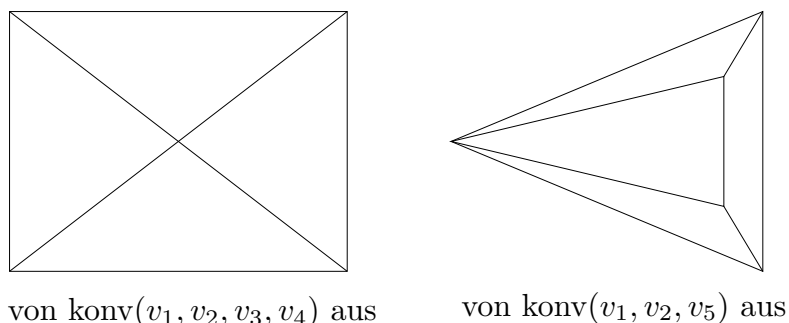
4.2 Beispiele 0) Für $n = 0$ gibt es nur den Fächer $\Delta = \{\mathfrak{o}\}$.

- 1) Für $n = 1$ gibt es (bis auf naheliegende Isomorphie) genau die drei \mathbb{Z} -Fächer

$$\Delta = \{\mathfrak{o}\}, \quad \mathfrak{S}(e_1) \quad \text{und} \quad \mathfrak{S}(e_1, -e_1).$$

- 2) Ist σ ein N -Kegel, so nennen wir den Seitenfächer $\mathfrak{S}(\sigma)$ auch einen „affinen Fächer“, weil solche Fächer genau die affinen Varietäten liefern (vgl. Aufgabe 7.2).

3) In Beispiel 1.26 wurden explizit ein \mathbb{Z}^2 -Fächer und ein \mathbb{Z}^3 -Fächer konstruiert. Man kann etwa den dreidimensionalen Fächer graphisch leicht durch sein „Schlegeldiagramm“ bezüglich einer ausgewählten Seite charakterisieren, worunter folgendes zu verstehen ist: Man stelle sich das „Polytop“ $P := \text{konv}(v_1, \dots, v_r)$ als Glaskörper vor. Nähert man sich ihm als Betrachter hinreichend weit einer Facette F , so sieht man alle anderen Flächen von P in dieser Seite realisiert. Damit erhält man ein $(n - 1)$ -dimensionales Bild, das P charakterisiert. Als Beispiel für zwei verschiedene Seitendurchsichten einer dreidimensionalen Pyramide mit quadratischer Basis vgl. Figur 4.1



FIGUR 4.1 Schlegeldiagramme zur dreidimensionalen Pyramide

Eine entscheidende Eigenschaft von Schlegeldiagrammen läßt sich wie folgt formulieren (für Einzelheiten vgl. [Zie, Prop. 5.6]): Das Schlegeldiagramm eines Polytops P zur Facette F ist eine zum „Komplex“ aller von F verschiedenen echten Seiten von P kombinatorisch äquivalente polytopische Unterteilung von F .

4) Für jeden N -Fächer Δ bilden die Teilmengen

$$\Delta_{\text{reg}} := \{\sigma \in \Delta; \sigma \text{ ist regulär}\} \quad \text{und} \quad \Delta_s := \{\sigma \in \Delta; \sigma \text{ ist simplizial}\}$$

sowie für $\sigma \neq \sigma' \in \Delta$ der Randfächer

$$\partial\sigma := \{\tau \not\preceq \sigma\}$$

einen Teilfächer von Δ . ■

Jedem N -Fächer Δ ist auf kanonische Weise eine algebraische Prävarietät X_Δ zugeordnet: Für $\sigma \in \Delta$ sei X_σ die zugehörige affine torische Varietät. Zu $\sigma \cap \sigma'$ gehören nach 3.14 offene Einbettungen

$$X_\sigma \supseteq X_{\sigma \cap \sigma'} \subseteq X_{\sigma'}$$

Aus der Funktorialität der Zuordnung $\sigma \mapsto X_\sigma$, vgl. 3.17, folgt, daß sich die X_σ für $\sigma \in \Delta$ zu einer Prävarietät X_Δ verheften. Wir verwenden dazu folgendes ([AG, Aufgabe 11.3], [Ht, II.2.12])

4.3 Verheftungslemma *Es seien eine endliche Familie $\{X_i; i \in I\}$ von Prävarietäten gegeben, dazu für alle $i, j \in I$ offene Untervarietäten $U_{ij} \subseteq X_i$ sowie Isomorphismen $\varphi_{ji}: U_{ij} \xrightarrow{\cong} U_{ji}$, so daß für alle i, j, k gilt:*

- 1) $U_{ii} = X_i, \varphi_{ii} = \text{id}_{X_i}$;
- 2) $\varphi_{ji}(U_{ij} \cap U_{ik}) = U_{ji} \cap U_{jk}$;
- 3) $\varphi_{ji} = \varphi_{jk} \circ \varphi_{ki}$.

Dann existiert (bis auf Isomorphie eindeutig) eine Prävarietät X mit offenen Einbettungen $\varphi_i: X_i \rightarrow X$, so daß gilt:

$$X = \bigcup_i \varphi_i(X_i) \quad \text{und} \quad \varphi_i(X_i) \cap \varphi_j(X_j) = \varphi_i(U_{ij}) = \varphi_j(U_{ji}), \quad \forall i, j \in I.$$

Weiter ist folgende universelle Eigenschaft erfüllt: Ist $(\psi_i : X_i \rightarrow Y)_{i \in I}$ eine Familie von Morphismen von Prävarietäten mit

$$\psi_i = \psi_j \circ \varphi_{ji} \quad \text{auf} \quad U_{ij} \quad \text{für alle } i, j,$$

so existiert ein eindeutig bestimmter Morphismus $\psi: X \rightarrow Y$ mit $\psi \circ \varphi_j = \psi_j$ für alle j .

4.4 Bemerkung Sind Δ_i N_i -Fächer in \mathbb{R}^{n_i} für $i = 1, \dots, r$, so ist $\bigoplus_{i=1}^r \Delta_i$ ein $\bigoplus_{i=1}^r N_i$ -Fächer in $\bigoplus_{i=1}^r \mathbb{R}^{n_i}$, vgl. 3.7.

Aufgabe 4.1 Für $\sigma_1, \sigma_2 \in \Delta$ gilt

$$X_{\sigma_1 \cap \sigma_2} = X_{\sigma_1} \cap X_{\sigma_2}$$

(für 4.5).

Als Verallgemeinerung von 3.19 erhalten wir:

4.5 Lemma Für N_i -Fächer Δ_i mit $i = 1, 2$ gilt:

$$X_{\Delta_1 \oplus \Delta_2} \cong X_{\Delta_1} \times X_{\Delta_2}.$$

Für die zugehörigen Algebren regulärer Funktionen ist damit

$$\mathcal{O}(X_{\Delta_1 \oplus \Delta_2}) \cong \mathcal{O}(X_{\Delta_1}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}(X_{\Delta_2}).$$

Beweis Die Prävarietät $X_{\Delta_1 \oplus \Delta_2}$ wird von affinen Mengen $X_{\sigma_1 \oplus \sigma_2}$ überdeckt; für die Durchschnitte gilt nach 3.19 und Aufgabe 4.1:

$$\begin{aligned} X_{\sigma_1 \oplus \sigma_2} \cap X_{\sigma'_1 \oplus \sigma'_2} &= X_{(\sigma_1 \oplus \sigma_2) \cap (\sigma'_1 \oplus \sigma'_2)} = X_{(\sigma_1 \cap \sigma'_1) \oplus (\sigma_2 \cap \sigma'_2)} \\ &= X_{\sigma_1 \cap \sigma'_1} \times X_{\sigma_2 \cap \sigma'_2} = (X_{\sigma_1} \cap X_{\sigma'_1}) \times (X_{\sigma_2} \cap X_{\sigma'_2}). \end{aligned}$$

Also ist die Beschreibung der Verheftung gemäß 4.3 längs offener affiner Teilmengen von $X_{\Delta_1 \oplus \Delta_2}$ wie die von $X_{\Delta_1} \times X_{\Delta_2}$. Wir sehen in 4.6, daß diese Prävarietäten sogar Varietäten sind, also folgt die Darstellung der Algebren regulärer Funktionen aus der

allgemein gültigen Produktregel für algebraische Varietäten ([AG, Satz 3.10], [Sha, § 2.2 Ex. 4]). ■

4.6 Satz Die Prävarietät X_Δ ist eine (zusammenhängende) normale rationale n -dimensionale algebraische Varietät, genannt „torische Varietät zum Fächer Δ “.

Beweis Wir haben vor allem zu zeigen, daß X_Δ separiert ist, also das Bild der Diagonalabbildung $d: X_\Delta \rightarrow X_\Delta \times X_\Delta$ mit dem gemäß 4.5 gebildeten Produkt abgeschlossen bzw.

$$X_\Delta \times X_\Delta \setminus d(X_\Delta) = \bigcup_{\sigma, \sigma' \in \Delta} (X_\sigma \times X_{\sigma'} \setminus d(X_{\sigma \cap \sigma'}))$$

offen ist. Dies verifizieren wir in 4.7.

Der Torus \mathbb{T} ist nach 3.15 in jeder affinen Karte X_σ als offene dichte Teilmenge enthalten; also liegt \mathbb{T} auch in X_Δ offen und dicht. Daher ist mit X_σ auch X_Δ n -dimensional, rational und zusammenhängend [AG 4.10]. Die Normalität ist somit nur noch lokal zu verifizieren, was in 3.5 geschehen ist. ■

Wir haben folgendes Ergebnis verwendet:

4.7 Lemma Sind σ und σ' N -Kegel, deren Durchschnitt eine gemeinsame Seite ist, dann ist die Diagonalabbildung $d: X_{\sigma \cap \sigma'} \rightarrow X_\sigma \times X_{\sigma'}$ eine (abgeschlossene) Einbettung.

Beweis Zunächst ist $X_{\sigma \cap \sigma'}$ affin. Daher ist der injektive Morphismus d eine Einbettung, wenn der zugehörige Komorphismus affiner Algebren

$$d^*: \mathbb{C}[S_\sigma \oplus S_{\sigma'}] = \mathbb{C}[S_\sigma] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[S_{\sigma'}] \rightarrow \mathbb{C}[S_{\sigma \cap \sigma'}], \quad \chi^u \otimes \chi^{u'} \mapsto \chi^{u+u'}$$

surjektiv ist (vgl. [AG, 3.36]). Dazu genügt es, die Surjektivität von

$$S_\sigma \oplus S_{\sigma'} \rightarrow S_{\sigma \cap \sigma'}, \quad u \oplus u' \mapsto u + u'$$

zu zeigen, was aus dem Separationssatz 2.11 folgt: $S_{\sigma \cap \sigma'} = S_\sigma + S_{\sigma'}$. ■

4.8 Beispiele 0) Ist σ ein N -Kegel, so ist $X_\sigma = X_{\mathfrak{G}(\sigma)}$, vgl. 3.14.

1) Für $N = \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}^1$ gibt es nach 4.2 drei affine Algebren

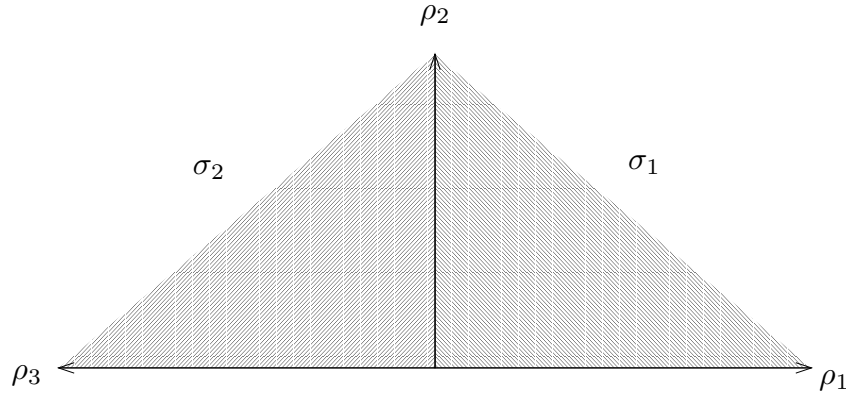
$$A_{\text{keg}(e_1)} = \mathbb{C}[T_1] \hookrightarrow A_{\mathfrak{o}} = \mathbb{C}[T_1, T_1^{-1}] \hookrightarrow A_{\text{keg}(-e_1)} = \mathbb{C}[T_1^{-1}].$$

Dazu gehören die torischen Varietäten

$$\mathbb{C} \cong \text{Spec}(A_{\text{keg}(e_1)}) \xleftarrow{i_+} \text{Spec}(A_{\mathfrak{o}}) = \mathbb{C}^* \xrightarrow{i_-} \text{Spec}(A_{\text{keg}(-e_1)}) \cong \mathbb{C}$$

mit der Verheftung $i_- \circ i_+^{-1}(z) = z^{-1}$. Somit existiert nur noch eine weitere eindimensionale torische Varietät, nämlich

$$X_{\mathfrak{G}(e_1, -e_1)} \cong \mathbb{P}^1.$$



FIGUR 4.2 Fächer zu $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{C}$

2) Es seien $N = \mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$,

$$v_1 = e_1, v_2 = e_2, v_3 = -e_1, \sigma_1 = \text{keg}(v_1, v_2), \sigma_2 = \text{keg}(v_2, v_3)$$

und $\Delta = \mathfrak{S}(\sigma_1, \sigma_2)$. Dann ist

$$\begin{aligned} X_{\sigma_1} &\cong \mathbb{C}^2 \text{ mit der Algebra } \mathbb{C}[T_1, T_2] \\ X_{\sigma_2} &\cong \mathbb{C}^2 \text{ mit der Algebra } \mathbb{C}[T_1^{-1}, T_2] \end{aligned}$$

und daher $X_\Delta = \mathbb{P}_1 \times \mathbb{C}$. Natürlich kann dies auch mit 4.5 bewiesen werden.

3) Es sei (v_0, \dots, v_n) ein Erzeugendensystem von $N \subset V = N_{\mathbb{R}}$ mit $\sum v_i = 0$; insbesondere ist kein v_i Null, und für jedes i ist $(v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n)$ eine Basis des Gitters N . Als explizite Beispiele seien erwähnt:

α) Ist eine Gitterbasis (v_1, \dots, v_n) von N gegeben, so ergänze man sie durch

$$v_0 := -\sum_{i=1}^n v_i.$$

β) Man setze $N = \mathbb{Z}^{n+1}/\mathbb{Z}(1, \dots, 1) \subset V := N_{\mathbb{R}}$ und $v_i := e_i + \mathbb{Z}(1, \dots, 1) \in N$.

Für $\sigma_i := \text{keg}(v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n)$ und $\Delta := \mathfrak{S}(\sigma_0, \dots, \sigma_n)$ gilt dann $X_\Delta \cong \mathbb{P}_n$.

Zum Beweis konstruieren wir nach der in 4.3 angegebenen Methode einen Isomorphismus $\varphi: X_\Delta \rightarrow \mathbb{P}_n$ an: Für jedes $i = 0, \dots, n$ sei das System $(v_{0i}^*, \dots, v_{ni}^*)$ die duale Basis von $(v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n)$ sowie $v_{ii}^* := 0$. Ersichtlich ist dann der Morphismus

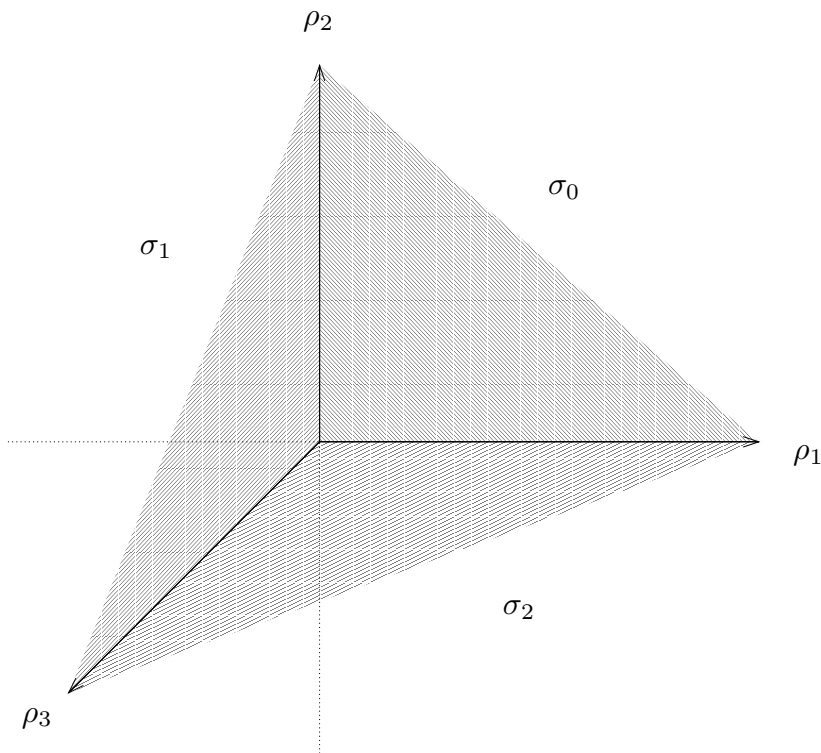
$$\varphi_i: X_{\sigma_i} \rightarrow \mathbb{P}_n, \quad (x: S_{\sigma_i} \rightarrow \mathbb{C}) \mapsto [x(v_{0i}^*), \dots, x(v_{ni}^*)],$$

wegen $x(v_{ii}^*) = 1$ ein Isomorphismus von X_{σ_i} auf die Standardkarte

$$U_i := \{[z_0, \dots, z_n] \in \mathbb{P}_n; z_i = 1\}$$

des \mathbb{P}_n . Um zu zeigen, daß $(\varphi_i)_{i=0, \dots, n}$ einen Isomorphismus zwischen X_Δ und \mathbb{P}_n definiert, bleibt für $i \neq j$ wegen $X_{\sigma_i} \cap X_{\sigma_j} = X_{\sigma_i \cap \sigma_j}$ zu zeigen:

$$\varphi_i|_{X_{\sigma_i \cap \sigma_j}} = \varphi_j|_{X_{\sigma_i \cap \sigma_j}}.$$



FIGUR 4.3 Fächer zu \mathbb{P}^2

Es seien zur Vereinfachung der Notation beispielsweise $i = 0$ und $j = n$ und damit $\sigma_0 \cap \sigma_n = \text{keg}(v_1, \dots, v_{n-1})$. Dann gilt $v_{kn}^* - v_{k0}^* = v_{0n}^*$ für $1 \leq k \leq n - 1$, denn es ist $v_{kn}^*(v_\ell) = \delta_{k\ell}$ für $1 \leq \ell \leq n - 1$, also ergibt sich mit $v_{00}^* = 0 = v_{nn}^*$ aus

$$(x(v_{0n}^*), \dots, x(v_{nn}^*)) = x(v_{0n}^*) \cdot (x(v_{00}^*), \dots, x(v_{n0}^*))$$

für $x \in X_{\sigma_0 \cap \sigma_n}$ die Behauptung.

- 4) Nach 4.5 sind Produkte torischer Varietäten wieder eine torische Varietät, insbesondere gilt das für Varietäten der Form $(\mathbb{C}^*)^k \times \mathbb{C}^\ell \times (\mathbb{P}^n)^m$.

Aufgabe 4.2 Es seien $N = \mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$, $v_1 = e_1, v_2 = e_2, v_3 = -e_1, v_4 = -e_2$, ferner

$$\sigma_1 = \text{keg}(v_1, v_2), \sigma_2 = \text{keg}(v_2, v_3), \sigma_3 = \text{keg}(v_3, v_4), \sigma_4 = \text{keg}(v_4, v_1).$$

Man bestimme X_Δ für folgende Fächer Δ :

$$\mathfrak{S}(\sigma_1), \mathfrak{S}(\sigma_2, \sigma_3), \mathfrak{S}(\sigma_1, \sigma_4), \mathfrak{S}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4).$$

4.9 Beispiel Wir kommen auf das Beispiel 3.16 zurück: Es seien $N := \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}^2$ und $\sigma_{ij} = \text{keg}(v_i, v_j)$ mit

$$v_1 = e_2, v_2 = 2e_1 - e_2, v_3 = -e_1.$$

Wir erhalten einen Fächer $\Delta = \mathfrak{S}(\sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31})$ in \mathbb{R}^2 . Nach 2.9 gilt

$$S_{13} + \mathbb{N} \cdot (-f_2) = S_3 = S_{23} + \mathbb{N} \cdot (f_2).$$

In 3.16 haben wir X_3 als Hauptmenge wie folgt realisiert:

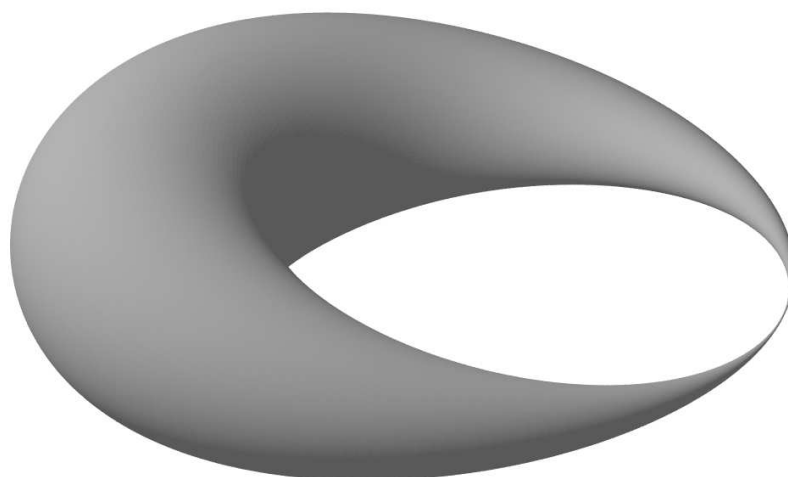
In $X_{13} \cong \mathbb{C}^2$ durch die Koordinate χ^{f_2} ;

in $X_{23} \cong \mathbb{C}^2$ durch die Koordinate χ^{-f_2} .

Daher ist $X_{13} \cup X_{23}$ die in einem Punkt aufgeblasene Ebene \mathbb{C}^2 und enthält damit eine projektive Gerade. Diese kommt zum *affinen* quadratischen Kegel X_{12} noch hinzu. Entsprechend erhalten wir aus den Beziehungen (vgl. 2.9)

$$\begin{aligned} S_{12} + \mathbb{N} \cdot (-f_1) &= S_1 = S_{13} + \mathbb{N} \cdot (f_1) \\ S_{12} + \mathbb{N} \cdot (-(f_1 + 2f_2)) &= S_2 = S_{23} + \mathbb{N} \cdot (f_1 + 2f_2), \end{aligned}$$

so daß auch hier bei der Verheftung eine projektive Gerade auftritt. Insgesamt erhalten wir den *projektiven* quadratischen Kegel, vgl. Figur 4.4.



FIGUR 4.4 Projektiver quadratischer Kegel

Aufgabe 4.3 Man untersuche analog zu 4.9 das Beispiel 1.26 für $n = 3$.

Aufgabe 4.4 In den Bezeichnungen von 4.9 zeige man für alle $i \neq j$:

- i) $X_j = X_{ij} \setminus \mathbb{C}$;
- ii) $X_\Delta \setminus \mathbb{P}^1 = X_{ij}$. ■

Aus Kegelmorphismen können wir nun Fächermorphismen konstruieren:

4.10 Definition Für $i = 1, 2$ seien Δ_i N_i -Fächer und $\varphi: N_1 \rightarrow N_2$ ein Gitterhomomorphismus. Für jedes $\sigma_1 \in \Delta_1$ existiere ein $\sigma_2 \in \Delta_2$, für das φ einen Kegelmorphismus $(N_1, \sigma_1) \rightarrow (N_2, \sigma_2)$ induziert. Dann schreiben wir $\varphi: (N_1, \Delta_1) \rightarrow (N_2, \Delta_2)$ und nennen dies einen Fächermorphismus.

Offensichtlich bildet die Klasse der Gitterfächer (N, Δ) mit diesen Morphismen eine Kategorie, die wir als Kategorie der Gitterfächer FAN bezeichnen wollen.

4.11 Beispiel Es seien $\sigma = \text{keg}(v_1, \dots, v_r) \in \Delta$ und $v \in \sigma^\circ \cap N$, etwa $v = \sum_{i=1}^r v_i$. Der Fächer Δ' entstehe aus Δ , indem man σ durch die Menge der Simplizes $\text{keg}(v, \tau)$ für $\tau \prec_1 \sigma$ ersetzt. Dann induzieren id_N und die Mengengleichheit $|\Delta'| = |\Delta|$ einen „Unterteilung“ genannten Fächermorphismus $(N, \Delta') \rightarrow (N, \Delta)$.

4.12 Satz Jeder Fächermorphismus $\varphi: (N_1, \Delta_1) \rightarrow (N_2, \Delta_2)$ induziert eindeutig einen Morphismus torischer Varietäten

$$X(\varphi): X_{\Delta_1} \rightarrow X_{\Delta_2}.$$

Beweis a) Es sei zunächst Δ_1 ein affiner Fächer $\mathfrak{S}(\sigma_1)$. Wir zeigen, daß zu $\sigma_2 \in \Delta_2$ mit $\varphi(\sigma_1) \subset \sigma_2$ ein Morphismus $\varphi_*: X_{\sigma_1} \rightarrow X_{\sigma_2} \subseteq X_{\Delta_2}$ gehört, der von der Wahl von σ_2 unabhängig ist, so daß $\varphi_*: X_{\sigma_1} \rightarrow X_{\Delta_2}$ wohldefiniert ist. Gilt nämlich auch noch $\varphi(\sigma_1) \subset \tau_2 \in \Delta_2$, so sei ohne Einschränkung $\tau_2 \prec \sigma_2$ mit der Inklusionsabbildung j . Wegen der Funktorialität von $X(\varphi)$ für Kegel (vgl. 2.17 und 3.20) läßt sich der Morphismus $\varphi_*: X_{\sigma_1} \rightarrow X_{\sigma_2} \subseteq X_{\Delta_2}$ mit dem Seitenmorphismus $j_{\sigma_2 \tau_2}$ eindeutig in der Form

$$X_{\sigma_1} \xrightarrow{\varphi_*} X_{\tau_2} \xrightarrow{j_{\sigma_2 \tau_2}} X_{\sigma_2} \subseteq X_{\Delta_2}$$

faktorisieren.

b) Für $\sigma_1, \tau_1 \in \Delta_1$ mit $\varphi(\sigma_1) \cup \varphi(\tau_1) \subset \sigma_2 \in \Delta_2$ ist für 4.3 die Verträglichkeit der beiden möglichen Definitionen von φ_* auf $X_{\sigma_1} \cap X_{\tau_1} = X_{\sigma_1 \cap \tau_1}$ zu zeigen. Dazu sei ohne Einschränkung $\tau_1 \prec \sigma_1$, also X_{τ_1} Hauptmenge von X_{σ_1} , und wieder folgt aus der Funktorialität für Kegel, vgl. 3.17, die gesuchte Übereinstimmung. Die universelle Eigenschaft der Verklebung aus 4.3 garantiert damit die (eindeutige) Existenz eines globalen Morphismus $X(\varphi)$. ■

4.13 Beispiel Ist $j: \Lambda \prec \Delta$ die Inklusion eines Unterfächers, so ist der zugehörige Morphismus $X(j): X_\Lambda \rightarrow X_\Delta$ eine offene Einbettung.

Beweis Auf jedem X_σ für $\sigma \in \Lambda$ ist das evident; da die Verheftungsvorschriften auf beiden Seiten gleich sind, gilt dies auch global. ■

Für einen Fächermorphismus φ ist zu $\sigma_1 \in \Delta_1$ das kleinste $\sigma_2 \in \Delta_2$ mit der Eigenschaft „ $\varphi(\sigma_1) \subset \sigma_2$ “ eindeutig bestimmt. Eine häufig nützliche Charakterisierung dieses σ_2 gibt die folgende

Aufgabe 4.5 Ist $\varphi: (N_1, \Delta_1) \rightarrow (N_2, \Delta_2)$ ein Fächermorphismus, so existiert zu jedem $\sigma_1 \in \Delta_1$ genau ein $\sigma_2 \in \Delta_2$ mit

$$\varphi(\sigma_1^\circ) \subset \sigma_2^\circ.$$

Schließlich wollen wir als Verallgemeinerung von 3.18 die Wirkung von \mathbb{T}_N auf X_Δ einführen, welche den Namen „torische Varietät“ rechtfertigt:

4.14 Bemerkung Ist Δ ein N -Fächer, so gehört zum Fächermorphismus

$$\mu_\Delta: (N \oplus N, \mathfrak{o} \oplus \Delta) \rightarrow (N, \Delta), \quad n_1 \oplus n_2 \mapsto n_1 + n_2$$

ein kanonischer Morphismus algebraischer Varietäten

$$X(\mu_\Delta): \mathbb{T}_N \times X_\Delta \rightarrow X_\Delta,$$

der die Gruppenwirkung $\mathbb{T}_N \times X_\mathfrak{o} \rightarrow X_\mathfrak{o}$ fortsetzt.

Beweis Aufgrund der Funktorialität der Konstruktion kommutiert für jedes $\sigma \in \Delta$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{T}_N & \times & X_\sigma & \xrightarrow{X(\mu_\sigma)} & X_\sigma \\ & & \cap & & \cap \\ \mathbb{T}_N & \times & X_\Delta & \xrightarrow{X(\mu_\Delta)} & X_\Delta \end{array},$$

also setzt $X(\mu_\Delta)$ – aus Stetigkeitsgründen eindeutig – den Morphismus $X(\mu_\sigma)$ fort. Dabei ist für $\sigma = \mathfrak{o}$ nach 3.18 die Abbildung $X(\mu_\sigma)$ die Multiplikation von \mathbb{T}_N . ■

4.15 Korollar Ist Δ ein N -Fächer, so ist X_Δ eine algebraische \mathbb{T}_N -Varietät, die eine offen dichte \mathbb{T}_N -Bahn enthält. Ist $\varphi: (N_1, \Delta_1) \rightarrow (N_2, \Delta_2)$ ein Fächermorphismus, so ist $X(\varphi): X_{\Delta_1} \rightarrow X_{\Delta_2}$ äquivariant bezüglich der Toruswirkungen von \mathbb{T}_N und $\mathbb{T}_{N'}$.

Beweis Aus der vorangehenden Bemerkung ergibt sich die Torusoperation; nach 3.18 existiert eine Zariski-offene dichte Bahn der Operation. Die Vertauschbarkeit mit den Torusoperationen folgt mit 3.19 2) daraus, daß die Verheftungen mit den Torusoperationen verträglich sind. ■

Damit ist jede torische Varietät eine \mathbb{T} -Varietät, die nach 3.18 eine dichte Bahn \mathbb{B}_0 enthält. Durch Wahl eines „Basispunktes“ $x_0 \in \mathbb{B}_0 \subset X_\Delta$ legt man umkehrbar eindeutig eine offene Einbettung

$$\mathbb{T}_N \cong \mathbb{T}_N \cdot x_0 \cong \mathbb{B}_0 \subset X_\Delta$$

fest, für welche die Wirkung von \mathbb{T}_N auf X_Δ die so erhaltene Multiplikation auf \mathbb{B}_0 fortsetzt.

Wir werden in 8.3 sehen, daß man vollständige torische Varietäten gerade durch Fächer folgenden Typs erhält:

4.16 Definition Ein Fächer Δ heißt vollständig, falls

$$V = |\Delta| := \bigcup_{\sigma \in \Delta} \sigma$$

gilt. Für eine Teilmenge Λ von Δ wird $|\Lambda|$ auch als „Träger von Λ “ bezeichnet.

Aufgabe 4.6 Für einen nicht vollständigen Fächer Δ zeige man:

- i) Ist $n < 4$, so kann man Δ zu einem Fächer $\tilde{\Delta}$ ergänzen, für den $|\tilde{\Delta}|$ konvex ist und $\Delta^1 = \tilde{\Delta}^1$ gilt²⁾.
- ii) Ist $|\Delta|$ n -dimensional und konvex, so kann man Δ zu einem vollständigen Fächer $\hat{\Delta}$ ergänzen, der genau einen zusätzlichen Strahl $\rho \in \hat{\Delta}^1$ besitzt.

Jeder Fächer Δ hat als endliche Menge mit der partiellen Ordnung \prec intuitiv so etwas wie eine kombinatorische Struktur. Wir wollen diesen Begriff präzisieren, da es eine interessante Fragestellung ist, welche Daten von X_Δ nur von der kombinatorischen Struktur von Δ abhängen; wir sprechen dann von „kombinatorischen Invarianten“ von X_Δ . Dazu bedienen wir uns einer Topologie auf Δ :

Aufgabe 4.7 Für einen Fächer Δ zeige man:

- i) Es gibt eine (Fächertopologie genannte) Topologie auf Δ , in der die nichtleeren offenen Mengen genau durch die Teilfächer Λ von Δ gegeben sind.
- ii) Die Topologie ist für $\Delta \neq \{\mathfrak{o}\}$ nicht hausdorffsch. Zu je zwei verschiedenen Punkten existiert jedoch für wenigstens einen der beiden eine Umgebung, welche den anderen nicht enthält. Man gebe eine Basis der Topologie an und charakterisiere die minimalen (nicht leeren) offenen bzw. abgeschlossenen Teilmengen sowie den Abschluß von Punkten.

Wir sprechen vom „Fächerraum“ Δ , wenn wir Δ mit der Fächertopologie betrachten.

4.17 Definition Zwei Fächer Δ_1, Δ_2 in V heißen kombinatorisch äquivalent, wenn ihre Fächerräume homöomorph sind.

Für $n \leq 2$ ist jeder vollständige Fächer Δ kombinatorisch durch die Zahlen $f_j(\Delta)$ der j -dimensionalen Seiten mit $j = 1, 2$ charakterisiert. Dies gilt nicht allgemein:

Aufgabe 4.8 Man gebe zwei vollständige, kombinatorisch nicht äquivalente Fächer Δ_i mit gleichen Seitenzahlen $f_j(\Delta_i)$ an.

Sind Δ und Δ' kombinatorisch äquivalent, so brauchen die zugehörigen Varietäten nicht homöomorph zu sein:

4.18 Beispiel Es seien $N = \mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2 = V$, ferner Δ der Fächer zu \mathbb{P}_2 aus 4.8 3a) und Δ' der Fächer zum projektiven quadratischen Kegel gemäß 4.9. Dann ist X_Δ singularitätenfrei, während der quadratische Kegel eine Singularität in 0 hat; diese Singularität ist nicht einmal ein Homologiemannigfaltigkeitspunkt. ■

Wir kommen nun zum zentralen Satz, der die Struktur der Beziehung zwischen der elementaren Konvexgeometrie und der Theorie torischer Varietäten zusammenfaßt. Für eine systematische Darstellung verwenden wir die Kategorien FAN und die Kategorie TOV der torischen Varietäten: Die Objekte der Kategorie TOV sind Paare (\mathbb{T}, X) , wobei \mathbb{T} ein Torus und X eine normale \mathbb{T} -Varietät ist, die \mathbb{T} als offene dichte \mathbb{T} -Untervarietät enthält, (i.e., für alle $t, x \in \mathbb{T}$ gilt $tx = t \cdot x$). Die Morphismen in TOV

$$f: (\mathbb{T}, X) \rightarrow (\mathbb{T}', X')$$

²⁾ Für $n = 4$ wird in Aufgabe 5.17 ein Gegenbeispiel behandelt.

sind durch Varietätenmorphismen $f: X \rightarrow X'$ gegeben, die auf \mathbb{T} einen Gruppenmorphismus $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}'$ induzieren (damit gilt für alle $t \in \mathbb{T}$ und $x \in X$ die Gleichung $f(t \cdot x) = f(t) \cdot f(x)$).

Nach 4.15, 3.5 und 4.12 enthält die Kategorie TOV alle über Fächer konstruierten torischen Varietäten und ihre Morphismen; das folgende Ergebnis besagt insbesondere, daß TOV keine weiteren enthält:

4.19 Theorem *Der Funktor*

$$X: FAN \rightarrow TOV, \quad (N, \Delta) \mapsto X(N, \Delta) := (\mathbb{T}, X_\Delta), \quad \varphi \mapsto X(\varphi) := \varphi_*$$

ist eine Äquivalenz von Kategorien.

Da wir für den Beweis noch etliche Vorbereitungen benötigen, werden wir ihn auf § 6 verschieben.

Aufgabe 4.9 Für $\sigma, \tau \in \Delta$ zeige man:

$$X_\tau \subsetneq X_\sigma \iff \tau \not\preceq \sigma.$$

Kleines Wörterbuch § 4

Theorie in (V, N)	torische Theorie
N -Fächer Δ	torische Varietät X_Δ
direkte Summe von Fächern	direktes Produkt torischer Varietäten
Durchschnitt von Fächerkegeln	Durchschnitt zugehöriger Teilvarietäten
Morphismus von Fächern	torischer Morphismus

Kapitel II

Polytopische Fächer, Bahnenzerlegung

In diesem Kapitel gehen wir einerseits auf eine besonders interessante Beispielklasse von torischen Varietäten ein, die sich in 16.19 als die der projektiven torischen Varietäten herausstellen wird, andererseits bringen wir die für das Verständnis der Struktur grundlegende Bahnenzerlegung torischer Varietäten.

5. Polytope und torische Varietäten

In Analogie zu den polyedrischen Kegeln betrachten wir nun Polytope im n -dimensionalen Vektorraum V . Sie sollen uns zunächst dazu dienen, Fächer, und damit torische Varietäten, zu beschreiben. Die Rückwirkung der Algebraischen Geometrie auf die Untersuchung von Polytopen ist erheblich tieferliegend.

Einerseits erzeugt jedes Polytop K in V , das 0 als inneren Punkt enthält, auf einfache geometrische Weise einen Fächer Δ^K , vgl. 5.20. Wichtiger ist für uns aber der Fall eines Polytops in V^* , dem wir über das duale Polytop K^\vee in V einen mit Δ_K bezeichneten Fächer Δ^{K^\vee} zuordnen werden (allgemeiner wird das der Fächer über die äußeren Normalkegel des Polytops K sein, was unabhängig von der Lage des Punktes 0 möglich ist).

5.1 Definition *Ist A eine endliche Teilmenge von V , so heißt ihre konvexe Hülle*

$$K := \text{konv}(A) := \left\{ \sum_i r_i a_i; r_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}, a_i \in A, \sum_i r_i = 1 \right\}$$

ein Polytop in V . Mit

$$\mathfrak{P} := \mathfrak{P}(V) := \{K; K \text{ Polytop in } V\} \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{P}_0 := \{K \in \mathfrak{P}; 0 \in \overset{\circ}{K}\}$$

bezeichnen wir die Menge aller Polytope (bzw. Polytope mit 0 als innerem Punkt) in V .

Damit sind Polytope insbesondere kompakt und zusammenhängend. Sie können leer sein, während Kegel definitionsgemäß immer wenigstens den Punkt 0 enthalten.

Für eine Linearform $u \in V^*$ und ein $a \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Hyperebene bzw. den Halbraum

$$H^=a(u) = \{v \in V; \langle u, v \rangle = a\} \quad \text{und} \quad H^{\geq a}(u) := \{v \in V; \langle u, v \rangle \geq a\}.$$

Dies verallgemeinert $u^\perp = H^{=0}(u)$ und $u^\vee = H^{\geq 0}(u)$ aus § 1. Man bezeichnet \emptyset und K als uneigentliche Seiten von K und nennt $S \subset K$ eine *eigentliche Seite des Polytops* K , in Zeichen $S \not\supseteq K$, wenn $S \neq K$ nicht leer und von der Form $K \cap H^{=a}(u)$ mit $K \subset H^{\geq a}(u)$ ist; ersichtlich läßt sich a stets zu 0 oder 1 normieren³⁾. Man nennt dabei $H^{=a}$ eine „Stützhyperbene“ von K . Es seien $K^{\leq n} = \mathfrak{S}(K)$ die Menge aller Seiten von K und K^j die Menge der j -dimensionalen Seiten. Dann ist

$$K^{n-1} =: \mathfrak{S}^{-1}(K) =: \{F \prec_1 K\}$$

die Menge aller Facetten, i.e., aller 1-kodimensionalen Seiten und K^0 die Menge aller Ecken von K .

Eine naheliegende, aber nützliche Charakterisierung von Polytopen gibt der

5.2 Satz von Krein-Milman *Jedes Polytop ist die konvexe Hülle seiner Eckpunkte.*

Beweis Da $K \in \mathfrak{P}(V)$ konvex ist, gilt ersichtlich $\text{konv}(K^0) \subset K$. Ist umgekehrt $K = \text{konv}(v_1, \dots, v_r)$ und $v_1 \notin \text{konv}(v_2, \dots, v_r) =: L \in \mathfrak{P}(V)$, so ist nachzuweisen, daß v_1 eine Ecke von K ist. Es existiert ein eindeutig bestimmter Punkt q in L , der minimalen Abstand zu v_1 hat; ohne Einschränkung sei $q = 0$. Dann ist die Menge $H := \{v \in V; \langle v, v_1 \rangle = 0\}$ ohne Einschränkung eine Stützhyperbene zu $L \subset H^{\geq 0}$. Weiter ist $H' := H + v_1$ eine Stützhyperbene zu K , die außer v_1 kein v_j enthält. Also ist $\{v_1\} = H' \cap K$ eine Ecke von K . ■

5.3 Beispiele für $n = 3$ Nulldimensionale Polytope sind Punkte, eindimensionale Polytope sind (abgeschlossene) Strecken, zweidimensionale Polytope sind konvexe k -Ecke in einer Ebene, zu den dreidimensionalen Polytopen gehören unter anderem die platonischen Körper, also Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Dodekaeder, Ikosaeder.

Nennt man ein Polytop K „simplicial“⁴⁾, wenn jede echte Seite von K ein Simplex ist, so haben alle höchstens zweidimensionalen Polytope diese Eigenschaft; von den platonischen Körpern erfüllen dies Tetraeder, Oktaeder und Ikosaeder.

5.4 Bemerkung Jede Seite eines Polytops ist wieder ein Polytop.

Beweis Es sei $F = H^{=a} \cap K$ eine nichtleere Seite des Polytops $K = \text{konv}(v_1, \dots, v_r)$ aus $\mathfrak{P}(V)$ mit minimal dazu gewähltem r . Ohne Einschränkung seien $a = 0$, v_1, \dots, v_s aus $H^{=0}$ und $v_{s+1}, \dots, v_r \in H^{>0}$. Dann liegt eine Konvexkombination $v := \sum \lambda_i v_i \in K$ genau dann in $H^{=0}$, wenn $\lambda_{s+1} = \dots = \lambda_r = 0$ gilt. Also ist $F = \text{konv}(v_1, \dots, v_s)$. ■

Aufgabe 5.1 Man zeige für ein n -dimensionales Polytop $K \in \mathfrak{P}(V)$:

- i) K besitzt innere Punkte.
- ii) $\partial K = \bigcup_{F \not\supseteq K} F$ (für 5.12).

³⁾ Wegen $H^{\leq a}(u) = H^{\geq -a}(-u)$ kann man die Halbräume $H^{\geq a}(u)$ natürlich auch durch solche vom Typ $H^{\leq a}(u)$ ersetzen.

⁴⁾ Man beachte den Unterschied zur Definition simplicialer Kegel!

Eine zentrale Frage in der Theorie der Polytope lautet, welche Beziehungen zwischen den Eigenschaften eines Polytops und der Anzahl $f_j(K)$ seiner j -dimensionalen Seiten besteht. Man beachte, daß $f_j(K)$ für alle $j \in \mathbb{Z}$ definiert ist; insbesondere gilt $f_{-1}(K) = 1$. Wie kann man mit Hilfe des f -Vektors $f(K) := (f_{-1}(K), \dots, f_{n-1}(K))$ simpliziale Polytope erkennen?

Aufgabe 5.2 Man zeige für ein dreidimensionales Polytop K im \mathbb{R}^3 :

- i) $f_0 \geq 4$ und $f_0 - f_1 + f_2 = 2$ (Eulersche Polyederformel).
- ii) Ist K zusätzlich simplizial, so waise man $2f_1 = 3f_2$ nach.
- iii) Es gibt außer Tetraeder, Oktaeder, Hexaeder (Würfel), Ikosaeder und (Pentagon-)Dodekaeder keine weiteren platonischen Körper (d.h. ∂K besteht aus regelmäßigen kongruenten j -Ecken).

Wir geben einige wichtige Konstruktionen für Polytope an; dabei sei $\text{aff } A$ der von einer Teilmenge A in V erzeugte affine Unterraum und $\dim A$ die Dimension von $\text{aff } A$. Analog zu σ° ist auch für Polytope K ersichtlich ein relatives Inneres K° definierbar.

5.5 Beispiele Es seien $K \in \mathfrak{P}(V)$ von der Dimension $n - 1$ und $v \in V$.

- 1) Für $v \notin \text{aff } K$ heißt das Polytop

$$L := \text{konv}(K \cup \{v\})$$

die „Pyramide über K mit Spitze v “. Ist K seinerseits eine Pyramide in $\text{aff } K$, so ist L eine 2-fache Pyramide, etc.

- 2) Ist $I \subset V$ eine Strecke mit $K^\circ \cap I^\circ = \{v\}$, so heißt das Polytop

$$L := \text{konv}(K \cup I)$$

eine „Bipyramide über K “. Rekursiv definiert man eine „ k -fache Bipyramide“ über einem $(n - k)$ -Polytop. Eine 2-fache Bipyramide im \mathbb{R}^2 ist ein (nicht entartetes) Viereck, eine 3-fache Bipyramide im \mathbb{R}^3 ist kombinatorisch ein Oktaeder.

- 3) Ist K' ein Translat von K in V , das $\text{aff } K$ nicht schneidet, so heißt das Polytop

$$L := \text{konv}(K \cup K')$$

ein „Prisma“. Auf rekursive Weise definiert man ein k -faches Prisma. Ein n -Prisma in V ist kombinatorisch ein n -Würfel. ■

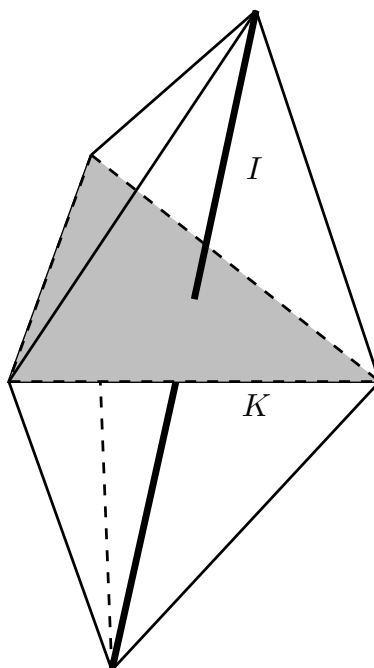
Aufgabe 5.3 Es sei K ein höchstens $(n - 1)$ -dimensionales Polytop in V .

- i) Für eine Pyramide L über K und $0 \leq j \leq n - 1$ zeige man die Seitenbeziehung

$$f_j(L) = f_j(K) + f_{j-1}(K).$$

- ii) Für eine k -fache Pyramide L über K' zeige man

$$f_j(L) = \sum_{i=0}^{\min(k, j+1)} \binom{k}{i} f_{j-i}(K').$$



FIGUR 5.1 Bipyramide

iii) Für ein Prisma Q über K zeige man für $1 \leq j \leq n-1$

$$f_0(Q) = 2f_0(K) \quad \text{und} \quad f_j(Q) = 2f_j(K) + f_{j-1}(K).$$

Aufgabe 5.4 Für eine n -fache Bipyramide L in V zeige man für $0 \leq j \leq n-1$:

$$f_j(L) = 2^{j+1} \binom{n}{j+1}.$$

Ist $n = \dim V \leq 3$ und $K \in \mathfrak{P}(V)$ so, daß je zwei Ecken von K durch eine Kante verbunden sind, so ist K ein Simplex. Für $n \geq 4$ ist das falsch, wie die folgende Konstruktion der $C(\ell, n)$ zeigt:

5.6 Definition Die durch

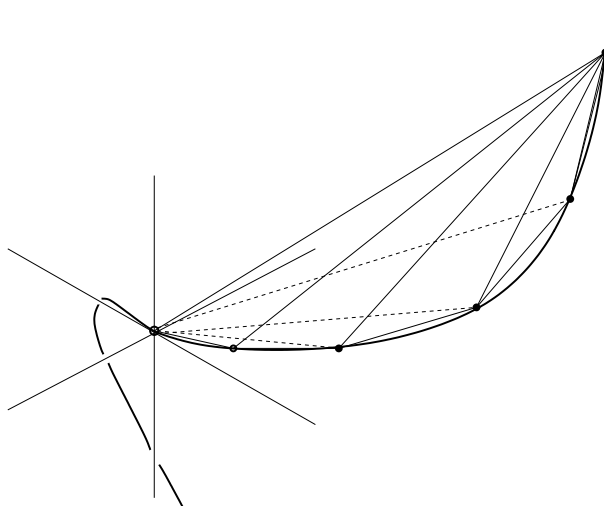
$$\mu: \mathbb{R} \rightarrow V, \quad t \mapsto (t, t^2, \dots, t^n)$$

gegebene Kurve heißt *Moment-Kurve*, in der reellen algebraischen Geometrie auch die *reelle rationale Normalkurve*. Für ein $\ell > n$ wähle man ℓ verschiedene Parameter $t_1, \dots, t_\ell \in \mathbb{R}$. Dann heißt das Polytop

$$C(\ell, n) := \text{konv}(\mu(t_1), \dots, \mu(t_\ell))$$

ein *zyklisches Polytop*.

Die Elemente aus $D(\ell, n) := \{\mu(t_1), \dots, \mu(t_\ell)\}$ nennen wir „definierende Punkte von $C(\ell, n)$ “.



FIGUR 5.2 Zyklisches Polytop

Ersichtlich ist $C(\ell, 1)$ ein 1-Simplex; wir werden sehen, daß dies für $n \geq 2$ und $\ell \geq n + 2$ nicht zutrifft. Zunächst gilt jedoch:

5.7 Satz *Zyklische Polytope sind simplizial.*

Beweis Wenn je $n + 1$ definierende Punkte v_1, \dots, v_{n+1} von $C(\ell, n)$ affin linear unabhängig sind, dann kann jede echte Seite F von $C(\ell, n)$ höchstens n definierende Punkte enthalten, und da diese affin linear unabhängig sind, ist F ein Simplex.

Zum Nachweis der affinen Unabhängigkeit von v_1, \dots, v_{n+1} verwenden wir die Vandermonde-Determinante $D(v_1, \dots, v_{n+1})$; es reicht, $D(v_1, \dots, v_{n+1}) \neq 0$ zu zeigen. Nun gilt aber mit $v_j = \mu(t_j)$:

$$D(v_1, \dots, v_{n+1}) = \begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^n \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \cdots & t_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_{n+1} & t_{n+1}^2 & \cdots & t_{n+1}^n \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (t_j - t_i) \neq 0. \blacksquare$$

Das Polytop $C(\ell, 1)$ ist eine Strecke, also sind für jedes ℓ genau zwei der definierenden Punkte Eckpunkte. Dagegen ist für $n \geq 2$ jeder definierende Punkt auch Eckpunkt:

5.8 Satz *Je k Punkte v_1, \dots, v_k mit $v_j = \mu(t_j)$ von $C(\ell, n)$ für $1 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor$ definieren eine $(k - 1)$ -dimensionale Seite von $C(\ell, n)$; also gilt*

$$f_{k-1}(C(\ell, n)) = \binom{\ell}{k}.$$

Beweis Es genügt, eine Stützhyperebene H von $C(\ell, n)$ zu finden, die von den Ecken von $C(\ell, n)$ genau v_1, \dots, v_k enthält. Denn die von diesen erzeugte Seite von $C(\ell, n)$ ist

nach dem Beweis von 5.7 ein $(k-1)$ -Simplex. Ohne Einschränkung seien die Parameter t_j der v_j durch $t_1 < \dots < t_k$ geordnet. Schreibt man das Polynom $P = \prod_{i=1}^k (t-t_i)^2 \in \mathbb{R}[t]$ in der Form

$$P = \sum_{j=0}^{2k} a_j t^j,$$

so definieren a_0 und $a := (a_1, \dots, a_{2k}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n \cong V$ eine Hyperebene

$$H := \{x \in \mathbb{R}^n; \langle x, a \rangle = -a_0\}.$$

Dann gilt

$$\langle \mu(t_i), a \rangle = \sum_{j=1}^{2k} a_j t_i^j = \prod_{i=1}^k (t_i - t_j)^2 - a_0.$$

Damit folgt

$$\langle \mu(t_i), a \rangle \begin{cases} = -a_0 & \text{für } i \leq k \\ > -a_0 & \text{für } i > k, \end{cases}$$

also hat H die gesuchten Eigenschaften. ■

Nach den niederdimensionalen Seiten charakterisieren wir nun die Facetten. Für die folgende „Geradheitsbedingung von Gale“ ordnen wir $D(\ell, n)$ gemäß der Anordnung der zugehörigen Parameter t_j in \mathbb{R} :

5.9 Satz *Eine (geordnete) Menge $E := \{\mu(t_{i_1}), \dots, \mu(t_{i_n})\}$ von Ecken von $C(\ell, n)$ mit $t_{i_1} < \dots < t_{i_n}$ erzeugt genau dann eine Facette von $C(\ell, n)$, wenn zwischen je zwei Punkten aus $D(\ell, n) \setminus E$ eine gerade Anzahl von Punkten aus E liegt.*

Beweis Wir gehen ähnlich wie im letzten Beweis vor: Zum Polynom

$$P := \prod_{k=1}^n (t - t_{i_k}) =: \sum_{j=0}^n c_j t^j \in \mathbb{R}[t]$$

definiert $c := (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n = V$ die Hyperebene

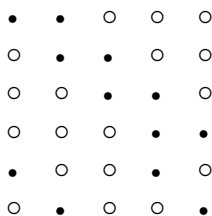
$$H := \{x \in \mathbb{R}^n; \langle x, c \rangle = -c_0\}.$$

Aus

$$\langle \mu(t_i), c \rangle = \sum_{j=1}^n c_j t_i^j = P(t_i) - c_0$$

folgt $H \cap D(\ell, n) = E$. Daher ist die Menge $\text{conv}(\mu(t_{i_1}), \dots, \mu(t_{i_n}))$ genau dann eine Facette von $C(\ell, n)$, wenn alle anderen Ecken auf einer Seite von H in V liegen. Dies bedeutet aber, daß das Polynom P auf der Momentkurve geradzahlig oft das Vorzeichen wechselt, wenn die Kurve von einer Ecke aus $D(\ell, n) \setminus E$ zur nächsten läuft. Zu jedem Vorzeichenwechsel gehört genau eine Nullstelle von P und damit ein Punkt aus E . ■

5.10 Beispiel Für $C(5, 3)$ definieren in der Anordnung gemäß 5.9 genau die folgenden Verteilungen eine Facette (dabei sind die definierenden Punkte aus E durch \circ , die aus $D(5, 3) \setminus E$ durch \bullet gekennzeichnet):



Damit können wir, jedenfalls kombinatorisch, die Kurzbezeichnung $C(\ell, n)$ für zyklische Polytope rechtfertigen:

5.11 Korollar *Zwei zyklische Polytope in einem n -dimensionalen Vektorraum sind genau dann kombinatorisch äquivalent, wenn sie die gleiche Anzahl an Ecken haben.*

Beweis Ordnen wir die Ecken der Polytope gemäß 5.9, so ergibt sich eine Bijektion zwischen den Ecken. Diese setzt sich nach 5.9 zu einer Bijektion der Facetten fort, welche nach 5.7 Simplexe sind. Jede Bijektion zwischen den Ecken zweier Simplexe definiert aber einen Isomorphismus der zugehörigen Seitenverbände. ■

Aufgabe 5.5 Man gebe in $C(9, 6)$ mit Ecken v_j für $j = 1, \dots, 9$ alle Facetten F an, welche die Ecke v_9 enthalten. Jedem F ordne man als Kennzahl einen Dualbruch der Form $0, \dots$ zu, wobei eine 1 an der j -ten Stelle bedeutet, daß v_j in F liegt. Man ordne die Dualbrüche nach ihrer Größe (für 20.3).

Eine nützliche Beschreibung von Polytopen geschieht mit Hilfe endlich vieler abgeschlossener Halbräume: Bezeichnet man einen Durchschnitt von endlich vielen solcher Halbräume in V als *Polyeder*, so gilt:

5.12 Satz *Die Polytope sind genau die beschränkten Polyeder.*

Beweis Ohne Einschränkung sei das Polytop $K \in \mathfrak{P}(V)$ n -dimensional. Sind F_1, \dots, F_s seine eigentlichen Seiten und wählt man eine Darstellung $F_i = H^{=a_i} \cap K$, so gilt ohne Einschränkung

$$K \subset \bigcap_{i=1}^s H^{\geq a_i} =: K'.$$

Andererseits gilt $\partial K = \bigcup H^{=a_i} \cap K$ nach Aufgabe 5.1. Ist $v \in K' \setminus K$, so wähle man ein $w \in \overset{\circ}{K}$. Die Strecke $[v, w]$ schneidet ∂K und damit eine der Hyperebenen $H^{=a_i}$; wegen $w \in H^{>a_i} \cap K$ liegt v im Widerspruch zur Definition von K' in $H^{<a_i}$. Also ist das Polytop $K = \bigcap_{i=1}^s H^{\geq a_i}$ ein (beschränktes) Polyeder.

Für die umgekehrte Richtung sei $L := \bigcap_{i=1}^r H^{\geq a_i}$ beschränkt und ohne Einschränkung n -dimensional. Für einen induktiven Beweis, daß L ein Polytop ist, seien alle echten Seiten $F_i := L \cap H^{=a_i}$ Polytope. Wir dürfen $0 \in F_1$ annehmen. Evident gilt

$\text{konv}(\bigcup_{i=1}^r F_i) \subset L$. Ist $x \in \overset{\circ}{L}$, so schneidet die Gerade $\mathbb{R}_{\geq 0} \cdot x$ den Rand von L und damit eine weitere Seite F_j mit $j \geq 2$, da L beschränkt ist. Also liegt x in $\text{konv}(F_1, F_j)$. Das bedeutet jedoch $\overset{\circ}{L} \subset \text{konv}(\bigcup_{i=1}^r F_i)$; für den Rand $\partial L = \bigcup_{i=1}^r F_i$ gilt dies sowieso, also folgt $L = \text{konv}(\bigcup_{i=1}^r F_i)$. ■

Es seien wiederum N ein Gitter in V und $A \subset V$ endlich. Dann heißt das Polytop $K = \text{konv}(A)$ ein

- 1) N -Polytop, wenn A in N enthalten ist,
- 2) N -rationales Polytop, wenn A in $N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ enthalten ist.

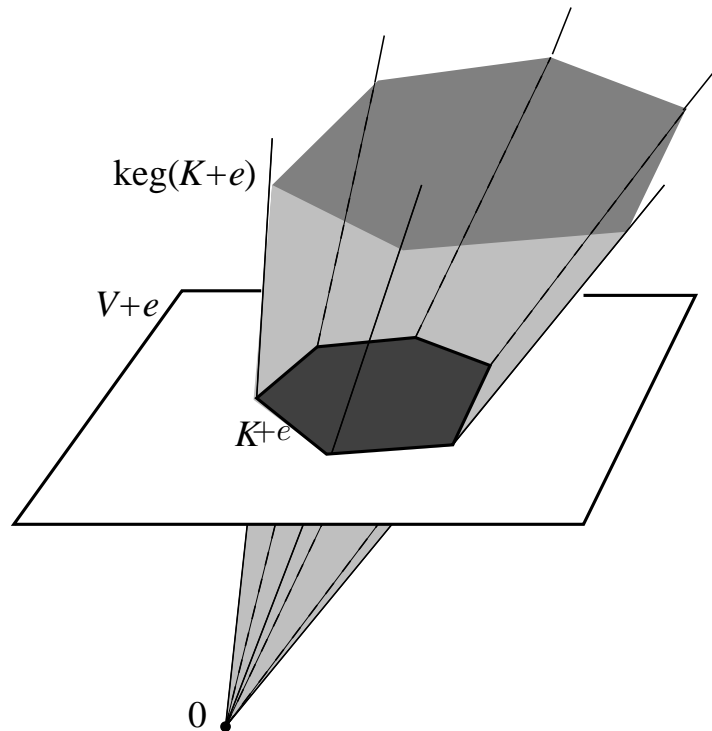
Wir wollen nun Eigenschaften von Polytopen aus solchen von Kegeln herleiten. Dazu empfiehlt es sich, eine zusätzliche Dimension einzuführen: Es sei $F := V \oplus \mathbb{R}e$ und damit $F^* = V^* \oplus \mathbb{R}e^*$, wobei $e^*: F \rightarrow \mathbb{R}e$ die Projektion sei. Wir bezeichnen $V \times 0 \subset F$ meist einfach mit V etc. Ein (nicht notwendig abgeschlossener Kegel) σ in F heie e^* -spitz, falls

$$\sigma \subset (e^*)^\vee \quad \text{und} \quad \sigma \cap (e^*)^\perp = \{0\}$$

gilt; damit ist σ insbesondere spitz. Jedem Polyeder in V läßt sich wie folgt ein solcher Kegel in F zuordnen:

$$\eta := \eta_V : \{K \subset V; K \text{ Polyeder}\} \rightarrow \{\sigma; \sigma \text{ } e^*\text{-spitzer Kegel in } F\}, \quad K \mapsto \text{keg}(K + e).$$

Insbesondere ist $\eta(\emptyset) = \{0\}$ und $\eta(V) = (V \times \mathbb{R}_{>0}) \cup \{0\}$.



FIGUR 5.3 Kegel zum Polytop $K + e$

5.13 Lemma Für η gilt:

- 1) η ist Inklusionstreu;
- 2) η ist bijektiv mit Umkehrabbildung $\sigma \mapsto (\sigma \cap (V + e)) - e = V \cap (\sigma - e)$;
- 3) Für alle $u \in V^*$ und $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt

$$\eta(H^{\geq a}(u)) = H^{\geq 0}(u - ae^*) \cap \eta(V) \quad \text{und} \quad \eta(H^{=a}(u)) = H^{=0}(u - ae^*) \cap \eta(V);$$

- 4) η ist ein Isomorphismus von Verbänden;
- 5) Ein Polyeder K ist genau dann kompakt (und damit ein Polytop), wenn $\eta(K)$ abgeschlossen ist.

Beweis Alle Eigenschaften sind leicht zu verifizieren; wir gehen exemplarisch auf 4) ein: Die Ordnung wird durch die Inklusion gegeben. Es bleibt etwa zu zeigen, daß η durchschnittsverträglich ist, also $\eta(K_1 \cap K_2) = \eta(K_1) \cap \eta(K_2)$ gilt. Ohne Einschränkung sei $K_2 = H^{\geq a}(u)$. Aus 1) und 3) folgt

$$\eta(K_1 \cap K_2) \subset \eta(K_1) \cap \eta(K_2) = \eta(K_1) \cap H^{\geq 0}(u - ae^*).$$

Für $x \in \eta(K_1) \cap H^{\geq 0}(u - ae^*)$ gilt andererseits ohne Einschränkung $x = (x', 1)$ mit $x' \in K_1$ und $u(x') \geq a$; das bedeutet $x \in \eta(K_1 \cap H^{\geq a}(u))$. ■

Aufgabe 5.6 Man verifiziere die restlichen Eigenschaften von Lemma 5.13.

5.14 Satz Die induzierte Abbildung

$$\eta : \mathfrak{P}(V) \rightarrow \{\sigma; \sigma \text{ } e^*\text{-spitzer polyedrischer Kegel in } F\}, \quad K \mapsto \text{keg}(K + e)$$

ist ein Isomorphismus von Verbänden mit

- 1) S ist Seite des Polytops $K \iff \eta(S)$ ist Seite des Kegels $\eta(K)$;
- 2) $\dim \eta(K) = \dim K + 1$.

Beweis Jedes $K \in \mathfrak{P}(V)$ hat nach 5.12 eine Darstellung $K = \bigcap H^{\geq a_i}(u_i)$ mit $u_0 = 0$. Also liefern 5.13 3) und 4):

$$\eta(K) = \bigcap \eta(H^{\geq a_i}(u_i)) = \bigcap H^{\geq 0}(u_i - a_i e^*),$$

so daß die induzierte Abbildung wirklich existiert. Daraus folgt gleichzeitig auch, daß η Seiten auf Seiten abbildet. Zum restlichen Nachweis von 1) weisen wir für $K \in \mathfrak{P}(V)$ auf folgendes hin: Ist L eine eigentliche Seite von $\eta(K)$, so ist L von der Form $\eta(K) \cap H^{=0}(w)$, da $\eta(K)$ ein Kegel ist; dabei hat $w \in F^*$ die Form $w = u - ae^*$ mit $u \in V^*$. Wiederum aus 5.13 3) und 4) folgt damit

$$L = \eta(K) \cap H^{=0}(u - ae^*) = \eta(K \cap H^{=a}(u)), \quad \text{also} \quad \eta^{-1}(L) = K \cap H^{=a}(u).$$

Eigenschaft 2) ist unmittelbar zu sehen, wobei wir an $\dim \emptyset = -1$ erinnern. ■

Damit können wir Eigenschaften des Verbandes $\mathfrak{S}(K)$ aus denen von $\mathfrak{S}(\eta(K))$ ableiten:

5.15 Korollar *Es sei K ein Polytop. Dann gilt:*

- 1) $\mathfrak{S}(K)$ ist mit der Seitenbeziehung als Ordnung ein Verband.
- 2) Ist $S \in \mathfrak{S}(K)$ und $T \in \mathfrak{S}(S)$, so ist $T \in \mathfrak{S}(K)$.
- 3) Ist S echte Seite von K , so gilt $S = \bigcap_{S \prec T \in \mathfrak{S}^{n-1}(K)} T$.
- 4) Der Rand von K ist die Vereinigung aller Facetten von K .

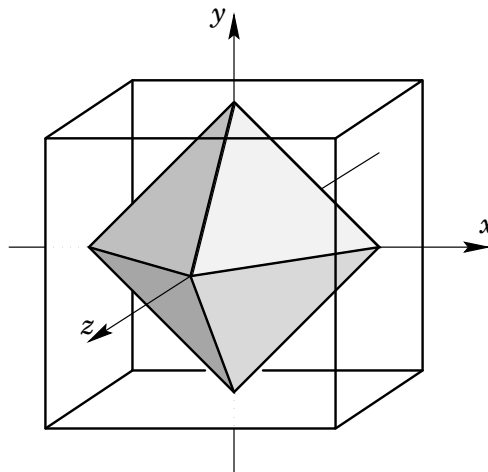
Beweis Wir benutzen 5.14 1). Damit folgen 1) und 2) aus 1.19; wir weisen auf $\min(S_1, S_2) = S_1 \cap S_2$ und die Tatsache hin, daß $\max(S_1, S_2)$ die kleinste S_1 und S_2 enthaltende Seite von K ist. Schließlich ergeben sich 3) aus 1.20 2) und 4) aus 1.19 3). ■

5.16 Definition Für ein Polytop $K \in \mathfrak{P}_0(V)$ heißen $K^\vee := \{u \in V^*; u|_K \geq -1\}$ das duale Polytop und $K^\wedge := -K^\vee$ das polare Polytop.

Der Leser wird sich nicht dadurch verwirren lassen, daß das Symbol $(*)^\vee$ unterschiedliche Bedeutung hat, je nachdem ob ein Kegel oder ein Polytop betrachtet wird. Es sei ferner darauf hingewiesen, daß, abweichend von unserer Bezeichnung, in [Fu, §1.5] K^\vee als polares Polytop bezeichnet wird. Das Wort „Polytop“ rechtfertigen wir in 5.19.

5.17 Beispiele 1) Für $N = \mathbb{Z}^3 \subset \mathbb{R}^3$ sei $K := \text{konv}(\pm e_i; i = 1, 2, 3)$. Dann ist

$$\begin{aligned} K^\vee &= \{u \in V^*; \pm u_i = u(\pm e_i) \geq -1\} \\ &= \text{konv}(\{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3); \varepsilon_i \in \{+1, -1\}\}) = -K^\vee = K^\wedge. \end{aligned}$$



FIGUR 5.4 Duales Polytop des Einheitswürfels

- 2) Das duale Polytop K^\vee eines N -rationalen Polytops K ist M -rational. Denn die Konstruktion dualer bzw. polarer Polytope läßt sich für rationale Polytope statt in \mathbb{R}^n gleichwertig auch in \mathbb{Q}^n durchführen; mit einer Koeffizientenerweiterung

kommt man dann zu den reellen Polytopen. Wenn man die Einzelheiten nicht ausführen will, kann man angesichts von 2.6 auch mit 5.18 argumentieren.

- 3) Das Dual eines N -Polytopes ist nicht notwendig ein M -Polytop: Für $N = \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ und $a < 0 < b$ gilt

$$K = [a, b] \iff K^\wedge = [1/a, 1/b]$$

und damit ist K^\wedge kein M -Polytop.

- 4) Für ein Gitterpolytop K , das 0 als Randpunkt enthält, ist das analog zur obigen Definition konstruierte K^\vee nicht mehr beschränkt und damit nur ein Polyeder. Wir begnügen uns dazu mit einem Beispiel: Für $N = \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ und $K = [0, 1]$ ist $K^\vee = [-1, \infty[$. ■

Ein Gitterpolytop, dessen polares Polytop wieder ein Gitterpolytop ist, heißt „reflexiv“. Für eine Klassifikation niederdimensionaler Beispiele sei auf [Wa] verwiesen.

5.18 Lemma Für $K \in \mathfrak{P}_0(V)$ gilt in F^*

$$\eta_{V^*}(K^\vee) = \eta_V(K)^\vee.$$

Beweis Da $\eta(K^\vee)$ und $\eta(K)^\vee$ Kegel sind, genügt es für den Nachweis wechselseitiger Inklusionen, Kegelerzeugende zu betrachten.

„ \subset “ Für $\eta(K^\vee) = \text{keg}(K^\vee + e^*)$ betrachten wir Elemente $w + e^*$ mit w aus $K^\vee = \{w \in V^*; w|_K \geq -1\}$. Für $\lambda(v + e) \in \eta(K)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt

$$(w + e^*)(\lambda(v + e)) = \lambda w(v) + \lambda \geq \lambda(1 + w(v)) \geq 0,$$

also folgt $w + e^* \in \eta(K)^\vee$.

„ \supset “ Für $\varphi \in \eta(K)^\vee = \{\varphi \in F^*; \varphi|_{\eta(K)} \geq 0\}$ gibt es eine Darstellung $\varphi = w + ae^*$ mit $w \in V^*$ und $a \in \mathbb{R}$. Aus

$$(w + ae^*)(k + e) \geq 0 \quad \text{für alle } k \in K$$

ergibt sich $w(k) + a \geq 0$ und wegen $0 \in K$ zusätzlich $a \geq 0$. Ist $a = 0$, so ist $w|_K \geq 0$ und damit $w - e^* \in K^\vee$, also $w = (w - e^*) + e^* \in \eta(K^\vee)$. Ist $a \neq 0$, so kann man $a = 1$ wählen, so daß $w|_K \geq -1$ und damit $w + e^* \in \eta(K^\vee)$ folgt. ■

5.19 Satz Für $K \in \mathfrak{P}_0(V)$ gilt

- 1) $K^\vee \in \mathfrak{P}_0(V^*)$.
- 2) $K^{\vee\vee} = K$.
- 3) Die Abbildung

$$\mathfrak{S}(K) \rightarrow \mathfrak{S}(K^\vee), \quad S \mapsto S^* := \{u \in K^\vee; u(S) = -1\}$$

ist ein inklusionsumkehrender Verbandsisomorphismus mit

$$\dim S + \dim S^* = \dim V - 1.$$

4) $f_j(K^\vee) = f_{n-j-1}(K)$ für $-1 \leq j \leq n$.

Beweis 1) Zunächst ist zu zeigen, daß K^\vee ein Polytop in V^* ist. Dies ergibt sich aus der in 5.18 gezeigten Beziehung $\eta(K^\vee) = \eta(K)^\vee$ wie folgt: Nach 5.14 ist $\eta(K)$ ein polyedrischer Kegel und damit nach 1.14 auch $\eta(K)^\vee = \eta(K^\vee)$. Nach dem gleichen Satz ist damit K^\vee ein Polytop. Damit liegt 0 im Inneren von K^\vee , denn als Polytop ist K^\vee Durchschnitt endlich vieler $H^{\geq -1}(w_j)$, die alle 0 als inneren Punkt haben..

2) Lemma 5.18 liefert mit 1) und 5.14 2) ein kommutatives Diagramm (vgl. 1.21)

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{P}_0(V) & \xrightarrow{\eta_V} & \{\text{spitze volldimensionale Kegel in } F\} \\ \downarrow (\cdot)^\vee & & \downarrow (\cdot)^\vee \\ \mathfrak{P}_0(V^*) & \xrightarrow{\eta_{V^*}} & \{\text{spitze volldimensionale Kegel in } F^*\} \end{array} .$$

Da η injektiv ist und $\sigma^{\vee\vee} = \sigma$ gilt, folgt 2) unmittelbar.

3) Evident existiert zum ordnungsumkehrenden involutorischen Verbandsisomorphismus (vgl. 1.24)

$$\mathfrak{S}(\eta(K)) \rightarrow \mathfrak{S}(\eta(K)^\vee), \quad \tau \mapsto \eta(K)^\vee \cap \tau^\perp$$

eine kommutative Ergänzung ϑ im folgenden Diagramm mit Isomorphismen von Verbänden (vgl. 5.14):

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{S}(K) & \xrightarrow{\eta_V} & \mathfrak{S}(\eta(K)) \\ \downarrow \vartheta & & \downarrow \\ \mathfrak{S}(K^\vee) & \xrightarrow{\eta_{V^*}} & \mathfrak{S}(\eta(K)^\vee) \end{array} .$$

Es sei S eine Seite von K , dann gilt nach 1.24 2) für die Zuordnung

$$\vartheta : S \mapsto \eta(S) \mapsto \eta(K)^\vee \cap \eta(S)^\perp \mapsto \vartheta(S)$$

ersichtlich $\dim \vartheta(S) = ((n + 1) - (\dim S + 1)) - 1 = n - \dim S - 1$. Es bleibt also $\vartheta(S) = S^*$ zu zeigen; dazu verweisen wir auf Aufgabe 5.7.

Der Beweis von 4) ergibt sich unmittelbar aus 3). ■

Aufgabe 5.7 Für $S \prec K \in \mathfrak{P}_0(V)$ zeige man

$$(\eta_{V^*})^{-1}(\eta_V(K)^\vee \cap \eta_V(S)^\perp) = \{u \in K^\vee; u(S) = -1\}$$

(für 5.19).

Aufgabe 5.8 Ist $K = \text{konv}(v_1, \dots, v_r)$, so zeige man $K^\vee = \bigcap_{j=1}^r H^{\geq -1}(v_j)$.

Wir wollen nun Polytopen $K \in \mathfrak{P}_0(V)$ auf naive Weise einen Fächer zuordnen:

5.20 Definition Für ein N -rationales Polytop $K \in \mathfrak{P}_0(V)$ bezeichne Δ^K den N -Fächer

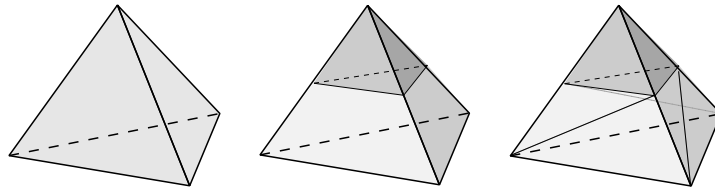
$$\Delta^K := \{\text{keg}(S); S \preceq K\}.$$

Ersichtlich ist Δ^K ein N -Fächer, da K und alle $p \cdot K$ für $p \in \mathbb{N}_{>0}$ den gleichen Fächer erzeugen. Ebenso offensichtlich ist Δ^K ein vollständiger Fächer, da der Nullpunkt im Inneren von K liegt. Aus Δ^K lassen sich durch Unterteilung des Randes ∂K weitere Fächer konstruieren: Es sei \mathfrak{T} ein Komplex aus Polytopen (i.e., \mathfrak{T} sei eine endliche Menge von Polytopen mit: $F \prec S \in \mathfrak{T} \Rightarrow F \in \mathfrak{T}$ und $S_1, S_2 \in \mathfrak{T} \Rightarrow S_1 \cap S_2 \prec S_1, S_2$), deren Vereinigung ∂K ist. Dann ist der Fächer

$$\Delta^{\mathfrak{T}} := \{\text{keg}(S); S \in \mathfrak{T}\}$$

eine Verfeinerung des Fächers Δ^K . Auf diese Weise lassen sich aus Δ^K neue Fächer mit gleichem Träger erzeugen, ein Prozess, der für die Auflösung von Singularitäten von grundlegender Bedeutung sein wird. Wenn ein Polytop L mit $\Delta^{\mathfrak{T}} = \Delta^L$ existiert, so liegen die Polytopseiten von L in entsprechenden Kegeln von $\Delta^{\mathfrak{T}}$, dabei sind natürlich keine zwei aneinanderstoßende Polytopseiten von L kollinear, d.h. den gleichen affinen Unterraum erzeugend, da L ein Polytop ist.

Als Beispiel betrachten wir in Figur 5.5 das Polytop $K \in \mathfrak{P}_0(\mathbb{R}^3)$, das als projektive Varietät den \mathbb{P}_3 definiert (vgl. 5.22), sowie zwei Unterteilungen.



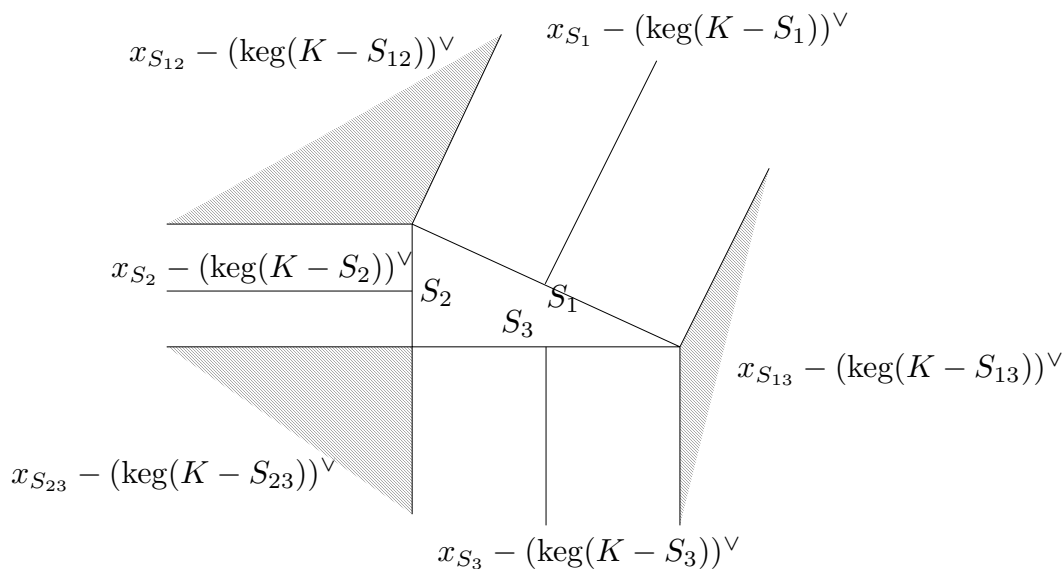
FIGUR 5.5 Unterteilungen eines Polytops

Das mittlere Bild liefert wieder einen Fächer, der von einem Polytop L herrührt. Bezeichnet nämlich s die Spitze von K und verkürzt man die Strecke $[0, s]$ ein wenig unter Beibehaltung der anderen 6 „Eckpunkte“, so erhält man ein Polytop L mit $\Delta^L = \Delta^{\mathfrak{T}_1}$. Zum rechten Bild existiert kein Polytop L mit $\Delta^{\mathfrak{T}_2} = \Delta^L$, vgl. Beispiel 5.24 im Anhang zu § 5.

Wir kommen nun zu der für uns wichtigsten Fächerkonstruktion, die wir für ein (beliebiges) Polytop K in V^* durchführen, wobei wir folgende Begriffsbildung verwenden: Ist $S \prec K$, so heißt der Kegel

$$(\text{keg}(K - S))^{\vee} = \{v \in V; \langle v, K - S \rangle \geq 0\}$$

der *Außenwinkel von K an S* (bisweilen wird unter dem Außenwinkel aus geometrischen Gründen auch $-(\text{keg}(K - S))^{\vee}$ verstanden). In Figur 5.6 haben wir aus Gründen der



FIGUR 5.6 Verschobene Außenwinkel eines Polytops

Übersichtlichkeit die jeweils um ein $x_S \in S$ verschobenen Winkel $x_S - (\text{keg}(K - S))^\vee$ dargestellt.

Aufgabe 5.9 Für Polytope $K = \text{konv}(p_i; 1 \leq i \leq r)$ und $L = \text{konv}(q_j; 1 \leq j \leq s)$ zeige man $K + L = \text{konv}(p_i + q_j; 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s)$. Damit sind $\text{keg}(K + L)$ und $(\text{keg}(K + L))^\vee$ polyedrische Kegel. Man beschreibe $K + L$ für $s = 1$ und 2 .

5.21 Satz und Definition Ist K ein Polytop in V^* mit nicht leerem Inneren, so heißt der vollständige Fächer

$$\Delta_K := \{(\text{keg}(K - S))^\vee; \emptyset \neq S \prec K\}$$

ein polytopischer Fächer. Er hat die Eigenschaften:

- 1) Ist $0 \in \overset{\circ}{K}$, so ist $\Delta_K = \Delta^{K^\vee}$;
- 2) Ist K ein M -rationales Polytop, so ist Δ_K ein N -Fächer.

Beweis Da Δ_K nach Aufgabe 5.10 unter Translationen von K invariant ist, dürfen wir $0 \in \overset{\circ}{K}$ annehmen. Ist K zusätzlich M -rational, so läßt sich bei der Translation ein u aus $K \cap (M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$ wählen, da K innere Punkte hat. Folglich ist K^\vee nach 5.19 N -rational. Es bleibt also nur 1) zu zeigen, weil daraus ebenfalls folgt, daß Δ_K ein vollständiger Fächer ist.

Für 1) ist nach 5.19 nur $(\text{keg}(K - S))^\vee = \text{keg}(S^*)$ für jede nichtleere Seite S von K nachzuweisen. Für jedes $v \in S^*$ gilt $\langle v, K \rangle \geq -1$ und $\langle v, S \rangle = -1$, also $\langle v, K - S \rangle \geq 0$, und damit liegt v im Kegel $(\text{keg}(K - S))^\vee$. Ist umgekehrt $0 \neq v \in (\text{keg}(K - S))^\vee$, so ist zunächst v auf S konstant, denn aus $S - S = -(S - S) \subset K - S$ folgt

$$-\langle v, S - S \rangle = \langle v, S - S \rangle \geq 0,$$

so daß v auf $S - S$ verschwindet, also $v|_S$ konstant ist. Weiter ist $v(S) \neq 0$, denn sonst folgte $v \in K^\vee = 0$. Wäre $v(S) > 0$, so stände $v(-S) < 0$ im Widerspruch zu

$-S \subset \text{keg}(K - S)$. Da wir eine Inklusion von Kegeln untersuchen, dürfen wir daher $v(S) = -1$ annehmen. Somit gilt $\langle v, K \rangle \geq \langle v, S \rangle = -1$ und damit $v \in S^*$. ■

Aufgabe 5.10 Für $t \in \mathbb{R}_{>0}$ und $u \in V^*$ zeige man $\Delta_K = \Delta_{u+tK}$.

5.22 Beispiele Es seien $N = \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n = V$.

1) Ist $K = \text{konv}(\{\pm e_1^* \pm \dots \pm e_n^*\})$ der Hyperwürfel in V^* , dann ist

$$K^\vee = \text{konv}(\{\pm e_i; i = 1, \dots, n\})$$

der duale Hyperwürfel in V , also Δ_K ein Produktfächer von n Exemplaren des eindimensionalen vollständigen Fächers. Damit ist Δ_K ein mehrfach projektiver Fächer, und die zugehörige torische Varietät ist $X_K = (\mathbb{P}_1)^n$.

2) Es sei $V := \left(\bigoplus_{i=0}^n \mathbb{R}e_i\right) / \left(\mathbb{R}\sum_{i=0}^n e_i\right)$. Dann ist $V^* := \left(\mathbb{R}\sum_{i=0}^n e_i\right)^\perp \subset \left(\bigoplus_{i=0}^n \mathbb{R}e_i\right)^*$. Setzen wir $K^\vee := \text{konv}(\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_n)$, so gilt $\sum_{i=0}^n \bar{e}_i = 0$. Für $K := K^{\vee\vee} \subset V^*$ folgt

$$\Delta_K = \{\text{keg}(\bar{e}_i; i \in I); I \subsetneq \{0, \dots, n\}\}.$$

Zu diesem „projektiven Fächer“ gehört als Varietät $X_K = \mathbb{P}_n$, vgl. 4.8 3).

5.23 Korollar Ist K ein Polytop in V^* mit nicht leerem Inneren, so existiert eine Bijektion

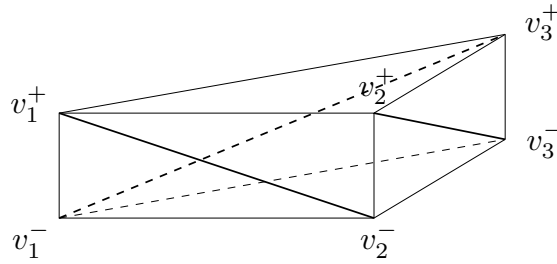
$$K^0 \xrightarrow{1-1} \Delta_K^n, \quad u \mapsto \sigma_u := \{v \in V; \langle v, u \rangle = \min_{w \in K} \langle v, w \rangle\}.$$

Beweis In der Darstellung von 5.21 werden die n -dimensionalen Seiten gerade durch die Mengen $(\text{keg}(K - u))^\vee$ mit den Ecken $u \in K^0$ beschrieben. Nun ist für festes $u \in K$

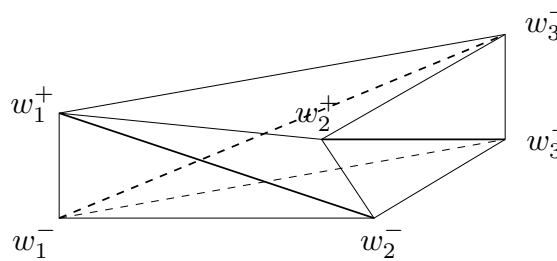
$$\begin{aligned} (\text{keg}(K - u))^\vee &= \{v \in V; \langle v, K - u \rangle \geq 0\} \\ &= \{v \in V; \langle v, w \rangle \geq \langle v, u \rangle, \forall w \in K\} \\ &= \{v \in V; \langle v, u \rangle = \min_{w \in K} \langle v, w \rangle\}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Nennen wir ein n -dimensionales Polytop K in V *einfach*, wenn K^\vee simplizial ist, so gilt:

Aufgabe 5.11 Ein n -dimensionales Polytop K in V ist genau dann einfach, wenn jede seiner Ecken auf genau n Kanten liegt (für Aufgabe 13.2).



FIGUR 5.7 Prismenunterteilung



FIGUR 5.8 Gitterpolytop zu Prismenunterteilung?

§ 5 Anhang: Beispiele nicht polytopischer Fächer

Wir wollen zeigen, daß der im dritten Bild von Figur 5.5 aufgetretene Fächer $\Delta^{\mathfrak{F}}$ nicht von einem Polytop herrührt. Dazu genügt ersichtlich das folgende

5.24 Beispiel Für $i = 1, 2, 3$ seien $v_i = (v_{i1}, v_{i2}) \in \mathbb{R}^2$ so gewählt, daß 0 im Inneren von $K := \text{konv}(v_1, v_2, v_3)$ liegt. Man setze $v_i^{\pm} := (v_i, \pm 1) \in \mathbb{R}^3$. Dann kommt der zur Unterteilung von K in Figur 5.7 gehörige Fächer nicht von einem Polytop.

Beweis Andernfalls müßten $\mu_i^{\pm} \in \mathbb{R}_{>0}$ existieren mit $\Delta^{\mathfrak{F}} = \Delta^L$ für ein Polytop $L := \text{konv}(w_i^{\pm}, i = 1, 2, 3)$ mit $w_i^{\pm} := \mu_i^{\pm} v_i^{\pm}$, vgl. Figur 5.8. Man setze $\lambda_i^{\pm} := 1/\mu_i^{\pm}$, sowie zu den vier „vorderen“ Punkten im \mathbb{R}^3 :

$$w^+ := \frac{\lambda_1^+}{\lambda_1^+ + \lambda_2^-} (\mu_1^+ v_1^+) + \frac{\lambda_2^-}{\lambda_1^+ + \lambda_2^-} (\mu_2^- v_2^-) = \frac{1}{\lambda_1^+ + \lambda_2^-} (v_1 + v_2, 0)$$

$$w^- := \frac{\lambda_1^-}{\lambda_1^- + \lambda_2^+} (\mu_1^- v_1^-) + \frac{\lambda_2^+}{\lambda_1^- + \lambda_2^+} (\mu_2^+ v_2^+) = \frac{1}{\lambda_1^- + \lambda_2^+} (v_1 + v_2, 0).$$

Damit gilt

$$w^+ = \frac{\lambda_1^- + \lambda_2^+}{\lambda_1^+ + \lambda_2^-} w^-.$$

Nach 5.25 gilt $w^+ \neq w^-$, denn sonst wären zwei Seiten von L kollinear. Da der Punkt w_1^+ auf der Kante $[w_1^+, w_2^-]$ liegt und w_2^- ebenfalls zu L gehört, ist $\lambda_1^+ + \lambda_2^- > \lambda_1^- + \lambda_2^+$. Analog ergeben sich

$$\lambda_2^+ + \lambda_3^- > \lambda_2^- + \lambda_3^+ \quad \text{und} \quad \lambda_3^+ + \lambda_1^- > \lambda_3^- + \lambda_1^+.$$

Die Summe dieser drei Ungleichungen ergäbe daher $\sum \lambda_i^\pm > \sum \lambda_i^\pm$, und damit einen Widerspruch. Also existieren solche μ_i^\pm nicht. ■

Wir haben benutzt:

5.25 Lemma *In den Bezeichnungen von 5.24 seien für $i = 1, 2$ die Vektoren v_i linear unabhängig; man wähle $\lambda_i^\pm \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann liegen die vier Punkte $w_i^\pm := v_i^\pm / \lambda_i^\pm$ genau dann in einer affinen Ebene des \mathbb{R}^3 , wenn $\lambda_1^+ - \lambda_1^- = \lambda_2^+ - \lambda_2^-$ gilt.*

Beweis In den Bezeichnungen des Beweises von 5.24 notieren wir zunächst, daß w^+ in der Verbindungsstrecke $[w_1^+, w_2^+]$ und w^- in der Strecke $[w_1^-, w_2^-]$ liegt. Die Bedingung $\lambda_1^+ - \lambda_1^- = \lambda_2^+ - \lambda_2^-$ ist äquivalent zu $w^+ = w^-$.

„ \Leftarrow “ Aus $w^+ = w^-$ folgt, daß sich die beiden Verbindungsstrecken schneiden, so daß die vier Punkte w_i^\pm in einer gemeinsamen Ebene liegen, vgl. Figur 15.6.

„ \Rightarrow “ Da w^+ und w^- sowohl in der fraglichen affinen Ebene E als auch in der Geraden $G := \mathbb{R} \cdot (v_1 + v_2, 0)$ liegen, bleibt zu zeigen, daß sich E und G nur in einem Punkt schneiden. Dazu reicht es nachzuweisen, daß 0 nicht in der affinen Ebene E liegt. Andernfalls gäbe es eine nichttriviale Linearkombination

$$0 = t_1 v_1^+ + t_2 v_1^- + t_3 v_2^+ = ((t_1 + t_2)v_1 + t_3 v_2, t_1 - t_2 + t_3).$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit von v_1 und v_2 ergäben sich jedoch $t_3 = 0$ sowie $t_1 = -t_2 = -t_1 = 0$. ■

Als nächstes bringen wir ein Beispiel für einen polytopischen Fächer Δ_K und einen kombinatorisch äquivalenten Fächer Δ , der nicht polytopisch ist. Dies bedeutet, daß die projektive torische Varietät X_{Δ_K} kombinatorisch äquivalent zu einer zwar vollständigen, aber nicht projektiven Varietät X_Δ ist (vgl. 16.19).

5.26 Beispiel Wir betrachten die Ecken des Standardwürfels K in $V = \mathbb{R}^3$ und ersetzen die Ecke $(1, 1, 1)$ durch $(1, 2, 3)$, vgl. Figur 5.9: Es seien $\varepsilon_i \in \{+, -\}$ und

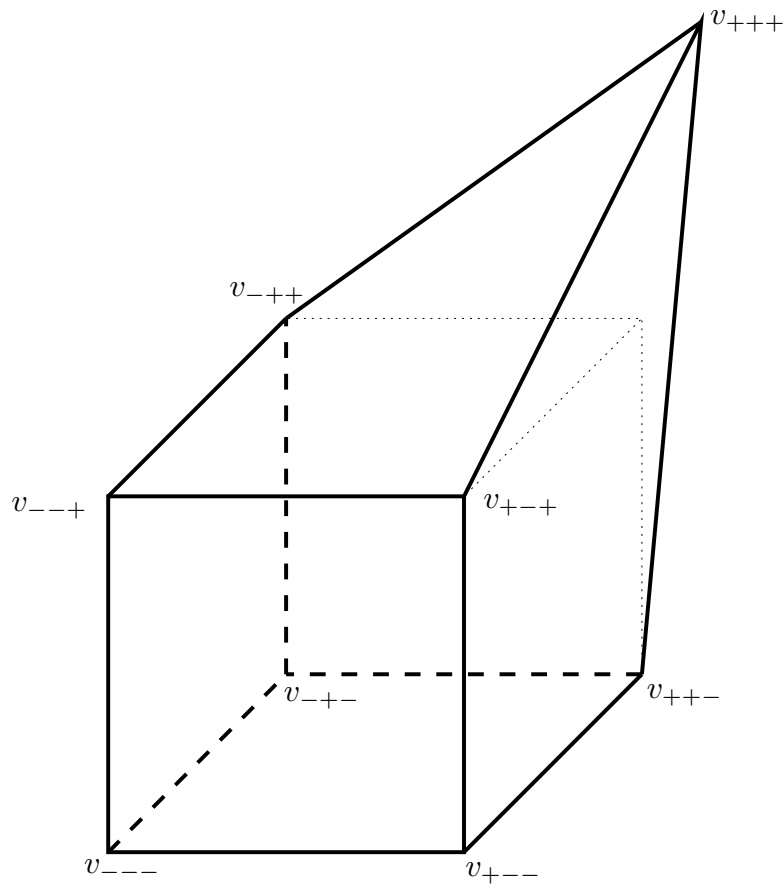
$$v_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3} = \begin{cases} (1, 2, 3) & \text{für } \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = +, \\ (\varepsilon_1 1, \varepsilon_2 1, \varepsilon_3 1) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Der zugehörige vollständige Fächer Δ ist kombinatorisch äquivalent zum durch den Standardwürfel K erzeugten Fächer, also zu Δ_{K^\vee} . Anders als dieser Fächer kommt Δ jedoch nicht von einem Polytop L und ist auch nicht Verfeinerung eines Polytopfächers.

Beweis Der Fächer Δ hat als drei-dimensionale Kegel (wobei $*$ die Werte $+$ und $-$ durchlaufe)

$$\begin{array}{ll} \text{links:} & \text{keg}(v_{-**}) & \text{rechts:} & \text{keg}(v_{+**}) \\ \text{vorn:} & \text{keg}(v_{*-}) & \text{hinten:} & \text{keg}(v_{*+}) \\ \text{unten:} & \text{keg}(v_{**-}) & \text{oben:} & \text{keg}(v_{**+}). \end{array}$$

Wenn Δ durch (echte oder unechte) Verfeinerung aus einem Polytop L entsteht, dann haben alle Ecken von L die Form $w_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3} := \mu_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3} v_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3}$ mit geeigneten $\mu_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3} \in \mathbb{R}_{>0}$.



FIGUR 5.9 Deformierter Würfel

Zunächst kann keine echte Verfeinerung eines Polytops L vorliegen, weil Δ^L sonst nicht vollständig ist: Läßt man etwa die Ecke zu w_{+++} fort, so liegen die Punkte w_{+**} , w_{*+*} und w_{**+} in einer Ebene H . Da die fehlende Ecke w_{---} in der durch die w_{*-*} bestimmte Ebene liegt, folgt auch $w_{---} \in H$. Folglich hat L acht Ecken. Da sich außerdem in einem dreidimensionalen Polytop in jeder Ecke mindestens drei Kanten schneiden, hat L notwendigerweise die gleiche Kantenzahl wie der Standardwürfel.

Kommt andererseits Δ von einem Polytop $L = \text{konv}(w_{***})$, so können wir zeigen, daß sich die jeweils von der rechten, der hinteren und der oberen Seite von L erzeugten affinen Räume in \mathbb{R}^3 außer im Punkt w_{+++} in einem Punkt $\mu(1, 1, 1)$ mit $\mu \in \mathbb{R}_{>0}$ schneiden, also eine Gerade gemeinsam haben, obwohl ihr Schnitt einpunktig sein muß.

Zunächst gilt nämlich

$$(1, 1, 1) = \frac{1}{2}(1, 2, 3) + \frac{1}{4}(1, 1, -1) + \frac{1}{4}(1, -1, -1) = \frac{1}{2}v_{+++} + \frac{1}{4}v_{+ +-} + \frac{1}{4}v_{+ + -} .$$

Also liegt $\mu(1, 1, 1)$ für ein geeignetes $\mu \in \mathbb{R}_{>0}$ in der rechten Seite $\text{konv}(w_{+**})$ von L . Ersetzen wir in der rechten Seite w_{+++} durch $\mu(1, 1, 1)$, so erhalten wir vier Punkte in einer Ebene, und damit gilt nach 5.25 mit $\lambda_{***} := 1/\mu_{***}$ etc.:

$$\lambda + \lambda_{+--} = \lambda_{+ +-} + \lambda_{+ - +} ,$$

also (unter erneuter Verwendung von 5.25 für unten und vorne)

$$\lambda + \lambda_{+--} = (\lambda_{+--} + \lambda_{-+-} - \lambda_{---}) + (\lambda_{--+} + \lambda_{+--} - \lambda_{---})$$

und damit

$$\lambda = \lambda_{+--} + \lambda_{-+-} + \lambda_{--+} - 2\lambda_{---}.$$

Dieser Ausdruck für λ ist symmetrisch in den λ_{***} ; hätten wir mit einer der anderen beiden Seiten begonnen, die w_{+++} als Eckpunkt haben, so hätte sich der gleiche Wert für λ und damit für μ ergeben. Also liegt $\mu(1, 1, 1)$ im Durchschnitt aller drei zugehörigen affinen Ebenen. ■

Man kann allerdings aus jedem vollständigen Fächer, insbesondere also aus obigem Δ , durch Unterteilung einen polytopischen Fächer machen, vgl. [Ew, V.4.5].

Aufgabe 5.12 zu Weihnachten Es begab sich nun zur Weihnachtszeit, daß Petrus sich fragte, welche Form er dem Weihnachtsstern denn diesmal geben solle. Nach zahlreichen Versuchen und Diskussionen mit der Engelschar entschloß er sich, mit einem regelmäßigen n -Eck am Firmament die Strahlen so zu konstruieren, daß jede Ecke genau einen leuchtenden Strahl entließ. Um aber die Vollständigkeit des Herrn augenfällig werden zu lassen, nahm er die von den Strahlen erzeugten Kegel in ihrer Fülle hinzu. Eigentlich hatte er für n die Zahl der Apostel wählen wollen; auf Grund der aktuellen politischen Diskussionen entschloß er sich aber, die Anzahl der Stämme Israels zu wählen. Der neueste Sparerlass zwang ihn jedoch dann, die Zahl seufzend zu halbieren. Das Ergebnis erzürnte heftigst den Rat der torischen Varietäten, dessen Lobby in den letzten Jahren enorm an Einfluß gewonnen hatte. So drückte Petrus letztendlich doch ein regelmäßiges Achteck durch, wie man es dann in diesem Jahr bei aufmerksamem Blick am Firmament bewundern konnte. Wir fragen uns:

- i) Was hat die torischen Varietäten so erzürnt?
- ii) Welche torische Varietät gehört denn nun zu derartigen Weihnachtssternen?

Aufgabe 5.13 Man beweise oder widerlege folgende Aussagen für Fächer Δ_1 und Δ_2 :

- i) Sind Δ_1 und Δ_2 kombinatorisch äquivalent, so sind sie auch als Fächer isomorph (gleiche Fragestellung für vollständige Fächer).
- ii) Sind Δ_1 und Δ_2 als Fächer isomorph, so sind sie auch kombinatorisch äquivalent.
- iii) Sind Δ_1 und Δ_2 kombinatorisch äquivalent und ist Δ_1 polytopisch, dann auch Δ_2 .
- iv) Sind Δ_1 und Δ_2 kombinatorisch äquivalent und ist Δ_1 vollständig, dann auch Δ_2 .

Aufgabe 5.14 Zu einem Fächer Δ mit $\Delta^{\max} = \Delta^n$ heißt eine Funktion $h: |\Delta| \rightarrow \mathbb{R}$ eine „Trägerfunktion“, wenn sie auf jedem Kegel $\sigma \in \Delta^{\max}$ mit einer Linearform $u_\sigma \in M$ übereinstimmt. Man zeige: Ist Δ vollständig, so ist

$$K_h := \{u \in M_{\mathbb{R}}; u \geq h\}$$

ein Polytop in $M_{\mathbb{R}}$ (für Aufgabe 5.15).

Aufgabe 5.15 Eine Trägerfunktion $h = (u_\sigma)_{\sigma \in \Delta^{\max}}$ heiße „streng konkav“, wenn für alle $\sigma \in \Delta^{\max}$ gilt:

$$\text{Für alle } v \notin \sigma \text{ ist } h(v) < u_\sigma(v).$$

Man zeige:

- i) Ist K ein nicht leeres Polytop in $M_{\mathbb{R}}$, dann ist

$$h_K: N_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}, \quad v \mapsto \min_{u \in K} u(v)$$

eine streng konkave Trägerfunktion auf Δ_K .

- ii) Ist Δ vollständig und $h = (u_\sigma)_{\sigma \in \Delta}$ eine streng konkave Trägerfunktion auf Δ , dann ist $\Delta = \Delta_{K_h}$ und Δ damit ein polytopischer Fächer (Hinweis: Man zeige, daß u_σ eine Ecke von K_h ist).
- iii) Für K und h_K wie oben ist $K_{h_K} = K$.

Aufgabe 5.16 Man untersuche auf direktem Wege (d.h. ohne Verwendung von Aufgabe 5.15) die folgenden Fächer auf die Existenz einer streng konvexen Trägerfunktion:

- i) den vollständigen Fächer im \mathbb{R}^3 , dessen Strahlen $\text{keg}(\pm e_i), i = 1, 2, 3$ sind;
- ii) den vollständigen Fächer, der zur Prismenunterteilung in Figur 5.7 gehört.

Aufgabe 5.17 Man zeige für die Schönhardtfigur F im \mathbb{R}^3 , die aus der Prismenzerlegung in Figur 5.7 durch eine leichte Verdrehung des oberen Dreiecks entsteht:

- i) F läßt sich nicht ohne Einfügung weiterer Eckpunkte triangulieren.
- ii) Der von $\eta(\partial F)$ im \mathbb{R}^4 erzeugte Fächer Δ hat als konvexe Hülle einen Fächer $\tilde{\Delta}$ mit mehr Kanten als Δ .

6. Ein-Parameter-Untergruppen und Charaktere

Ziel dieses Paragraphen ist es, die geometrische Bedeutung der Gitter N und M für die Torusoperation zu verstehen.

Wir beginnen damit, in jeder affinen torischen Varietät X_σ einen mit x_σ bezeichneten ausgezeichneten Punkt einzuführen. Ist σ volldimensional, so wird es sich dabei um den einzigen Fixpunkt von X_σ handeln. Andernfalls ergibt sich in der kanonischen Produktzerlegung $X_\sigma \cong X_{\sigma'} \times \mathbb{T}^{\text{codim } \sigma}$ aus (3.19.1) der Punkt $(x_{\sigma'}, 1, \dots, 1)$, vgl. Aufgabe 6.1.

6.1 Definition Zu jedem $\sigma \in \Delta$ gehört ein „Fußpunkt“ $x_\sigma \in X_\sigma$ von X_σ ; als Element von $\text{Spec}(\mathbb{C}[S_\sigma])$ ist er definiert durch

$$x_\sigma(u) := \begin{cases} 1 & \text{für } u \in \sigma^\perp \cap M \\ 0 & \text{für } u \in (\sigma^\vee \setminus \sigma^\perp) \cap M. \end{cases}$$

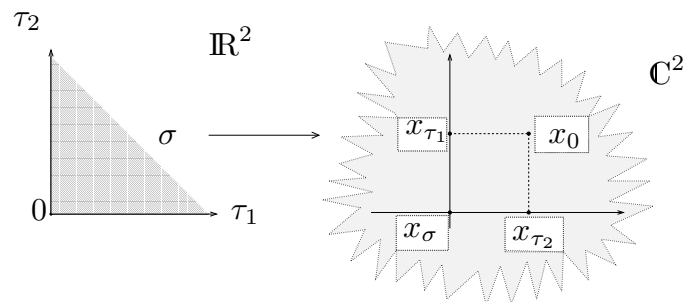
Der Fußpunkt x_σ ist tatsächlich ein Monoidhomomorphismus: Für alle $u, u' \in S_\sigma$ gilt nämlich

$$x_\sigma(u + u') = 1 \iff u + u' \in \sigma^\perp \iff u, u' \in \sigma^\perp \iff x_\sigma(u) = 1 = x_\sigma(u').$$

6.2 Beispiel Für $m \leq n$ und $\sigma := \text{keg}(e_1, \dots, e_m) \oplus \mathfrak{o} \subset \mathbb{R}^n$ ist

$$x_\sigma = (\underbrace{0, \dots, 0}_m, 1, \dots, 1) \in \mathbb{C}^m \times (\mathbb{C}^*)^{n-m} = X_\sigma.$$

Für $n = m = 2$ ist die Zuordnung in Figur 6.1 abgebildet.



FIGUR 6.1 Fußpunkte zu \mathbb{C}^2

Aufgabe 6.1 Es seien $\sigma \in \Delta$ und $\sigma' \in \Delta'$. Man zeige für die Fußpunkte:

- i) $x_{\sigma \oplus \sigma'} = (x_\sigma, x_{\sigma'})$.
- ii) Ist σ volldimensional, so ist x_σ gerade der einzige Fixpunkt von X_σ .

6.3 Bemerkung Für zwei Kegel $\sigma, \sigma' \in \Delta$ gilt

$$x_\sigma \in X_{\sigma'} \iff \sigma \prec \sigma'.$$

Insbesondere ist jeder Kegel σ durch den Fußpunkt x_σ charakterisierbar.

Beweis „ \Leftarrow “ Ist $\sigma \prec \sigma'$, so ist $S_{\sigma'} \subset S_\sigma$ und damit $x_\sigma|_{S_{\sigma'}} \in \text{Hom}_{\text{Hgr}}(S_{\sigma'}, \mathbb{C}) = X_{\sigma'}$.

„ \Rightarrow “ Ist $\sigma \not\prec \sigma'$, so ist zu zeigen, daß sich x_σ nicht zu einem Monoidhomomorphismus auf $S_{\sigma'}$ machen läßt. Zunächst ist $\tau := \sigma \cap \sigma'$ echte Seite von σ ; man wähle ein $u \in M \cap (\sigma^\vee \cap \tau^\perp)^\circ$ gemäß 2.8, dann gilt

$$S_\tau = S_\sigma + \mathbb{Z} \cdot u.$$

Also folgt $x(u) \neq 0$ für jedes $x \in X_\sigma$, das gleichzeitig in der Teilmenge X_τ liegt. Andererseits ist σ^\perp nach 1.24 eine echte Seite von $\sigma^\vee \cap \tau^\perp$, liegt also in dessen Rand und enthält daher nicht das Element u . Damit folgt $x_\sigma(u) = 0$. — Ist schließlich $x_\sigma = x_{\sigma'}$, so folgt $\sigma \prec \sigma' \prec \sigma$ und damit $\sigma = \sigma'$. ■

6.4 Definition Ein Fächer Δ heißt regulärer Fächer, falls alle Kegel σ in Δ regulär sind.

Für eine algebraische Varietät verwenden wir die Begriffe „regulär“, „glatt“, „singularitätenfrei“, „nicht singular“, „ist Mannigfaltigkeit“ synonym.

6.5 Satz Eine torische Varietät X_Δ ist genau dann regulär, wenn der zugehörige Fächer Δ regulär ist.

Beweis Offensichtlich genügt es, den Seitenfächer eines jeden Kegels aus Δ zu betrachten. Darüber hinaus sei dieser Kegel als $\sigma \oplus \mathfrak{o} \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$ mit $\dim \sigma = d$ dargestellt. Dann ist $X_{\sigma \oplus \mathfrak{o}} \cong X_\sigma \times \mathbb{T}^{n-d}$, so daß wir $d = n$ annehmen dürfen.

Die Richtung „ \Leftarrow “ wurde in Aufgabe 3.4 gezeigt.

„ \Rightarrow “ Da X_σ insbesondere im Fußpunkt x_σ glatt ist, gilt mit dem lokalen maximalen Ideal $_{X_\sigma} \mathfrak{m}_{x_\sigma}$ für die Einbettungsdimension von X_σ in x_σ :

$$\dim(_{X_\sigma} \mathfrak{m}_{x_\sigma} / _{X_\sigma} \mathfrak{m}_{x_\sigma}^2) = n.$$

Der Kern \mathfrak{m}_{x_σ} der Auswertungsabbildung

$$\varepsilon_{x_\sigma}: \mathbb{C}[S_\sigma] \rightarrow \mathbb{C}, \quad f \mapsto f(x_\sigma)$$

hat die Gestalt $\mathfrak{m}_{x_\sigma} = \mathbb{C}[S_\sigma^*]$ mit $S_\sigma^* := S_\sigma \setminus \{0\} = S_\sigma \setminus \sigma^\perp$, weil σ volldimensional ist. Bilden wir $S_\sigma^* + S_\sigma^*$ in M , so folgt $\mathfrak{m}_{x_\sigma}^2 = \mathbb{C}[S_\sigma^* + S_\sigma^*]$. Da der kanonische Homomorphismus $\mathfrak{m}_{x_\sigma} / \mathfrak{m}_{x_\sigma}^2 \rightarrow _{X_\sigma} \mathfrak{m}_{x_\sigma} / _{X_\sigma} \mathfrak{m}_{x_\sigma}^2$ ein Vektorraumisomorphismus ist ([AG, 8.6]), ergibt sich insgesamt

$$n = \dim(\mathfrak{m}_{x_\sigma} / \mathfrak{m}_{x_\sigma}^2) = \#(S_\sigma^* \setminus (S_\sigma^* + S_\sigma^*)).$$

Nun wird das Monoid S_σ von $S_\sigma^* \setminus (S_\sigma^* + S_\sigma^*)$ erzeugt. Denn andernfalls betrachte man eine Linearform $\ell \in V^*$, die auf dem punktierten spitzen Kegel $\sigma^\vee \setminus 0$ positiv ist, und wähle unter allen $u \in S_\sigma$, die nicht von $S_\sigma^* \setminus (S_\sigma^* + S_\sigma^*)$ erzeugt werden, eines mit minimalem Wert $\ell(u)$. Dann ist $u \in S_\sigma^* + S_\sigma^*$, also existiert dort eine Zerlegung $u = u_1 + u_2$, wobei etwa u_1 nicht erzeugt wird. Nun widerspricht $\ell(u_1) < \ell(u)$ der Minimalität von $\ell(u)$.

Daher existieren n Vektoren, die S_σ über \mathbb{N} , damit $M = S_\sigma - S_\sigma$ über \mathbb{Z} erzeugen und damit eine \mathbb{Z} -Basis von M sind. Insbesondere ist σ^\vee regulär und damit auch σ . ■

6.6 Definition Eine Ein-Parameter-Untergruppe (1-PUG) von \mathbb{T} ist ein Morphismus $\lambda: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{T}$ algebraischer Gruppen, ein Charakter von \mathbb{T} ist ein Morphismus $\chi: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}^*$ algebraischer Gruppen.

Die Mengen

$$N_{\mathbb{T}} := \{\lambda: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{T}; \lambda \text{ 1-PUG}\}$$

und

$$M_{\mathbb{T}} := \mathbb{X}(\mathbb{T}) := \{\chi: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}^*; \chi \text{ Charakter}\}$$

werden vermöge punktweiser Multiplikation zu abelschen Gruppen.

Die Bezeichnungen werden durch folgende Beobachtung motiviert, die es uns gleichzeitig ermöglicht, die Gruppen $N_{\mathbb{T}}$ bzw. $M_{\mathbb{T}}$ als Ausgangsgitter für die Konstruktion torischer Varietäten zu wählen:

6.7 Bemerkung Für den n -Torus \mathbb{T} existieren kanonische Isomorphismen:

- 1) $\mathbb{Z}^n \rightarrow N_{\mathbb{T}}, \quad v \mapsto (\lambda_v: z \mapsto (z^{v_1}, \dots, z^{v_n}))$,
- 2) $\mathbb{Z}^n \rightarrow M_{\mathbb{T}}, \quad u \mapsto (\chi^u: (t_1, \dots, t_n) \mapsto t_1^{u_1} \cdot \dots \cdot t_n^{u_n})$.

Weiterhin induziert die duale Paarung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}, \quad (v, u) \mapsto \langle v, u \rangle := \sum_{j=1}^n u_j v_j$$

kanonisch eine duale Paarung zwischen $M_{\mathbb{T}}$ und $N_{\mathbb{T}}$:

$$(6.7.1) \quad \langle \cdot, \cdot \rangle: N_{\mathbb{T}} \times M_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad (\lambda, \chi) \mapsto a,$$

wobei a durch die Beziehung $(\chi \circ \lambda)(z) = z^a$, $z \in \mathbb{C}^*$ festgelegt ist. Dabei gilt:

$$(6.7.2) \quad (\chi^u \circ \lambda_v)(z) = z^{\langle v, u \rangle}.$$

Beweis Ersichtlich sind die Abbildungen in 1) und 2) injektive Gruppenhomomorphismen, deren Surjektivität zu verifizieren bleibt.

1) Für $n = 1$ können wir auf Aufgabe 3.7 i) verweisen. Für allgemeines n ist λ von der Form $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ für geeignete $\lambda_j \in \text{Mor}(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*)$; jedes λ_j ist eindeutig von der Form $z \mapsto z^{v_j}$ mit geeignetem $v_j \in \mathbb{Z}$. Daraus folgt die Behauptung.

2) Mit den speziellen 1-PUGs

$$\lambda_{e_j}: z \mapsto (1, \dots, 1, \overset{j}{z}, 1, \dots, 1)$$

ergibt sich für $\chi \in M_{\mathbb{T}}$:

$$\chi(t_1, \dots, t_n) = \chi\left(\prod_{j=1}^n (1, \dots, 1, t_j, 1, \dots, 1)\right) = \prod_{j=1}^n \chi \circ \lambda_{e_j}(t_j),$$

woraus die Surjektivität mit 3.7 1) folgt.

Damit erfüllt die (ersichtlich nicht entartete) Paarung (6.7.1) die Beziehung

$$(6.7.3) \quad \langle \chi^u, \lambda_v \rangle = \langle v, u \rangle,$$

denn es gilt für jedes $z \in \mathbb{C}^*$:

$$(6.7.2) \quad (\chi^u \circ \lambda_v)(z) = \chi^u(z^{v_1}, \dots, z^{v_n}) = \prod_{j=1}^n z^{u_j v_j} = z^{\langle v, u \rangle}. \blacksquare$$

Jedem Morphismus algebraischer Gruppen $\varphi: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^m$ läßt sich umkehrbar eindeutig ein Gruppenhomomorphismus $\Phi: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^m$ zuordnen: Zunächst hat φ nach 6.7 mit eindeutig bestimmten $u_j \in \mathbb{Z}^n$ eine Darstellung $\varphi = (\chi^{u_1}, \dots, \chi^{u_m})$. Faßt man die u_j als Zeilen auf, so ist Φ in den kanonischen Gitterbasen durch die Matrix $(u_1, \dots, u_m)^t \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ gegeben.

6.8 Korollar Die Zuordnung $\mathbb{T} \rightarrow N_{\mathbb{T}}, \varphi \mapsto \Phi$ ist eine Äquivalenz von Kategorien. ■

Dem Gitter N in \mathbb{R}^n hatten wir in (3.6.1) den n -Torus $\mathbb{T}_N \cong N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^*$ zugeordnet. Nunmehr haben wir gesehen, daß wir umgekehrt N als Gruppe der 1-PUGs von \mathbb{T}_N interpretieren können. Aufgrund der Dualität $M_{\mathbb{T}} = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N_{\mathbb{T}}, \mathbb{Z})$ gemäß 6.7 erhalten wir eine entsprechende Interpretation für die Beziehung zwischen $M_{\mathbb{T}}$ und \mathbb{T} : 6.8 gibt analog eine Antiäquivalenz zwischen \mathbb{T} und $M_{\mathbb{T}}$, und M läßt sich als Charaktergruppe von \mathbb{T}_{M^*} interpretieren. In diesem Zusammenhang halten wir die Zuordnungsvorschrift fest: Für $u \in M = \text{Hom}(\mathbb{T}, \mathbb{C}^*)$ haben wir die Identifikation

$$(6.8.1) \quad M \rightarrow \mathbb{X}(\mathbb{T}_{M^*}), \quad u \mapsto (\chi^u: \mathbb{T}_{M^*} \rightarrow \mathbb{C}^*, \quad t \mapsto \chi^u(t) = t(u) = u(t)).$$

Ein Fächermorphismus $\varphi: (N, \Delta) \rightarrow (N', \Delta')$ induziert für die zugehörigen Tori einen Morphismus $\varphi_*: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}'$ algebraischer Gruppen, vgl. 4.12; ferner gehört zu φ ein Gitterhomomorphismus $\varphi^*: M' \rightarrow M$. Damit folgt

6.9 Satz Es sei $\varphi: (N, \Delta) \rightarrow (N', \Delta')$ ein Fächermorphismus

1) Für alle $u' \in M'$ kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T} & \xrightarrow{\varphi_*} & \mathbb{T}' \\ \chi^{\varphi^*(u')} \searrow & & \swarrow \chi^{u'} \\ & \mathbb{C}^* & \end{array} .$$

2) Für alle $v \in N$ kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \xrightarrow{\lambda_v} & \mathbb{T} \\ \lambda_{\varphi(v)} \searrow & & \swarrow \varphi_* \\ & \mathbb{T}' & \end{array} .$$

Beweis 1) Es sei $t \in \mathbb{T}$. Dann folgt aus den Eigenschaften dualer Abbildungen:

$$(\chi^{u'} \circ \varphi_*)(t) = \chi^{u'}(\varphi_*(t)) \stackrel{(6.8.1)}{=} (\varphi_*(t))(u') = t(\varphi^*(u')) \stackrel{(6.8.1)}{=} \chi^{\varphi^*(u')}(t) .$$

2) Da die Charaktere aus $M_{\mathbb{T}'}$ die Punkte von \mathbb{T}' trennen, genügt es, für alle $u' \in M'$ die Beziehung $\chi^{u'} \varphi_* \lambda_v = \chi^{u'} \lambda_{\varphi(v)}$ zu zeigen. Für $z \in \mathbb{C}^*$ folgt mit (6.7.2)

$$\chi^{u'} \varphi_* \lambda_v(z) = (\chi^{u'} \varphi_*)(\lambda_v(z)) \stackrel{1)}{=} \chi^{\varphi^*(u')}(\lambda_v(z)) = z^{\langle v, \varphi^*(u') \rangle} = z^{\langle \varphi(v), u' \rangle} = (\chi^{u'} \lambda_{\varphi(v)})(z) . \blacksquare$$

Dies liefert uns einen Fortsetzungssatz für 1-PUGs und Charaktere:

6.10 Satz *Es sei σ ein N -Kegel.*

1) Für jedes $v \in N$ sind äquivalent:

- a) $v \in \sigma$,
- b) λ_v besitzt eine Fortsetzung zu einem Morphismus $\bar{\lambda}_v: \mathbb{C} \rightarrow X_\sigma$;
- c) λ_v läßt sich in der metrischen Topologie stetig zu $\bar{\lambda}_v: \mathbb{C} \rightarrow X_\sigma$ fortsetzen.

2) Für jedes $u \in M$ sind äquivalent:

- d) $u \in \sigma^\vee$;
- e) χ^u besitzt eine Fortsetzung zu einer regulären Funktion $\bar{\chi}^u: X_\sigma \rightarrow \mathbb{C}$;
- f) χ^u läßt sich in der metrischen Topologie stetig zu $\bar{\chi}^u: X_\sigma \rightarrow \mathbb{C}$ fortsetzen.

Beweis d) \Rightarrow e) ergibt sich aus der Gleichung $\mathcal{O}(X_\sigma) = \mathbb{C}[S_\sigma]$, während e) \Rightarrow f) daraus folgt, daß jede reguläre Funktion in der metrischen Topologie stetig ist.

1) Jedes $u \in S_\sigma$ definiert also eine reguläre Funktion $\chi^u \in \mathbb{C}[S_\sigma] = \mathcal{O}(X_\sigma)$. Ist (u_1, \dots, u_r) ein Erzeugendensystem von S_σ , so gehört dazu nach (2.0.3) eine Einbettung $X_\sigma \hookrightarrow \mathbb{C}^r$. Damit existiert für $v \in N$ genau dann eine Fortsetzung $\bar{\lambda}_v: \mathbb{C} \rightarrow X_\sigma$, wenn es eine Fortsetzung $\bar{\lambda}_v: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^r$ gibt. Dies ist äquivalent dazu, daß alle $\chi^u \circ \lambda_v$ für $u \in S_\sigma$ regulär fortsetzbar sind. Nun gilt auf \mathbb{C}^* nach (6.7.2)

$$\chi^u \circ \lambda_v(z) = z^{\langle v, u \rangle} .$$

Damit ist $\chi^u \circ \lambda_v$ genau dann (regulär bzw. stetig) in $0 \in \mathbb{C}$ fortsetzbar, wenn $\langle v, u \rangle \geq 0$ gilt. Dies wiederum trifft nach dem Satz von Hahn-Banach 1.5 genau dann für alle $u \in S_\sigma$ zu, wenn v in σ liegt.

f) \Rightarrow d) Ist $u \notin \sigma^\vee$, so existiert ein $v \in \sigma \cap N$ mit $\langle v, u \rangle < 0$. Auf \mathbb{C}^* gilt wieder die Beziehung (6.7.2), so daß $\lim_{z \rightarrow 0} z^{\langle v, u \rangle}$ nicht existiert. Andererseits läßt sich λ_v nach 1) auf \mathbb{C} fortsetzen, so daß $\lim_{z \rightarrow 0} (\chi^u \circ \lambda_v)(z)$ doch existiert! Also folgt $u \in \sigma^\vee$. \blacksquare

6.11 Korollar Für einen N -Kegel σ und ein $v \in N$ gelten

$$1) v \in \sigma^\circ \iff \lim_{z \rightarrow 0} \lambda_v(z) = x_\sigma.$$

2) Ist $\varphi: (N, \sigma) \rightarrow (N', \sigma')$ ein Kegelmorphismus mit $\varphi(\sigma^\circ) \subset \sigma'^\circ$, so ist $\varphi_*(x_\sigma) = x_{\sigma'}$.

Beweis 1) Nach 6.10 existiert der betrachtete Grenzwert genau dann, wenn v in σ liegt, was wir nunmehr voraussetzen. Nach 1.16 liegt v genau dann in σ° , wenn

$$\sigma^\perp = \sigma^\vee \cap v^\perp = \{u \in \sigma^\vee; \langle v, u \rangle = 0\}$$

gilt. Dies wiederum ist äquivalent zur Gültigkeit der Gleichung $x_\sigma(u) = \lim_{z \rightarrow 0} z^{\langle v, u \rangle}$ für alle $u \in \sigma^\vee$: Wir haben nämlich für $u \in \sigma^\vee \cap M$

$$\chi^u(x_\sigma) \stackrel{(6.8.1)}{=} x_\sigma(u) = \begin{cases} 1, & u \in \sigma^\perp \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

sowie

$$(\chi^u \circ \bar{\lambda}_v)(0) \stackrel{(6.7.2)}{=} \lim_{z \rightarrow 0} z^{\langle v, u \rangle} = \begin{cases} 1, & \langle v, u \rangle = 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da die Charaktere aus $M_{\mathbb{T}}$ die Punkte von \mathbb{T} trennen, ist schließlich $\bar{\lambda}_v(0) = x_\sigma$ äquivalent dazu, daß die Beziehung $\chi^u(\bar{\lambda}_v(0)) = \chi^u(x_\sigma)$ für alle $u \in \sigma^\vee$ gilt.

2) Man wähle ein $v \in \sigma^\circ$ und setze $w := \varphi(v) \in \sigma'^\circ$. Dann folgt aus 1):

$$\varphi_*(x_\sigma) = \varphi_*\left(\lim_{z \rightarrow 0} \lambda_v(z)\right) = \lim_{z \rightarrow 0} \varphi_* \lambda_v(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \lambda_{\varphi(v)}(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \lambda_w(z) = x_{\sigma'} . \blacksquare$$

Aufgabe 6.2 Für eine torische Varietät X_Δ zeige man, daß sich eine 1-PUG λ_v genau dann zu einem Morphismus $\bar{\lambda}_v: \mathbb{P}^1 \rightarrow X_\Delta$ fortsetzen läßt, wenn sowohl v als auch $-v$ in $|\Delta|$ liegen.

Führen wir der Bequemlichkeit halber die Bezeichnung ATV für folgende Kategorie ein:

- Objekte sind die affinen (zusammenhängenden) normalen algebraischen Varietäten U , auf denen ein gleichdimensionaler algebraischer Torus \mathbb{T} mit einer dichten offenen Bahn operiert,
- Morphismen $\varphi: U \rightarrow U'$ sind äquivariante Morphismen, die auf den offenen dichten Bahnen Morphismen $\varphi|_{\mathbb{T}}: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}'$ algebraischer Gruppen induzieren.

6.12 Satz Die Kategorie der affinen torischen Varietäten und die Kategorie ATV sind äquivalent.

Beweis Nach 3.5 ist jedes X_σ eine normale affine Varietät; sie enthält nach 3.18 eine dichte \mathbb{T} -Bahn. Morphismen $\varphi: X_\sigma \rightarrow X_{\sigma'}$ sind gemäß 3.19 äquivariant und setzen den Gruppenhomomorphismus $\varphi: X_\sigma \rightarrow X_{\sigma'}$ fort.

Für die andere Richtung definieren wir einen Umkehrfunctor auf ATV mit Werten in der Kategorie der Monoide, was nach 3.20 und 3.3 ausreicht. Betrachten wir dazu zunächst für ein Objekt U aus ATV und den zugehörigen Torus $\mathbb{T} = \mathbb{T}_U$ die Menge

$$\mathbb{X}(U) := \{f \in \mathbb{C}[U]; f|_{\mathbb{T}} \in \mathbb{X}(\mathbb{T})\} .$$

Die Einschränkungabbildung $\mathbb{X}(U) \rightarrow \mathbb{X}(\mathbb{T})$ ist ersichtlich injektiv; damit läßt sich $\mathbb{X}(U)$ als Teilmenge von $\mathbb{X}(\mathbb{T})$ interpretieren. Insbesondere hat jedes $f \in \mathbb{X}(U)$ die Gestalt $\chi^m \in \mathbb{X}(\mathbb{T})$. Weiter ist $\mathbb{X}(U)$ eine Unterhalbgruppe von $\mathbb{X}(\mathbb{T})$: Mit $f, g \in \mathbb{X}(U)$ sind auch $f, g \in \mathbb{C}[U]$ und $f|_{\mathbb{T}} \cdot g|_{\mathbb{T}} \in \mathbb{X}(\mathbb{T})$. Setzt man bezüglich der Identifikation 6.7 2)

$$S := S(U) := \{m \in \mathbb{Z}^n; \chi^m \in \mathbb{X}(U)\},$$

so ist S eine Unterhalbgruppe von $M := \mathbb{Z}^n \cong \mathbb{X}(\mathbb{T})$.

a) Wir zeigen nun $\mathbb{C}[U] = \mathbb{C}[S]$. Nach Konstruktion gilt zunächst

$$\bigoplus_{s \in S} \mathbb{C} \cdot \chi^s = \mathbb{C}[S] \subset \mathbb{C}[U].$$

Es bleibt zu verifizieren, daß diese Inklusion nicht echt ist. Jedes $f \in \mathbb{C}[U]$ hat wegen $\mathbb{C}[U] \subset \mathbb{C}[\mathbb{T}] = \mathbb{C}[\mathbb{X}(\mathbb{T})]$ eine eindeutige Darstellung

$$(6.12.1) \quad f = \sum_{m \in M} a_m \chi^m \quad \text{mit } a_m \in \mathbb{C}.$$

Nehmen wir an, die Inklusion sei doch echt, und wählen ein $f \in \mathbb{C}[U] \setminus \mathbb{C}[S]$ mit einer minimalen Summandenzahl. Diese ist mindestens zwei: Wäre f von der Form $a_m \chi^m$, so läge χ^m in $\mathbb{X}(U)$ und f damit doch in $\mathbb{C}[S]$. Wir erhalten offensichtlich einen Widerspruch gegen die Minimalität, wenn in f ein Koeffizient $a_{m_0} \neq 0$ mit $\chi^{m_0} \in \mathbb{C}[U]$ auftritt, d.h., mit $a_{m_0} \chi^{m_0} \in \mathbb{C}[S]$. Wir finden so ein m_0 wie folgt:

Die kommutative Gruppe \mathbb{T} operiert auf $\mathbb{C}[\mathbb{T}]$ und eingeschränkt analog auf $\mathbb{C}[U]$ durch

$$\mathbb{T} \times \mathbb{C}[\mathbb{T}] \rightarrow \mathbb{C}[\mathbb{T}], \quad (t, g) \mapsto (tg: w \mapsto g(tw)).$$

Dabei ist $\mathbb{C}[U]$ ein invarianter Teilraum von $\mathbb{C}[\mathbb{T}]$. Insbesondere gilt für jedes $t \in \mathbb{T}$ und f mit der Darstellung gemäß (6.12.1) zunächst auf \mathbb{T} und damit auch auf U :

$$tf(w) = \sum a_m \chi^m(tw) = \sum a_m \chi^m(t) \chi^m(w),$$

i.e.,

$$tf = \sum (a_m \chi^m(t)) \chi^m \in \mathbb{C}[U].$$

Es sei nun P das sogenannte *Newton-Polytop*

$$(6.12.2) \quad P := \text{konv}(\{m; a_m \neq 0\}) \subset M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$$

von f . Man wähle eine Ecke $m_0 \in P$ und eine Stützhyperebene v^\perp in $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ mit $v \in N$, $P \subset v^\vee$ und $P \cap v^\perp = \{m_0\}$. Gemäß 6.7 entspricht v einer 1-PUG λ_v . Wir erhalten damit für $z \in \mathbb{C}^*$ und $t := \lambda_v(z)$ aus (6.12.2):

$$\lambda_v(z)f = \sum (a_m \chi^m(\lambda_v(z))) \chi^m \stackrel{(6.7.2)}{=} \sum (a_m z^{\langle v, m \rangle}) \chi^m \in \mathbb{C}[U]$$

und folglich mit den positiven natürlichen Zahlen $n_m := \langle v, m - m_0 \rangle$ für $m \in P \setminus \{m_0\}$

$$z^{-\langle v, m_0 \rangle} \lambda_v(z) f = \sum (a_m z^{\langle v, m \rangle - \langle v, m_0 \rangle}) \chi^m = a_{m_0} \chi^{m_0} + \sum_{m \neq m_0} (a_m z^{n_m}) \chi^m \in \mathbb{C}[U].$$

In $\mathbb{C}[\mathbb{T}]$ ist der Grenzübergang für $z \rightarrow 0$ durchführbar und liefert $a_{m_0} \chi^{m_0} \in \mathbb{C}[\mathbb{T}]$; da aber $\mathbb{T} \cdot f$ in einem endlichdimensionalen (und damit abgeschlossenen) Untervektorraum von $\mathbb{C}[U]$ liegt (vgl [AG, Aufgabe 11.7]), folgt $a_{m_0} \chi^{m_0} \in \mathbb{C}[U]$.

b) Es existiert für $N := M^*$ ein N -Kegel σ mit $U = X_\sigma$. Denn $S = S(U)$ ist endlich erzeugt, weil $\mathbb{C}[S] = \mathbb{C}[U]$ eine endlich erzeugte Algebra ist (vgl. den Beweis von 3.3). Weiter ist S nach 3.2 saturiert, da U normal ist. Weil U rational ist, liefert Aufgabe 3.2 $S - S = M - M = M$, also ist S erzeugend, so daß S nach 2.13 von der gewünschten Form $S = S_\sigma$ ist. Insbesondere „ist“ damit jedes U aus ATV eine torische Varietät.

Kommen wir nun zu den *Morphismen* $\varphi: U \rightarrow U'$ in der Kategorie ATV: Dazu ist

$$\varphi^* := \mathbb{X}(\varphi): \mathbb{X}(U') \rightarrow \mathbb{X}(U), \quad f \mapsto f \circ \varphi$$

ein Halbgruppenhomomorphismus, der von einem Homomorphismus $\mathbb{X}(\mathbb{T}') \rightarrow \mathbb{X}(\mathbb{T})$ herrührt, weil φ nach Voraussetzung einen Gruppenhomomorphismus $\varphi: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}'$ induziert; beide bestimmen sich wechselseitig. Die zugehörige Abbildung $\varphi^*: M' \rightarrow M$ erfüllt $\varphi(S') \subset S$: Für $s' \in S'$ ist einerseits $\chi^{s'} \in \mathbb{X}(\mathbb{T}')$ und $\chi^{\varphi^*(s')} \in \mathbb{X}(\mathbb{T})$. Anders interpretiert gilt aber nach a) auch $\chi^{s'} \in \mathbb{C}[U']$ und damit

$$\chi^{\varphi^*(s')} \stackrel{6.9}{=} \chi^{s'} \circ \varphi \in \mathbb{C}[U],$$

also ist $\varphi^*(s') \in S$. Insgesamt induziert φ einen Morphismus in der Kategorie der Halbgruppen

$$\varphi^* := S(\varphi): S(U') \rightarrow S(U).$$

Da S erzeugend ist, bestimmen sich schließlich φ und $S(\varphi)$ wechselseitig; insbesondere tritt jedes φ als Bild eines ψ mit $\varphi^* = \psi$ auf. ■

Zum Beweis von Theorem 4.19

Für den Nachweis, daß die Kategorien FAN und TOV äquivalent ist, muß im wesentlichen gezeigt werden, daß alle Objekte aus TOV (bis auf Isomorphie) tatsächlich von einem Fächer herkommen und daß alle Morphismen in TOV torisch sind. Wir beginnen mit den *Objekten* X aus TOV: Man setze $V := \mathbb{R}^{\dim X}$ und $N := N_{\mathbb{T}}$ gemäß 6.7. Der Existenzbeweis für Δ beruht entscheidend auf dem (vgl. [Su, Lemma 8, Cor. 2])

6.13 Satz von Sumihiro *Jede normale \mathbb{T} -Varietät besitzt eine offene Überdeckung aus affinen \mathbb{T} -invarianten Teilmengen. ■*

Aufgabe 6.3 Man zeige am Beispiel $\mathbb{P}_1/(0 \sim \infty)$, daß die Voraussetzung „normal“ in 6.13 wesentlich ist.

Beweis des Theorems Jede offene affine \mathbb{T} -invariante Teilmenge U von X aus TOV ist nach 6.12 von der Form X_σ , der Durchschnitt solcher X_σ und $X_{\sigma'}$ als offener affiner invarianter Teil von der Form $X_\tau = X_{\tau'}$, wobei wir im Kleinen Wörterbuch § 7 zeigen, daß τ bzw. τ' Seite von σ bzw. σ' ist. Nach 6.10 1) läßt sich $N \cap \sigma$ in N und damit σ in V wie folgt lokalisieren: Ein Punkt $v \in N$ gehört genau dann zu σ , wenn eine reguläre Fortsetzung $\bar{\lambda}_v: \mathbb{C} \rightarrow X_\sigma$ existiert. Damit charakterisieren die Morphismen

$$\bar{\lambda}_v: \mathbb{C} \rightarrow X_\tau = X_\sigma \cap X_{\sigma'} = X_{\tau'}$$

einerseits die Punkte von $\tau \prec \sigma$, andererseits aber auch die Punkte von $\tau' \prec \sigma'$, so daß $\tau = \tau'$ gilt und σ und σ' sich in dieser gemeinsamen Seite schneiden. Also fügen sich die einzelnen Kegel zu einem Fächer Δ mit $X \cong X(N, \Delta)$ zusammen.

Hinsichtlich der *Morphismen* ist zu zeigen: Ist $f: X(N, \Delta) \rightarrow X(N', \Delta')$ ein Morphismus in TOV, so existiert genau ein Fächermorphismus $\varphi: (N, \Delta) \rightarrow (N', \Delta')$ mit $f = X(\varphi) = \varphi_*$.

Dies ist zunächst einmal klar, was den Gitterhomomorphismus angeht: Nach 6.8 gehört zum Homomorphismus $f|_{\mathbb{T}}: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}'$ genau ein Homomorphismus $\varphi: N \rightarrow N'$ mit $\varphi_* = f|_{\mathbb{T}}$. Zu zeigen ist nur, daß φ auch ein Fächermorphismus ist. Dazu bleibt für jedes $\sigma \in \Delta$ ein $\sigma' \in \Delta'$ mit $\varphi(\sigma^\circ) \subset \sigma'^\circ$ zu finden (vgl. Aufgabe 4.5). Man wähle ein $v \in \sigma^\circ$; nach 6.9 2) gilt für die 1-PUGs

$$\lambda_{\varphi(v)} = f \circ \lambda_v.$$

Gemäß 6.10 1) existiert zunächst

$$f\left(\lim_{z \rightarrow 0} \lambda_v(z)\right) = \lim_{z \rightarrow 0} \lambda_{\varphi(v)}(z).$$

Aus 6.11 1) folgt einerseits $\lim_{z \rightarrow 0} \lambda_v(z) = x_\sigma$; analog ist $\lim_{z \rightarrow 0} \lambda_{\varphi(v)}(z)$ der Fußpunkt $x_{\sigma'}$ eines Kegels $\sigma' \in \Delta'$. Also liegt $\varphi(v)$ in σ'° . Dies trifft nun für alle $v \in \sigma^\circ$ in gleicher Weise zu, also folgt $\varphi(\sigma^\circ) \subset \sigma'^\circ$. ■

Aufgabe 6.4 Ist G eine Zariski-abgeschlossene, echte algebraische Untergruppe des Torus \mathbb{T} , so existiert ein Charakter $\chi \neq 1$ auf \mathbb{T} mit $\chi|_G = 1$. Man zeige durch ein Beispiel, daß die Bedingung „metrisch abgeschlossen“ dazu nicht ausreichend ist.

Kleines Wörterbuch § 6

Theorie in (V, N)	torische Theorie
regulärer Kegel	reguläre affine torische Varietät
regulärer Fächer	reguläre torische Varietät

7. Die Bahnenzerlegung

Ziel dieses Paragraphen ist, zu zeigen, daß die Bahnen der Wirkung von $\mathbb{T} = \mathbb{T}_N$ auf X_Δ eine Partition von X_Δ liefern, wobei jede Bahn \mathbb{B}_σ zu genau einem Kegel $\sigma \in \Delta$ gehört. Dazu haben wir die Kombinatorik der Bahnzerlegung zu untersuchen, was wesentlich auf ein Studium der Fächertopologie von Δ hinausläuft. Weiterhin soll gezeigt werden, daß jeder Bahnabschluß wieder eine torische Varietät ist.

7.1 Bemerkung Die Zuordnung

$$\vartheta: \Delta \rightarrow \mathfrak{X}_\Delta := \{X_\sigma; \sigma \in \Delta\}, \quad \sigma \mapsto X_\sigma$$

ist ein Ordnungsisomorphismus durchschnittsabgeschlossener Mengensysteme.

Beweis Die Abbildung ist eine inklusionserhaltende Surjektion, nach Aufgabe 4.1 ist sie durchschnittsverträglich. Aus 6.3 folgt weiterhin, daß die Zuordnung injektiv ist: Aus $X_\sigma = X_{\sigma'}$ ergibt sich $\sigma \prec \sigma'$, und aus Analogiegründen gilt auch die umgekehrte Seitenbeziehung. ■

Wir schieben zunächst einige allgemeine Bemerkungen zu endlichen durchschnitts-abgeschlossenen Mengensystemen \mathfrak{D} von Teilmengen einer gemeinsamen Obermenge ein; bezüglich Inklusion ist \mathfrak{D} partiell geordnet. Es bezeichne $|\mathfrak{D}| := \bigcup_{\sigma \in \mathfrak{D}} \sigma$ die Trägermenge von \mathfrak{D} , ferner sei $\mathfrak{B}(\mathfrak{D})$ die von \mathfrak{D} in $|\mathfrak{D}|$ erzeugte Boolesche Algebra, die definitionsgemäß von Durchschnitten, Vereinigungen und Differenzmengen von Elementen aus \mathfrak{D} erzeugt wird. Unter dem „Kern von $\sigma \in \mathfrak{D}$ “ verstehen wir

$$\sigma^0 := \sigma \setminus \bigcup_{\sigma \not\supseteq \tau} \tau \in \mathfrak{B}(\mathfrak{D}).$$

Wir machen für das Folgende die vereinfachende Annahme:

$$(7.2.1) \quad \text{Für kein } \sigma \in \mathfrak{D} \text{ ist der Kern } \sigma^0 \text{ leer.}$$

7.2 Lemma *Es sei $\vartheta: \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{D}'$ ein Ordnungsisomorphismus zweier derartiger Mengensysteme, die (7.2.1) erfüllen. Dann gibt es genau einen Isomorphismus Boolescher Algebren*

$$\mathfrak{B}(\vartheta): \mathfrak{B}(\mathfrak{D}) \rightarrow \mathfrak{B}(\mathfrak{D}'),$$

der ϑ fortsetzt, nämlich die Fortsetzung von $\sigma^0 \mapsto (\vartheta(\sigma))^0$.

Beweis Da $\mathfrak{B}(\mathfrak{D})$ von \mathfrak{D} erzeugt wird, läßt sich jedes Element $\sigma \in \mathfrak{B}(\mathfrak{D})$ eindeutig in die disjunkte Vereinigung der Kerne aller $\tau \in \mathfrak{D}$ mit $\tau \subset \sigma$ zerlegen; also existiert höchstens eine Fortsetzung. Andererseits wird durch die Zuordnung $\sigma^0 \mapsto (\vartheta(\sigma))^0$ der jeweiligen „Atome“ ein Isomorphismus $\mathfrak{B}(\vartheta)$ definiert, denn für $\sigma \in \mathfrak{D}$ existieren disjunkte Zerlegungen:

$$\mathfrak{B}(\vartheta)(\sigma) = \mathfrak{B}(\vartheta)\left(\bigcup_{\tau \subset \sigma} \tau^0\right) = \bigcup_{\vartheta(\tau) \subset \vartheta(\sigma)} \vartheta(\tau)^0 = \bigcup_{\tau' \subset \vartheta(\sigma)} (\tau')^0 = \vartheta(\sigma).$$

Insbesondere ist $\mathfrak{B}(\vartheta)$ eine Fortsetzung von ϑ .

7.3 Bemerkung Ohne die Voraussetzung (7.2.1) wäre 7.2 falsch: Aus der Obermenge \mathbb{Z}_3 ⁵⁾ seien die Mengensysteme

$$\mathfrak{D} := \{\{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\} \rightarrow \mathfrak{D}' := \{\{0\}, \{1\}, \mathbb{Z}_3\}$$

mit der naheliegenden Zuordnung gegeben. Diese ist ein Isomorphismus, aber $\mathfrak{B}(\mathfrak{D})$ eine echte Teilmenge von $\mathfrak{B}(\mathfrak{D}')$, in deren Komplement das Element $\{2\}$ liegt. ■

Wenden wir Lemma 7.2 nun auf einen N -Fächer Δ an. Für alle Kegel σ aus Δ ist der Kern σ^0 das relative Innere $\sigma^\circ = \sigma \setminus \bigcup_{\tau \not\prec \sigma} \tau$ und damit nicht leer; also ist (7.2.1) erfüllt. Man hat folgende Partitionen bezüglich Δ :

$$(7.2.2) \quad |\Delta| = \bigcup_{\sigma \in \Delta} \sigma^\circ, \quad \mathfrak{B}(\Delta) = \left\{ \bigcup_{\sigma \in \mathfrak{M}} \sigma^\circ; \mathfrak{M} \subset \Delta \right\}, \quad \sigma = \bigcup_{\tau \prec \sigma} \tau^\circ.$$

Für jedes $\sigma \in \Delta$ ist der Kern

$$(7.2.3) \quad \mathbb{B}_\sigma := X_\sigma \setminus \bigcup_{\tau \not\prec \sigma} X_\tau \in \mathfrak{B}(\mathfrak{X}_\Delta)$$

lokal abgeschlossen und nicht leer, denn nach 6.3 liegt x_σ in \mathbb{B}_σ . Als Konsequenz ergeben sich zum Ordnungsisomorphismus aus 7.1 mit 7.2 disjunkte Zerlegungen

$$(7.2.4) \quad X_\Delta = \bigcup_{\sigma \in \Delta} \mathbb{B}_\sigma, \quad \mathfrak{B}(\mathfrak{X}_\Delta) = \left\{ \bigcup_{\sigma \in \mathfrak{M}} \mathbb{B}_\sigma; \mathfrak{M} \subset \Delta \right\}, \quad X_\sigma = \bigcup_{\tau \prec \sigma} \mathbb{B}_\tau,$$

und mit den \mathbb{B}_σ sind alle Elemente von $\mathfrak{B}(\mathfrak{X}_\Delta)$ konstruierbare Mengen in X_Δ .

7.4 Korollar Die Abbildung

$$\vartheta: \Delta \rightarrow \mathfrak{X}_\Delta, \quad \sigma \mapsto X_\sigma$$

läßt sich auf genau eine Weise zu einem Isomorphismus $\mathfrak{B}(\Delta) \rightarrow \mathfrak{B}(\mathfrak{X}_\Delta)$ Boolescher Algebren fortsetzen, nämlich durch

$$\bigcup_{\sigma \in \mathfrak{M}} \sigma^\circ \mapsto \bigcup_{\sigma \in \mathfrak{M}} \mathbb{B}_\sigma. \quad \blacksquare$$

⁵⁾ Mit $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/(m)$ bezeichnen wir die zyklische Gruppe der Ordnung m .

Damit können wir die Wahl des Symbols \mathbb{B}_σ als „Bahn“ zu σ rechtfertigen:

7.5 Satz Die Bahn von x_σ in X_Δ ist

$$\mathbb{B}_\sigma = X_\sigma \setminus \bigcup_{\tau \not\prec \sigma} X_\tau = \mathbb{T} \cdot x_\sigma$$

und damit in X_σ abgeschlossen. Insbesondere ist $X_\Delta = \bigcup_{\sigma \in \Delta} \mathbb{B}_\sigma$ die Bahnenzerlegung von X_Δ und $\mathfrak{B}(X_\Delta)$ die Boolesche Algebra aller \mathbb{T} -invarianten Teilmengen von X_Δ .

Beweis Die Inklusion „ $\mathbb{B}_\sigma \supset \mathbb{T} \cdot x_\sigma$ “ ist trivial: Mit allen X_τ für $\tau \prec \sigma$ ist auch \mathbb{B}_σ invariant unter \mathbb{T} , und aus $x_\sigma \in \mathbb{B}_\sigma$ folgt $\mathbb{T} \cdot x_\sigma \subset \mathbb{B}_\sigma$.

Zeigen wir nun „ $\mathbb{B}_\sigma \subset \mathbb{T} \cdot x_\sigma$ “: a) Für $x \in X_\sigma$ und $\tau \prec \sigma$ wollen wir in (7.5.1) ein Kriterium dafür angeben, daß x in X_τ liegt. Folgende Situation liegt vor:

$$\begin{array}{ccc} X_\sigma & \ni & x: S_\sigma \rightarrow \mathbf{C} \\ \cup & & \cap \\ X_\tau & & S_\tau \quad . \end{array}$$

Also liegt x nach (3.13.1) genau dann in X_τ , wenn eine Fortsetzung $\bar{x}: S_\tau \rightarrow \mathbf{C}$ von x existiert. Ist $u \in (\sigma^\vee \cap \tau^\perp)^\circ \cap M$, so folgt $S_\tau = S_\sigma - \mathbb{N}u$ aus 2.8. Wir behaupten nun für jedes $u \in (\sigma^\vee \cap \tau^\perp)^\circ \cap M$:

$$(7.5.1) \quad \exists \bar{x} \in X_\tau \iff x(u) \neq 0 .$$

Beweisen wir dies: „ \Rightarrow “ Eine Fortsetzung $\bar{x} \in X_\tau$ von x ist zusätzlich auf $-u$ definiert, also gilt wegen $u \in S_\sigma$

$$1 = \bar{x}(u)\bar{x}(-u) = x(u)\bar{x}(-u), \quad \text{i.e., } x(u) \neq 0 .$$

„ \Leftarrow “ Für ein beliebiges Element $u_1 - pu$ aus $S_\tau = S_\sigma - \mathbb{N}u$ setzen wir (zwangsläufig)

$$\bar{x}(u_1 - pu) := x(u_1)x(u)^{-p} ;$$

es genügt offensichtlich zu zeigen, daß \bar{x} wohldefiniert ist. Dazu sei $u_1 - pu = u_2 - qu$; ist etwa $p \geq q$, so gilt dann $u_1 = u_2 + (p - q)u$ in S_σ und damit $x(u_1) = x(u_2)x(u)^{p-q}$, also

$$x(u_1)x(u)^{-p} = x(u_2)x(u)^{-q} .$$

b) Nun sei $x \in \mathbb{B}_\sigma = X_\sigma \setminus \bigcup_{\tau \not\prec \sigma} X_\tau$. Dann gilt für jedes $u \in S_\sigma$:

$$(7.5.2) \quad x(u) \text{ ist } \begin{cases} \neq 0 & \text{für } u \in \sigma^\perp \cap M, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Denn zunächst existiert gemäß (7.2.2) eine disjunkte Zerlegung

$$\sigma^\vee = \bigcup_{\tau \prec \sigma} (\sigma^\vee \cap \tau^\perp)^\circ = (\sigma^\perp)^\circ \cup \bigcup_{\tau \not\prec \sigma} (\sigma^\vee \cap \tau^\perp)^\circ ,$$

die wegen $(\sigma^\perp)^\circ = \sigma^\perp$ eine Zerlegung

$$S_\sigma = \sigma^\vee \cap M = (\sigma^\perp \cap M) \cup \bigcup_{\tau \not\prec \sigma} (\sigma^\vee \cap \tau^\perp)^\circ \cap M$$

liefert. Für $\tau \not\prec \sigma$ folgt nach (7.5.1) aus $x \notin X_\tau$

$$x((\sigma^\vee \cap \tau^\perp)^\circ \cap M) = 0,$$

während x auf der Gruppe $\sigma^\perp \cap M$ nicht den Wert 0 annehmen kann. Ähnlich verhält sich definitionsgemäß x_σ :

$$(7.5.3) \quad x_\sigma(u) = \begin{cases} 1 & \text{für } u \in \sigma^\perp \cap M, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nun wählen wir eine Gitterzerlegung gemäß 2.20

$$(7.5.4) \quad M = (\sigma^\perp \cap M) \oplus M_1$$

und definieren ein t aus $\mathbb{T} = \text{Spec}(\mathbb{C}[M])$ durch

$$t := \begin{cases} x & \text{auf } \sigma^\perp \cap M, \\ 1 & \text{auf } M_1. \end{cases}$$

Damit gilt ersichtlich $x = t \cdot x_\sigma$, i.e., $x \in \mathbb{T} \cdot x_\sigma$. ■

Durch den Fußpunkt x_σ von X_σ erhalten wir nach 7.5 mit Hilfe der Isotropiegruppe \mathbb{T}_{x_σ} eine kanonische Darstellung der Bahn \mathbb{B}_σ , die gleichzeitig ihre Dimension beschreibt:

7.6 Korollar *Die Bahn von x_σ in X_Δ ist eine lokal abgeschlossene Menge in X_Δ , die als algebraische Varietät regulär ist. Es gilt:*

$$\mathbb{B}_\sigma \cong \mathbb{T}/\mathbb{T}_{x_\sigma} = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\sigma^\perp \cap M, \mathbb{C}^*) = (\mathbb{C}^*)^{\text{codim } \sigma}.$$

Beweis Als lokal abgeschlossene Teilmenge von X_Δ ist \mathbb{B}_σ eine algebraische Varietät. Auf ihr operiert \mathbb{T} transitiv, so daß \mathbb{B}_σ in allen Punkten gleich aussieht. Daher ist \mathbb{B}_σ regulär. Für die Gruppenwirkung $\mu: \mathbb{T} \times X_\sigma \rightarrow X_\sigma$ ist $\mu(\mathbb{T} \times x_\sigma) = \mathbb{T} \cdot x_\sigma = \mathbb{B}_\sigma$. Dies induziert auf dem Quotienten (vgl. [AG 11.17]) eine reguläre Bijektion $\mathbb{T}/\mathbb{T}_{x_\sigma} \rightarrow \mathbb{T} \cdot x_\sigma$; sie ist nach Aufgabe 3.12 ein Isomorphismus, da \mathbb{B}_σ insbesondere normal ist. Die Elemente aus \mathbb{T}_{x_σ} sind nach (7.5.3) genau die $x \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{C}^*)$, die in der Zerlegung (7.5.4) auf $\sigma^\perp \cap M$ den Wert 1 annehmen. ■

Fassen wir nun die Eigenschaften der Bahnenzerlegung in einem Ergebnis zusammen, das es uns gestattet, die kombinatorische Struktur der Bahnenzerlegung von X_Δ aus der von Δ ablesen zu können, ohne Einzelheiten explizit ausrechnen zu müssen:

7.7 Satz *Für $\sigma \in \Delta$ gilt*

$$1) \quad X_\sigma = \bigcup_{\tau \prec \sigma} \mathbb{B}_\tau.$$

$$2) \mathbb{V}_\sigma := \overline{\mathbb{B}}_\sigma = \bigcup_{\gamma \succ \sigma} \mathbb{B}_\gamma = \bigcup_{\gamma \in \text{Stern}(\sigma)} \mathbb{B}_\gamma \text{ in } X_\Delta.$$

$$3) \mathbb{B}_\sigma = X_\sigma \setminus \bigcup_{\tau \not\prec \sigma} X_\tau = X_\sigma \setminus \bigcup_{\gamma \not\prec \sigma} \mathbb{B}_\gamma = \mathbb{V}_\sigma \setminus \bigcup_{\sigma \not\prec \gamma} \mathbb{V}_\gamma.$$

Beweis Aussage 1) wurde in (7.2.4) gezeigt, und 3) folgt durch Einsetzen der Darstellungen aus 1) und 2).

Zu 2): Als invarianter Unterraum ist \mathbb{V}_σ nach 7.5 eine disjunkte Vereinigung der Form $\mathbb{V}_\sigma = \bigcup_{\gamma \in \mathfrak{M}} \mathbb{B}_\gamma$ mit einer geeigneten Teilmenge \mathfrak{M} von Δ . Zeigen wir zunächst, daß jedes $\gamma \in \mathfrak{M}$ notwendigerweise σ als Seite hat: Andernfalls liegt $x_\sigma \in \mathbb{B}_\sigma = \mathbb{T} \cdot x_\sigma$ nach 6.3 nicht in X_γ , und damit ist $\mathbb{B}_\sigma \cap X_\gamma$ leer. Da X_γ offen ist, muß auch $\mathbb{V}_\sigma \cap X_\gamma$ und damit $\mathbb{V}_\sigma \cap \mathbb{B}_\gamma$ leer sein, so daß γ bei der Bildung von \mathbb{V}_σ nicht auftritt. Insgesamt ergibt sich $\mathbb{V}_\sigma \subset \bigcup_{\gamma \succ \sigma} \mathbb{B}_\gamma$.

Für die umgekehrte Inklusion ist $\mathbb{B}_\gamma \subset \mathbb{V}_\sigma$ für jedes $\gamma \succ \sigma$ zu zeigen. Dazu reicht wegen der Invarianz von \mathbb{V}_σ nach 7.5 der Nachweis von $x_\gamma \in \mathbb{V}_\sigma$. Somit fixieren wir ein $v \in \gamma^\circ \cap N$, für dessen 1-PUG λ_v dann nach 6.11 der Grenzwert $\lim_{z \rightarrow 0} \lambda_v(z)$ existiert und mit x_γ übereinstimmt. Folglich genügt es, in $\text{Hom}_{\text{Hgr}}(S_\sigma, \mathbb{C})$ die Gleichung $x_\gamma = x_\gamma \cdot x_\sigma$ nachzuweisen, denn dann folgt

$$x_\gamma = x_\gamma \cdot x_\sigma = \lim_{z \rightarrow 0} \lambda_v(z) \cdot x_\sigma \in \overline{\mathbb{T} \cdot x_\sigma} = \mathbb{V}_\sigma.$$

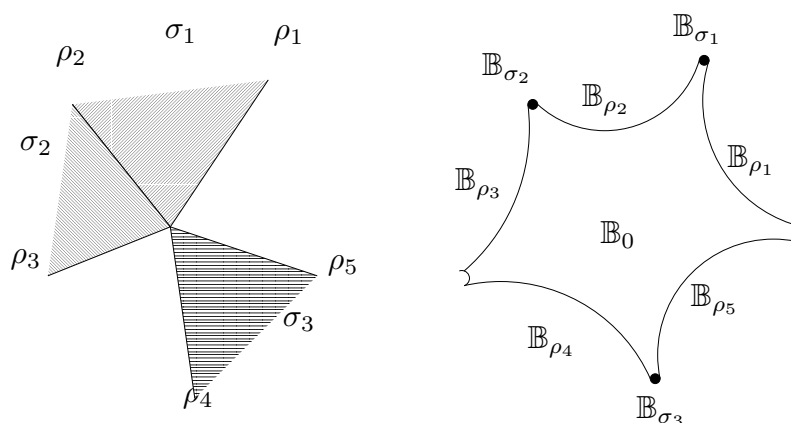
Außerhalb von $\gamma^\perp \cap M$ ist $x_\gamma = 0$, die Gleichung $x_\gamma = x_\gamma \cdot x_\sigma$ also trivial; wegen $\gamma^\perp \subset \sigma^\perp$ hat x_σ auf γ^\perp wie x_γ den Wert 1, also gilt die Gleichung dort ebenfalls. ■

Machen wir noch einmal explizit:

7.8 Korollar Die Zuordnung $\sigma \mapsto \overline{\mathbb{B}}_\sigma$ ist ein ordnungsumkehrender Isomorphismus zwischen dem Verband Δ und dem Verband der Bahnabschlüsse in X_Δ . Insbesondere gilt

$$\dim^{\mathbb{C}} \mathbb{B}_\sigma = \dim^{\mathbb{C}} \overline{\mathbb{B}}_\sigma = \text{codim}_V^{\mathbb{R}} \sigma. \blacksquare$$

Schematisch ist der Zusammenhang für ein nicht vollständiges zweidimensionales Beispiel in Figur 7.1 dargestellt.



FIGUR 7.1 Bahnenzerlegung schematisch dargestellt

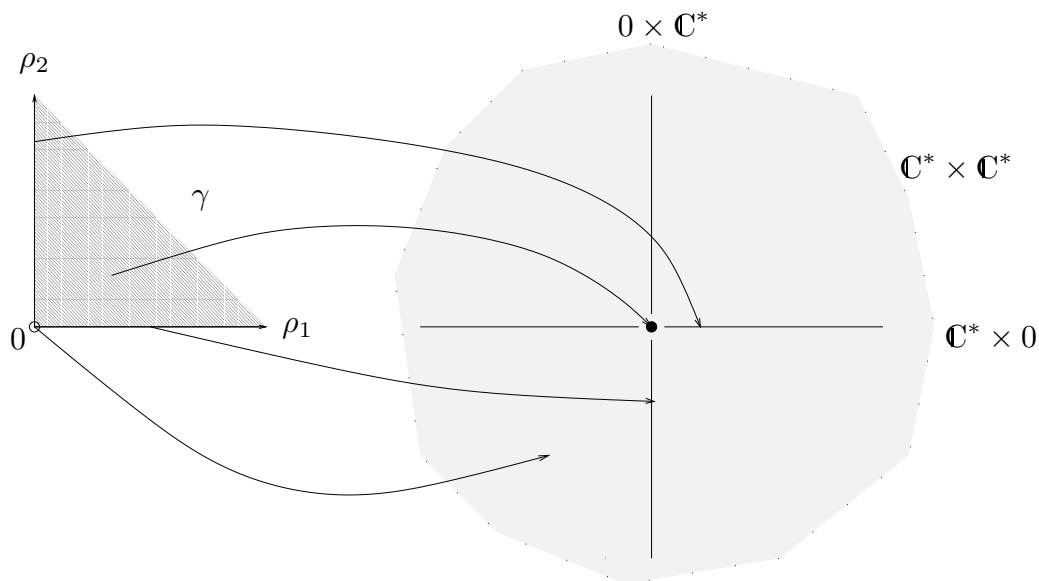
- 7.9 Beispiele**
- 1) Dem Nullkegel \mathfrak{o} entspricht in jedem X_Δ die „dicke Bahn“ $\mathbb{B}_\mathfrak{o}$.
 - 2) Den n -Kegeln entsprechen genau die Fixpunkte der Toruswirkung.
 - 3) Ist $\Delta = \Delta_1 \oplus \Delta_2$, so wirkt der Torus gemäß 3.19 in der äquivarianten Zerlegung $X_\Delta = X_{\Delta_1} \times X_{\Delta_2}$ komponentenweise, also ist jede \mathbb{T}_N -Bahn in X_Δ ein Produkt von \mathbb{T}_{N_i} -Bahnen der Faktoren.
 - 4) Es gilt $\mathbb{C} = \mathbb{B}_\mathfrak{o} \cup \mathbb{B}_{e_1}$. Damit ist nach 3) jede Bahn in \mathbb{C}^n durch eine eindeutig bestimmte Teilmenge von $\{e_1, \dots, e_n\}$ gegeben. Genauer gilt (vgl. auch Figur 7.2): Für $N = \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ sei $\gamma := \text{keg}(e_1, \dots, e_n)$. Dann ist $S_\gamma = \mathbb{N}f_1 + \dots + \mathbb{N}f_n$ und $X_\gamma = \mathbb{C}^n$. Es sei $\sigma \prec \gamma$, dann ist

$$x_\sigma(f_i) = \begin{cases} 1 & \text{für } e_i \notin \sigma, \\ 0 & \text{für } e_i \in \sigma. \end{cases}$$

Da $x_\sigma(f_i)$ die i -te Komponente von x_σ beschreibt, folgt

$$\mathbb{B}_\sigma = \mathbb{T} \cdot x_\sigma = \{x \in \mathbb{C}^n; x_i = 0 \iff e_i \in \sigma\},$$

$$\mathbb{V}_\sigma = \{x \in \mathbb{C}^n; x_i = 0 \text{ für } e_i \in \sigma\}.$$

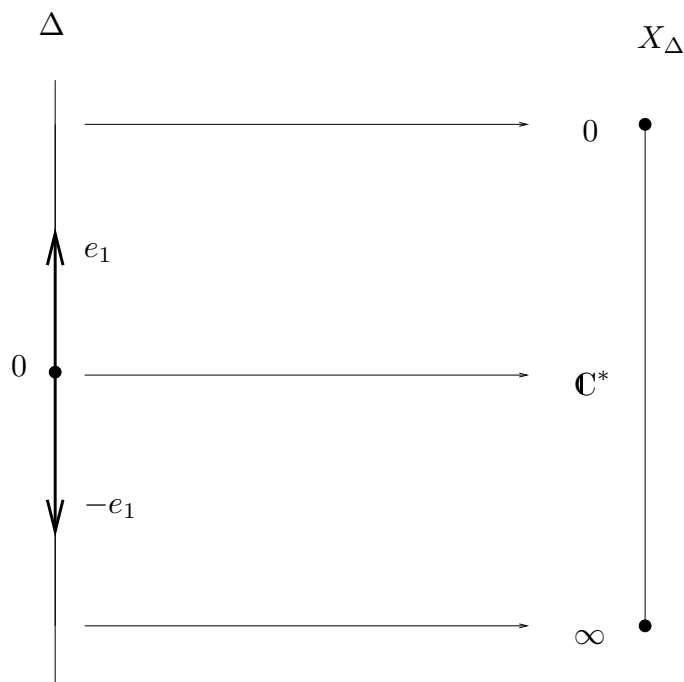


FIGUR 7.2 Bahnenzerlegung und Abschlüsse zu \mathbb{C}^2

- 5) Für beliebiges $\mathfrak{M} \subset \Delta$ ist die invariante Teilmenge $B := \bigcup_{\sigma \in \mathfrak{M}} \mathbb{B}_\sigma$ nicht notwendig eine algebraische Varietät (und damit nicht lokal abgeschlossen in X_Δ): Es sei etwa $\Delta := \mathfrak{S}(\gamma)$ in den Bezeichnungen von 4) mit $n = 2$. Dann ist

$$B = \mathbb{B}_\mathfrak{o} \cup \mathbb{B}_\gamma = (0, 0) \cup \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$$

keine Varietät.



FIGUR 7.3 Bahnenzerlegung von \mathbb{P}^1

6) Für den Fächer Δ in \mathbb{R}^1 zur projektiven Geraden \mathbb{P}^1 haben wir die in Figur 7.3 angegebene Zuordnung.

Aufgabe 7.1 Man bestimme die Bahnenzerlegung für

- i) den projektiven Raum \mathbb{P}^n ,
- ii) den projektiven quadratischen Kegel.

Aufgabe 7.2 Man zeige:

- i) Ist σ ein wenigstens zweidimensionaler N -Kegel, so ist $X_{\partial\sigma}$ nicht affin.
- ii) Ist X_Δ affin, so ist Δ ein affiner Fächer.

In Form eines kleinen Wörterbuchs wollen wir nun einige Eigenschaften invarianter Teilmengen $Y = \bigcup_{\sigma \in \mathfrak{M}} \mathbb{B}_\sigma$ von X_Δ durch äquivalente Eigenschaften in $\mathfrak{B}(\Delta)$, d.h., durch das zugehörige $\mathfrak{M} \subset \Delta$ charakterisieren, wobei wir auf X_Δ die Zariski-Topologie verwenden:

Kleines Wörterbuch § 7

Das invariante Y in X_Δ ist	Die Teilmenge $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(Y)$ von Δ ist
1) konstruierbar	beliebig
2) Bahn	einelementig: $\mathfrak{M} = \{\sigma\}$ für ein $\sigma \in \Delta$
3) abgeschlossen, irreduzibel	Stern(σ) für ein $\sigma \in \Delta$
3a) Primdivisor	Stern(ρ) für einen Strahl $\rho \in \Delta^1$

3b)	Fixpunkt	einelementig mit $\mathfrak{M} = \{\sigma\}$ für ein $\sigma \in \Delta^n$
4)	abgeschlossene Bahn	einelementig mit $\mathfrak{M} = \{\sigma\}$ für ein $\sigma \in \Delta^{\max}$
5)	abgeschlossen	Vereinigung von Sternen von Kegeln
6)	offen	ein Teilfächer Λ
7)	offen, affin	Seitenfächer eines Kegels $\sigma \in \Delta$
8)	lokal abgeschlossen, irreduzibel	Vereinigung von Intervallen mit gleichem Anfangspunkt
9)	abgeschlossen, affin, irreduzibel	Stern eines Kegels, der in genau <i>einem</i> maximalen Kegel liegt
10)	lokal abgeschlossen, affin, irreduzibel	ein Intervall $\{\tau \prec \sigma \prec \gamma\} \subset \Delta$
11)	$\text{Sing}(X_\Delta)$	$\{\sigma; \sigma \text{ nicht regulärer Kegel}\}$
12)	$(X_\Delta)_{\text{reg}}$	der Teilfächer $\Delta_{\text{reg}} := \{\sigma; \sigma \text{ regulärer Kegel}\}$

In der Sprache der Fächertopologie bedeutet dies insbesondere eine Entsprechung zwischen offen bzw. abgeschlossenen Mengen der beiden Seiten. Dies kann man weiterreiben: Für *echte* abgeschlossene Teilmengen Γ von Δ führe man gemäß 3) den Begriff einer *irreduziblen Komponente* ein als maximale Teilmenge, die Stern eines Kegels ist. Dann gehört zu Γ eine eindeutige Zerlegung in irreduzible Komponenten, und diese korrespondiert mit der Zerlegung auf der geometrischen Seite.

Beweis zum kleinen Wörterbuch 2) und damit 1) sind mit 7.5 evident.

3) Zu $\text{Stern}(\sigma)$ gehört der Bahnabschluß \mathbb{V}_σ , das als Abschluß der zusammenhängenden (glatten) Bahn \mathbb{B}_σ irreduzibel ist. Ist umgekehrt $Y = \bigcup_{\sigma \in \mathfrak{M}} \mathbb{B}_\sigma$ abgeschlossen, so gilt $Y = \bigcup_{\sigma \in \mathfrak{M}} \overline{\mathbb{B}_\sigma} = \bigcup_{\sigma \in \mathfrak{M}} \mathbb{V}_\sigma$; da Y irreduzibel ist, existiert ein σ_0 mit $Y = \mathbb{V}_{\sigma_0}$. Nach 7.7 2) ist wiederum \mathfrak{M} der Stern von σ_0 . — Für einen Primdivisor kommt nach 7.8 noch die Bedingung $\text{codim } \mathbb{V}_\sigma = \dim \sigma$ hinzu.

4) ist die Verbindung von 2) und 5).

5) Y ist genau dann abgeschlossen, wenn es von der Form $Y = \bigcup_{\sigma \in \mathfrak{M}} \mathbb{V}_\sigma$ ist; ersichtlich ist jedes \mathbb{V}_σ invariant. Nach 7.7 2) dürfen wir annehmen, daß jedes $\sigma \in \mathfrak{M}$ minimal ist. Zu jedem solchen minimalen σ in \mathfrak{M} gehört daher genau eine irreduzible Komponente \mathbb{V}_σ von Y . Nach 3) ist damit Y eine Vereinigung von Sternen.

6) ist die komplementäre Aussage zu 5).

7) Für jedes $\sigma \in \Delta$ ist X_σ ein offener affiner Unterraum von X_Δ . Ist umgekehrt Y nicht leer, affin und offen in X_Δ , so existiert nach 6) ein Teilfächer Λ mit $Y = \bigcup_{\sigma \in \Lambda} X_\sigma \subset X_\Delta$. Die Fächereinbettung $\Lambda \hookrightarrow \Delta$ induziert nach 4.13 einen Isomorphismus von X_Λ auf Y . Also ist X_Λ affin und damit nach Aufgabe 7.2 Seitenfächer eines Kegels.

8) Ist \mathfrak{M} eine Vereinigung von Intervallen mit gleichem Anfangspunkt, dann erhält man aus Δ durch Tilgen jedes Kegels, der eine Seite in \mathfrak{M} hat, aber nicht zu \mathfrak{M} gehört, einen Unterfächer Λ . Bezüglich Λ ist \mathfrak{M} ein Stern und liefert damit nach 3) eine abgeschlossene irreduzible Menge in $X_\Lambda \subset X_\Delta$. — Für die Umkehrung zeigen wir zunächst, daß sich Y als $\mathbb{V}_\tau \cap U$ mit einem $\tau \in \Delta$ und einer invarianten offenen Teilmenge U von X_Δ darstellbar ist: Mit Y ist auch der Abschluß \overline{Y} invariant (und irreduzibel) und

daher nach 3) von der Form $\overline{Y} = \mathbb{V}_\tau$. Also gilt $Y = \mathbb{V}_\tau \cap U'$ für eine geeignete Teilmenge $U' \subseteq X_\Delta$. Da Y und \mathbb{V}_τ invariant sind, gilt auch $Y = \mathbb{V}_\tau \cap (\mathbb{T} \cdot U')$, so daß wir $U := \mathbb{T} \cdot U'$ wählen können. — Nach 6) ist nun $U = X_\Lambda$ für ein $\Lambda \prec \Delta$. Andererseits sind nach 3) nur solche $\gamma \in \Lambda$ für \mathfrak{M} zulässig, die im Stern von τ liegen. Daher ergibt sich \mathfrak{M} als Vereinigung aller Intervalle $[\tau, \sigma]$ mit $\sigma \in \Lambda^{\max}$, was gleichzeitig für Δ eine gültige Beschreibung ist.

9) Zunächst ist Stern(σ) nach 3) abgeschlossen und irreduzibel. Liegt σ nur in einem maximalen Kegel γ , so stimmen die Sternbildung bezüglich Δ und $\mathfrak{S}(\gamma)$ überein. Dies bedeutet Übereinstimmung von \mathbb{V}_σ in X_Δ und $X_{\mathfrak{S}(\gamma)}$, und mit $X_{\mathfrak{S}(\gamma)}$ ist auch \mathbb{V}_σ affin. Die Umkehrung wird in 7.16 gezeigt.

10) Der Übergang von „abgeschlossen“ zu „lokal abgeschlossen“ in 9) geschieht nach 6) gerade dadurch, daß man den Fächer Δ durch einen Teilfächer Λ ersetzt. Davon wird die Irreduzibilität nicht berührt.

11) und 12) Nach 4.2 4) bilden die regulären Kegel in Δ einen Teilfächer Δ_{reg} . Für $\sigma \in \mathfrak{M} := \Delta \setminus \Delta_{\text{reg}}$ ist X_σ nach 6.5 singulär. Die damit nichtleere abgeschlossene Teilmenge $\text{Sing}(X_\sigma)$ von X_σ ist invariant, also Vereinigung von Bahnen; insbesondere ist die kleinste in X_σ abgeschlossene Bahn $\mathbb{T} \cdot x_\sigma = \mathbb{B}_\sigma = X_\sigma \setminus \bigcup_{\tau \in \mathfrak{M}} X_\tau$ Teilmenge von $\text{Sing}(X_\sigma)$ und damit der Abschluß \mathbb{V}_σ dieser Bahn in X_Δ Teilmenge von $\text{Sing}(X_\Delta)$. Insbesondere gilt $\text{Sing}(X_\Delta) = \bigcup_{\tau \in \mathfrak{M}} \mathbb{B}_\tau$ und $X_{\Delta_{\text{reg}}} = (X_\Delta)_{\text{reg}}$. ■

Aufgabe 7.3 Man zeige, daß der Fächerraum Δ auf kanonische Weise den Bahnenraum X_Δ/\mathbb{T} mit der Quotiententopologie beschreibt.

Damit ergibt sich für das Verhalten von Morphismen bei der Bahnenzerlegung:

7.10 Satz *Es sei $\varphi: (N, \Delta) \rightarrow (N', \Delta')$ ein Fächermorphismus; ferner bezeichne $\sigma' \in \Delta'$ zu $\sigma \in \Delta$ den eindeutig bestimmten Kegel mit $\varphi(\sigma^\circ) \subset (\sigma')^\circ$. Dann gilt*

- 1) $\varphi_*(\mathbb{B}_\sigma) = \varphi_*(\mathbb{T} \cdot x_\sigma) \subset \mathbb{B}_{\sigma'}$,
- 2) $\varphi_*(X_\sigma) \subset X_{\sigma'}$,
- 3) $\varphi_*(\mathbb{V}_\sigma) \subset \mathbb{V}_{\sigma'}$.

Beweis Aus $\varphi_*(x_\sigma) = x_{\sigma'}$, vgl. 6.11, folgt zu 1) mit 7.5

$$\varphi_*(\mathbb{B}_\sigma) = \varphi_*(\mathbb{T} \cdot x_\sigma) = \varphi_*(\mathbb{T}) \cdot \varphi_*(x_\sigma) = \varphi_*(\mathbb{T}) \cdot x_{\sigma'} \subset \mathbb{B}_{\sigma'}.$$

Für einen erneuten Beweis von 2) verwenden wir 7.7 1):

$$\varphi_*(X_\sigma) = \varphi_*\left(\bigcup_{\tau \prec \sigma} \mathbb{B}_\tau\right) = \bigcup_{\tau \prec \sigma} \varphi_*(\mathbb{B}_\tau) \subset \bigcup_{\tau' \prec \sigma'} \mathbb{B}_{\tau'} = X_{\sigma'},$$

wobei sich die Inklusion wie folgt rechtfertigt: Aus $\varphi(\tau^\circ) \subset \varphi(\tau) \subset \varphi(\sigma) \subset \sigma'$ folgt, daß ein $\tau' \prec \sigma' \in \Delta'$ existiert mit $\varphi(\tau^\circ) \subset \tau' \prec \sigma'$. — Schließlich gilt für 3):

$$\varphi_*(\mathbb{V}_\sigma) = \varphi_*(\overline{\mathbb{B}_\sigma}) \subset \overline{\varphi_*(\mathbb{B}_\sigma)} \subset \overline{\mathbb{B}_{\sigma'}} = \mathbb{V}_{\sigma'}. \quad \blacksquare$$

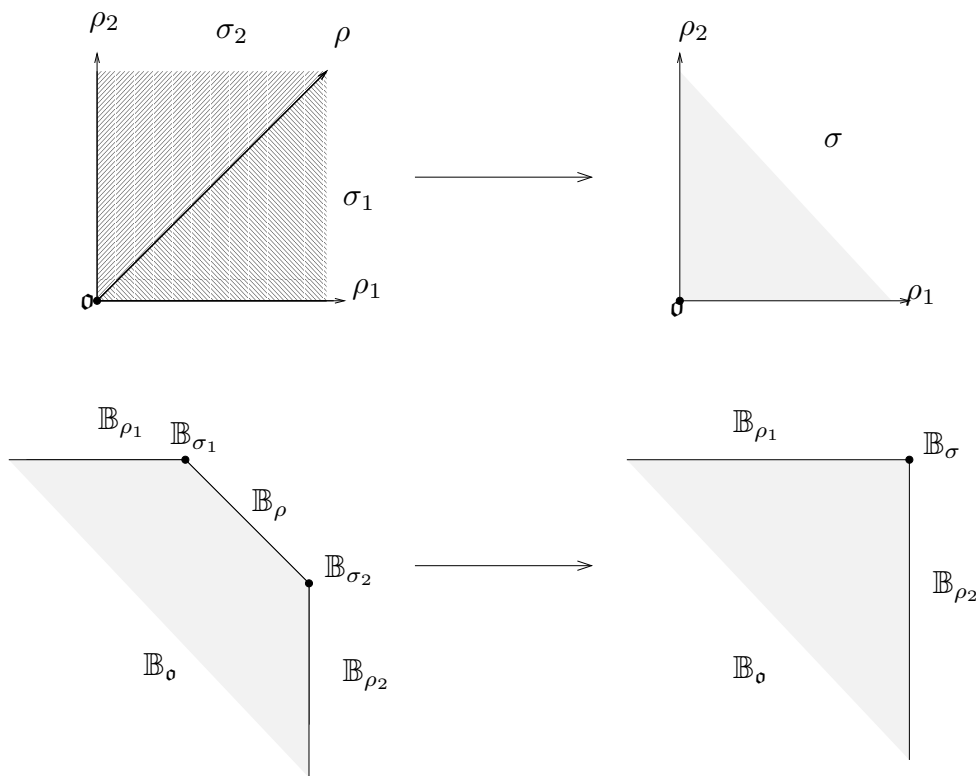
7.11 Beispiel Für $n = 2$ seien

$$\rho_i := \text{keg}(e_i), \quad \rho := \text{keg}(e_1 + e_2), \quad \sigma_i := \text{keg}(\rho, \rho_i) \quad \text{und} \quad \sigma := \sigma_1 \cup \sigma_2 .$$

Die Abbildung $\text{id}_{\mathbb{R}^2}$ induziert einen Fächermorphismus

$$\varphi: \mathfrak{S}(\sigma_1, \sigma_2) \rightarrow \mathfrak{S}(\sigma) ,$$

dessen zugehöriger Morphismus $\varphi_*: X_{\mathfrak{S}(\sigma_1, \sigma_2)} \rightarrow X_{\mathfrak{S}(\sigma)}$ in Figur 7.4 dargestellt ist. Man sieht, daß die Kurve \mathbb{V}_ρ auf einen Punkt zusammengezogen wird; man spricht vom „Niederblasen einer Kurve“. In 8.2 werden wir zeigen, daß es sich in der Tat um den umgekehrten Vorgang zum Aufblasen eines Punktes handelt.



Figur 7.4 Bahnverhalten beim Niederblasen einer Kurve

Wir kommen nun zu einer genaueren Untersuchung der Bahnabschlüsse \mathbb{V}_τ , wozu wir einen „Quotientenfächer“ Δ/τ einführen wollen. Für $\tau \in \Delta$ setzen wir dazu

$$N_\tau := N \cap \text{lin } \tau, \quad N/\tau := N/N_\tau .$$

Letzteres ist nach 2.20 ein Gitter in $\mathbb{R}^{\text{codim } \tau}$. Es seien

$$\pi: N \rightarrow N/\tau \quad \text{bzw.} \quad N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \rightarrow N/\tau \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$$

die kanonischen Restklassenabbildungen, und zum Unterverband $\text{Stern}(\tau)$ von Δ bezeichne

$$\Delta/\tau := \{ \pi(\sigma) =: \bar{\sigma}; \sigma \in \text{Stern}(\tau) \} .$$

7.12 Beispiel Für $\tau := \text{keg}(e_n) \in \Delta := \mathfrak{S}(\text{keg}(e_1, \dots, e_n))$ sowie $N = \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n = V$ ist

$$N_\tau = 0 \times \mathbb{Z}, \quad N/\tau = \mathbb{Z}^{n-1} \times 0, \quad \Delta/\tau \cong \mathfrak{S}(\text{keg}(e_1, \dots, e_{n-1})) . \quad \blacksquare$$

7.13 Lemma Δ/τ ist ein N/τ -Fächer, und $\pi: (N, \Delta) \rightarrow (N/\tau, \Delta/\tau)$ ist ein Fächermorphismus, der einen Verbandsisomorphismus

$$\pi_\tau: \text{Stern}(\tau) \rightarrow \Delta/\tau$$

mit $\text{codim}_{N/\tau_{\mathbb{R}}} \bar{\sigma} = \text{codim}_{N_{\mathbb{R}}} \sigma$ induziert.

Beweis a) π_τ ist mit der Seitenrelation „ \prec “ verträglich: Aus $\tau \prec \sigma \prec \gamma$ ist $\bar{\sigma} \prec \bar{\gamma}$ nachzuweisen. Schneidet $u \in \gamma^\vee$ die Seite σ aus γ aus, so ist u auf τ die Nullform, also auch auf $\text{lin}(\tau)$. Damit existiert eine Linearform u' auf $N_{\mathbb{R}}/\text{lin}(\tau)$ mit $u = u' \circ \pi_\tau$. Ersichtlich liegt u' in $\bar{\gamma}^\vee$ und schneidet $\bar{\sigma}$ aus $\bar{\gamma}$ aus.

b) Δ/τ ist seitenabgeschlossen: Nach Konstruktion ist π_τ surjektiv. Ist $\gamma \in \text{Stern}(\tau)$ und σ' Seite von $\bar{\gamma}$, so ist ein $\sigma \in \text{Stern}(\tau)$ mit $\sigma' = \bar{\sigma}$ zu finden. Wird σ' aus $\bar{\gamma}$ durch $u' \in \bar{\gamma}^\vee$ herausgeschnitten, dann schneidet $u := u' \circ \pi_\tau \in \gamma^\vee$ eine Seite σ aus γ heraus. Ersichtlich liegt σ in $\text{Stern}(\tau)$ und nach dem Beweis von a) gilt $\sigma' = \bar{\sigma}$.

c) π_τ ist durchschnittsverträglich: Da $\text{Stern}(\sigma)$ durchschnittsabgeschlossen ist, ist für $\sigma_1, \sigma_2 \in \text{Stern}(\tau)$ noch der Nachweis von $\overline{\sigma_1 \cap \sigma_2} = \bar{\sigma}_1 \cap \bar{\sigma}_2$ zu führen. Dazu genügt es nach a) offensichtlich, $\bar{\sigma}_1 \cap \bar{\sigma}_2 \subset \overline{\sigma_1 \cap \sigma_2}$ zu zeigen. Ist $v' = \pi_\tau v_1 = \pi_\tau v_2 \in \bar{\sigma}_1 \cap \bar{\sigma}_2$, so existiert ein $w \in \text{lin} \tau$ mit $v_1 - v_2 = w$; nach Addition eines (unerheblichen) Elementes aus τ zu v_1 sei ohne Einschränkung $w \in \tau$. Also gilt

$$\sigma_1 \ni v_1 = v_2 + w \in \sigma_2, \quad \text{folglich} \quad v' \in \pi_\tau(\sigma_1 \cap \sigma_2) .$$

d) $\text{codim}_{N_{\mathbb{R}}} \sigma = \text{codim}_{N/\tau_{\mathbb{R}}} \bar{\sigma}$ ergibt sich als Differenz der beiden Gleichungen

$$\dim N_{\mathbb{R}} = \dim N/\tau_{\mathbb{R}} + \dim \ker \pi_\tau$$

$$\dim \sigma = \dim \pi_\tau \sigma + \dim \ker \pi_\tau .$$

e) Δ/τ ist ein N/τ -Fächer und π damit nach Konstruktion ein Fächermorphismus: Ersichtlich ist jedes $\bar{\sigma}$ ein N/τ -Kegel in $N/\tau_{\mathbb{R}}$; er ist spitz, denn aus $\tau \prec \sigma$ folgt nach a), daß $\sigma = \bar{\tau}$ Seite von $\bar{\sigma}$ ist. Zwei Kegel in Δ/τ schneiden sich genau in einer gemeinsamen Seite, denn nach b), c) und a) gilt

$$\bar{\sigma}_1 \cap \bar{\sigma}_2 = \overline{\sigma_1 \cap \sigma_2} \prec \bar{\sigma}_1 .$$

f) π_τ ist injektiv und damit ein Ordnungsisomorphismus: Es sei $\bar{\sigma} = \overline{\sigma'}$; für den Nachweis von $\sigma = \sigma'$ genügt es, ganz allgemein zu zeigen: Ist $\bar{\sigma} \prec \bar{\gamma}$, so ist $\sigma \prec \gamma$. In der

Tat folgt aus $\bar{\sigma} \prec \bar{\gamma}$, daß $\overline{\sigma \cap \gamma} = \bar{\sigma} \cap \bar{\gamma} = \bar{\sigma}$ und damit $\text{codim } \sigma \cap \gamma = \text{codim } \sigma$ gelten. Aus $\gamma \cap \sigma \subset \sigma$ folgt somit $\sigma \cap \gamma = \sigma$. Damit ist σ Seite von γ . Dies impliziert nach d) die Injektivität von π_τ ; nach c) ist π_τ dann auch ein Ordnungsisomorphismus. ■

Dem Quotientenfächer Δ/τ im Quotientengitter N/τ zu $\tau \in \Delta$ läßt sich nun die torische Varietät

$$X_{\Delta/\tau} := (\mathbb{T}(\tau), \mathbb{V}(\tau)) := X(N/\tau, \Delta/\tau)$$

zuordnen. Dabei seien

$$\begin{aligned} \pi^*: M(\tau) &:= \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N/\tau, \mathbb{Z}) = M \cap \tau^\perp \hookrightarrow M, \quad u' \mapsto u' \circ \pi, \\ \mathbb{T}(\tau) &:= \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M(\tau), \mathbb{C}^*), \quad \pi_*: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}(\tau), \quad t \mapsto t|_{M(\tau)}. \end{aligned}$$

Wir können nun den Bahnabschluß \mathbb{V}_τ von \mathbb{B}_τ als torische Varietät beschreiben, wobei x_\circ wieder den Fußpunkt der dicken Bahn von $\mathbb{V}(\tau)$ bezeichne und $\mathbb{V}(\tau)$ mit der durch die kanonische Projektion $\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}(\tau)$ induzierten \mathbb{T} -Struktur betrachtet werde:

7.14 Satz 1) Zu jedem $\tau \in \Delta$ gibt es genau einen äquivarianten Morphismus

$$\iota: \mathbb{V}(\tau) \rightarrow X_\Delta$$

mit der Eigenschaft $\iota(x_\circ) = x_\tau$.

2) Der Morphismus ι induziert einen Isomorphismus algebraischer Varietäten

$$\mathbb{V}(\tau) \xrightarrow{\cong} \mathbb{V}_\tau,$$

der damit \mathbb{V}_τ zu einer torischen Varietät macht; für alle σ aus $\text{Stern}(\tau)$ gelten die Beziehungen:

$$\iota(\mathbb{B}_{\bar{\sigma}}) = \mathbb{B}_\sigma, \quad \iota(\mathbb{V}_{\bar{\sigma}}) = \mathbb{V}_\sigma, \quad \iota^{-1}(X_\sigma) = X_{\bar{\sigma}}.$$

Beweis Wir erinnern daran, daß der Fußpunkt $x_\tau = x_\circ \in \mathbb{V}(\tau)$ dem Einselement in $\mathbb{T}(\tau) \subseteq \mathbb{V}(\tau)$ entspricht. Man fixiere einen Schnitt $\iota_\tau: \mathbb{T}(\tau) \cong \mathbb{T}(\tau) \times 1 \hookrightarrow \mathbb{T}$ von π_* .

1) Die *Eindeutigkeit* von ι braucht nur auf $\mathbb{T}(\tau) = \pi_*(\mathbb{T})$ gezeigt zu werden. Dort gilt wegen der Äquivarianz von ι für alle $t \in \mathbb{T}$

$$\iota(\pi_*(t)) = \iota(\pi_*(t) \cdot x_\circ) = t \cdot \iota(x_\circ) = t \cdot x_\tau.$$

Die *Existenz* verifizieren wir zunächst auf affinen Karten zu den $\sigma \in \text{Stern}(\tau)$. Zur Inklusion $M(\tau) \hookrightarrow M$ gehört eine Inklusion $M(\tau) \cap \bar{\sigma}^\vee = M(\tau) \cap (\sigma^\vee \cap \tau^\perp) \hookrightarrow M \cap \sigma^\vee$, und damit folgt für $S_\sigma = M \cap \sigma^\vee$:

$$(7.14.1) \quad S_{\bar{\sigma}} = M(\tau) \cap \bar{\sigma}^\vee = M \cap \tau^\perp \cap \sigma^\vee = S_\sigma \cap \tau^\perp \subset S_\sigma.$$

Damit existiert ein wohldefinierter surjektiver Algebromorphismus

$$(7.14.2) \quad \mathbb{C}[S_\sigma] \rightarrow \mathbb{C}[S_{\bar{\sigma}}], \quad \chi^u \mapsto \begin{cases} \chi^u, & \text{falls } u \in S_{\bar{\sigma}}, \\ 0, & \text{falls } u \in S_\sigma \setminus S_{\bar{\sigma}}. \end{cases}$$

Er induziert eine (abgeschlossene) Einbettung

$$\iota_\sigma: X_{\overline{\sigma}} \hookrightarrow X_\sigma, \quad x \mapsto \left[\iota_\sigma(x): u \mapsto \begin{cases} x(u) & \text{für } u \in S_{\overline{\sigma}}, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \right],$$

und aus (7.14.1) folgt wegen $\sigma^\perp \subset \tau^\perp$ durch Einsetzen zunächst

$$(7.14.3) \quad \iota_\sigma(x_{\overline{\sigma}}) = x_\sigma$$

und damit insbesondere $\iota_\tau(x_\sigma) = x_\tau$; andererseits ist für $t \in \mathbb{T}$

$$(7.14.4) \quad \iota_\sigma(\pi_*(t) \cdot x) = \iota_\sigma(t|_{M(\tau)} \cdot x) = t \cdot \iota_\sigma(x)$$

und ι_σ folglich eine äquivariante Abbildung bezüglich der Inklusion

$$\mathbb{T}(\tau) \cong \mathbb{T}(\tau) \times 1 \hookrightarrow \mathbb{T}.$$

Die einzelnen ι_σ sind miteinander verträglich: Für $\tau \prec \sigma \prec \gamma$ kommutiert das Seiten-
diagramm

$$\begin{array}{ccccc} X_{\overline{\sigma}} & \xrightarrow{\iota_\sigma} & X_\sigma & & x & \longmapsto & y \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X_{\overline{\gamma}} & \xrightarrow{\iota_\gamma} & X_\gamma & & x|_{S_{\overline{\gamma}}} & \longmapsto & y|_{S_\gamma} \end{array},$$

denn es gilt für $y = \iota_\sigma(x)$ mit $x \in X_{\overline{\sigma}}$ ersichtlich $x = y|_{S_{\overline{\sigma}}}$ und

$$(y|_{S_{\overline{\sigma}}})|_{S_{\overline{\gamma}}} = (y|_{S_\gamma})|_{S_{\overline{\gamma}}}.$$

Damit gibt es nach 4.3 den gesuchten Varietätenmorphismus

$$\iota: \mathbb{V}(\tau) \rightarrow \bigcup_{\sigma \in \text{Stern}(\tau)} X_\sigma \subseteq X_\Delta$$

mit $\iota|_{X_{\overline{\sigma}}} = \iota_\sigma$. Er erfüllt die Bedingungen aus 1): Einerseits ist wegen $x_\sigma = x_{\overline{\sigma}}$ auch $\iota(x_\sigma) = \iota_\tau(x_{\overline{\sigma}}) = x_\tau$. Andererseits ist ι mit den Einschränkungen ι_σ äquivariant: Es liege $x \in \mathbb{V}(\tau)$ etwa in $X_{\overline{\sigma}}$, dann ist für $t \in \mathbb{T}$

$$\iota(\pi_*(t) \cdot x) = \iota_\sigma(\pi_*(t) \cdot x) \stackrel{(7.14.4)}{=} t \cdot \iota_\sigma(x) = t \cdot \iota(x).$$

2) Aus (7.14.3) und der Äquivarianz folgt für $\sigma \in \text{Stern}(\tau)$:

$$\iota(\mathbb{B}_{\overline{\sigma}}) = \iota(\mathbb{T}(\tau) \cdot x_{\overline{\sigma}}) = \mathbb{T} \cdot \iota(x_{\overline{\sigma}}) = \mathbb{T} \cdot x_\sigma = \mathbb{B}_\sigma.$$

Insbesondere schneiden genau die \mathbb{B}_σ mit $\sigma \in \text{Stern}(\tau)$ das Bild von ι . Damit ergibt sich nach 7.7 für den Abschluß

$$\iota(\mathbb{V}_{\overline{\sigma}}) = \iota\left(\bigcup_{\sigma \prec \gamma} \mathbb{B}_{\overline{\gamma}}\right) = \bigcup_{\sigma \prec \gamma} \mathbb{B}_\gamma = \mathbb{V}_\sigma.$$

Schließlich gilt wiederum nach 7.7

$$\iota^{-1}(X_\sigma) = \iota^{-1}\left(\bigcup_{\gamma \prec \sigma} \mathbb{B}_\gamma\right) = \bigcup_{\gamma \prec \sigma} \iota^{-1}(\mathbb{B}_\gamma) = \bigcup_{\tau \prec \gamma \prec \sigma} \mathbb{B}_{\bar{\gamma}} = X_{\bar{\sigma}}.$$

Berücksichtigt man $\mathbb{V}_{\bar{\tau}} = \bar{\mathbb{B}}_{\mathbf{o}} = \mathbb{V}(\tau)$, so ist damit $\iota(\mathbb{V}(\tau)) = \mathbb{V}_{\bar{\tau}}$. Es bleibt zu verifizieren, daß ι eine Einbettung ist. Da $(X_\sigma)_{\sigma \in \text{Stern}(\tau)}$ eine affine offene Überdeckung von $\bigcup_{\tau \prec \sigma} X_\sigma$ und jedes $X_{\bar{\sigma}} = \iota^{-1}(X_\sigma)$ affin ist, läßt sich das Einbettungskriterium [AG 3.36] anwenden. Dazu ist nur für jedes $\sigma \in \text{Stern}(\tau)$ die Surjektivität von ι_σ^* zu zeigen; diese ergab sich in (7.14.2) aus der Konstruktion in 1). ■

7.15 Beispiel Der Abschluß einer eindimensionalen Bahn ist stets eine singularitätenfreie Varietät, nämlich \mathbf{C}^* , \mathbf{C} oder \mathbb{P}_1 . ■

Für den Abschluß des Beweises von 9) im Kleinen Wörterbuch benötigen wir noch folgenden

7.16 Hilfssatz *Ist die abgeschlossene Untervarietät $Y \hookrightarrow X_\Delta$ invariant, affin und irreduzibel, so hat ihre Bahnenzerlegung die Form $Y = \bigcup_{\sigma \in \text{Stern}(\tau)} \mathbb{B}_\sigma$ für einen Kegel τ , der in genau einem maximalen Kegel von Δ enthalten ist.*

Beweis Nach Punkt 3) des Kleinen Wörterbuchs ist $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(Y)$ von der Form $\text{Stern}(\tau)$, und damit gilt $Y = \mathbb{V}_\tau$. Gemäß 7.14 ist Y mit der torischen Varietät $X_{\Delta/\tau}$ identifizierbar. Gilt nun $\tau \prec \gamma \in \Delta^{\max}$, so ist $\bar{\gamma} := \pi_\tau(\gamma)$ in den Bezeichnungen von 7.13 ein maximaler Kegel in Δ/τ . Mit Y ist der Fächer Δ/τ nach Aufgabe 7.2 affin, also Δ/τ der Seitenkegel von $\bar{\gamma}$, was $\bar{\gamma}$ und nach 7.13 damit auch γ eindeutig bestimmt. ■

Aufgabe 7.4 Es seien $\varphi: (N', \Delta') \rightarrow (N, \Delta)$ ein Fächermorphismus und $A \hookrightarrow X_{\Delta'}$ eine irreduzible algebraische Untervarietät. Man zeige, daß ein eindeutig bestimmtes $\sigma \in \Delta$ existiert, für das φ einen Morphismus

$$\varphi_*: A \rightarrow \mathbb{V}_\sigma$$

mit $\mathbb{T}(\sigma) \cap \varphi_*(A) \neq \emptyset$ induziert (für 8.3).

Aufgabe 7.5 Es seien $X = X(N, \Delta)$ eine torische Varietät sowie λ_v zu $v \in N$ eine 1-PUG.

- i) Man definiere mittels λ_v auf natürliche Weise eine \mathbf{C}^* -Wirkung auf X_Δ .
- ii) Man zeige, daß die Fixpunktmenge $\text{Fix } \lambda_v$ dieser Wirkung die Vereinigung der Bahnabschlüsse \mathbb{V}_τ aller Kegel minimaler Dimension $\tau \in \Delta$ mit $v \in \text{lin } \tau$ ist.
- iii) Man identifiziere für affines $\Delta = \mathfrak{S}(\sigma)$ und $v \in \sigma$ den (affinen) Quotienten $X_\Delta/\lambda_v(\mathbf{C}^*)$ mit der torischen Varietät $X_{\Delta/\tau}$, wobei $\tau \in \Delta$ der durch $v \in \tau^\circ$ bestimmte Kegel sei.

Kapitel III

Eigentliche Morphismen und Singularitätenauflösung

Wir kommen nun zu einer einfachen Charakterisierung eigentlicher Morphismen zwischen torischen Varietäten. Anschließend gehen wir genauer auf die Dimension 2 ein; insbesondere beschäftigen wir uns mit der Singularitätenauflösung.

8. Eigentliche Morphismen

Eigentliche Morphismen sind in der algebraischen Geometrie einerseits besonders gut zu behandeln, andererseits sind sie etwa bei der Auflösung von Singularitäten ein zentraler Begriff. Wir wollen daher solche Abbildungen in der Kategorie torischer Varietäten durch Fächerdaten charakterisieren. Dazu zunächst eine Erinnerung (vgl. [AG, § 9]):

Ein Morphismus $\varphi: X \rightarrow Y$ algebraischer Varietäten heißt eigentlicher Morphismus, wenn für jeden Raum $\varphi': X' \rightarrow Y$ über Y die zugehörige Projektion

$$\pi_{X'}: X \times_Y X' \rightarrow X'$$

abgeschlossen ist. Diese Eigenschaft ist äquivalent (vgl. [AG, 9.8]) zur

8.1 Kurvenfortsetzungseigenschaft Gegeben seien ein Punkt a in einer regulären Kurve C und für $C^* := C \setminus \{a\}$ ein Morphismus $\alpha: C^* \rightarrow X$ algebraischer Varietäten, so daß $\varphi \circ \alpha: C^* \rightarrow Y$ regulär auf C fortsetzbar ist. Dann existiert eine reguläre Fortsetzung $\bar{\alpha}: C \rightarrow X$.

Dabei genügt es natürlich, affine zusammenhängende Kurven C zu betrachten. Analysieren wir zunächst ein

8.2 Beispiel Es seien $N = \mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2 = V$ und $\Delta = \mathfrak{S}(\text{keg}(e_1, e_2))$ sowie

$$\Delta_1 = \mathfrak{S}(\text{keg}(e_1, e_1 + e_2)), \quad \Delta' = \mathfrak{S}(\text{keg}(e_1, e_1 + e_2), \text{keg}(e_1 + e_2, e_2)).$$

Dann gehört zu $\text{id}_{\mathbb{R}^2}$ ein Fächermorphismus $\varphi: \Delta' \rightarrow \Delta$ und dazu eine eigentliche Abbildung $X(\varphi)$, nämlich das Niederblasen einer Kurve $\widehat{\mathbb{C}^2} \rightarrow \mathbb{C}^2$ in $\widehat{\mathbb{C}^2}$, während zu $\varphi_1: \Delta_1 \rightarrow \Delta$ eine nichteigentliche Abbildung $X(\varphi_1): \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ gehört.

Beweis Für $\sigma_i := \text{keg}(e_i, e_1 + e_2)$ gilt $\sigma_1^\vee = \text{keg}(f_2, f_1 - f_2)$, $\sigma_2^\vee = \text{keg}(f_1, f_2 - f_1)$, also

$$A_{\sigma_1} = \mathbb{C}[T_1/T_2, T_2] \subset \mathbb{C}[M] \supset \mathbb{C}[T_1, T_2/T_1] = A_{\sigma_2}.$$

Die Koordinatentransformation $T_1 \mapsto T_1, T_2 \mapsto T_1 T_2$ in $\mathbf{C}[M]$ liefert Darstellungen

$$A_{\sigma_1} = \mathbf{C}[T_2^{-1}, T_1 T_2] \quad \text{und} \quad A_{\sigma_2} = \mathbf{C}[T_1, T_2]$$

und damit eine übliche Beschreibung für die Konstruktion von $\widehat{\mathbf{C}^2} = \mathbf{C}^2 \cup \mathbf{C}^2$; dabei ist $\mathbb{V}_{\sigma_1 \cap \sigma_2} = \mathbb{P}_1$.

Der Morphismus $X(\varphi_1)$ ist nicht eigentlich, da seine Fasern nicht vollständig sind (vgl. [AG, 9.5 1]): Mit der Fächerinklusion $j: \Delta_1 \hookrightarrow \Delta'$ existiert eine kanonische Faktorisierung

$$\begin{array}{ccccc} X(\varphi_1) & : & X_{\Delta_1} & \xrightarrow{X(j)} & X_{\Delta'} & \xrightarrow{X(\varphi)} & X_{\Delta} \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ & & \mathbf{C}^2 & & \widehat{\mathbf{C}^2} & & \mathbf{C}^2 \\ & & \cup & & \cup & & \cup \\ & & \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbb{P}_1 & \longrightarrow & 0 \quad , \end{array}$$

d.h. $(X(\varphi_1))^{-1}(0) = \mathbf{C} = \mathbb{V}_{\sigma_1 \cap \sigma_2} \setminus \mathbb{B}_{\sigma_2}$ ist nicht vollständig. ■

Es sei nun $\varphi: (N', \Delta') \rightarrow (N, \Delta)$ ein Fächermorphismus. Stets gilt $|\Delta'| \subset \varphi_{\mathbb{R}}^{-1}(|\Delta|)$.

8.3 Theorem *Der Morphismus $X(\varphi): X_{\Delta'} \rightarrow X_{\Delta}$ ist genau dann ein eigentlicher Morphismus, wenn $|\Delta'| = \varphi_{\mathbb{R}}^{-1}(|\Delta|)$ gilt.*

8.4 Korollar *Eine torische Varietät X_{Δ} ist genau dann vollständig, wenn der Fächer Δ vollständig ist, also $|\Delta| = V$ gilt.*

Beweis Gemäß [AG 9.4 1]) ist X_{Δ} genau dann vollständig, wenn der konstante Morphismus $X_{\Delta} \rightarrow 0$ eigentlich ist. Diese Abbildung wird vom Fächermorphismus

$$(\mathbb{Z}^n, \Delta) \rightarrow (\mathbb{Z}^0, \mathbb{R}^0)$$

induziert. Damit folgt aus 8.3 die Behauptung. ■

Beweis von 8.3 „ \Rightarrow “ Ist $|\Delta'| \subsetneq \varphi_{\mathbb{R}}^{-1}(|\Delta|)$, so wähle man ein $v \in N'$ aus der Differenzmenge. Nach 6.10 1) existiert eine (eindeutige) Fortsetzung von $X(\varphi) \circ \lambda_v: \mathbf{C}^* \rightarrow X_{\Delta}$ auf \mathbf{C} , weil $X(\varphi) \circ \lambda_v = \lambda_{\varphi(v)}$ gemäß 6.9 gilt und $\varphi(v)$ in $|\Delta|$ liegt. Da φ eigentlich ist, existiert zur 1-PUG $\lambda_v: \mathbf{C}^* \rightarrow X_{\Delta'}$ eine eindeutige Fortsetzung $\bar{\lambda}_v: \mathbf{C} \rightarrow X_{\Delta'}$. Dies ist jedoch nicht möglich: Zu $\rho := \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot v$ gehört ein N' -Oberfächer $\Delta'' := \Delta' \cup \{\rho\}$ von Δ' , auf den sich φ als Fächermorphismus $\varphi: (N', \Delta'') \rightarrow (N, \Delta)$ fortsetzt. Aus $v \in |\Delta''|$ folgt die (eindeutige) Existenz einer Fortsetzung $\bar{\bar{\lambda}}_v: \mathbf{C} \rightarrow X_{\Delta''} = X_{\Delta'} \cup \mathbb{B}_{\rho}$ mit $\bar{\bar{\lambda}}_v(0) = x_{\rho} \in \mathbb{B}_{\rho}$ nach 6.11; aus $\bar{\lambda}_v(0) = \bar{\bar{\lambda}}_v(0) = x_{\rho}$ folgt $\bar{\lambda}_v(0) \notin X_{\Delta'}$.

„ \Leftarrow “ Es seien C eine zusammenhängende glatte Kurve, $a \in C$ und $C^* := C \setminus \{a\}$. Gegeben sei ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} C^* & \xrightarrow{\alpha} & X_{\Delta'} \\ & & \downarrow X(\varphi) \\ C & \xrightarrow{\gamma} & X_{\Delta} \quad ; \end{array}$$

wir haben dazu eine Fortsetzung $\bar{\alpha}: C \rightarrow X_{\Delta'}$ zu finden.

Dies ist einfach für Einparameter-Untergruppen: Es seien $C = \mathbb{C}$, $a = 0$ und $\alpha = \lambda_v: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{T}' \subseteq X_{\Delta'}$ für ein $v \in N'$. Dann läßt sich 6.10 1) verwenden: Aus $\gamma = \overline{X(\varphi)} \circ \alpha = \overline{\lambda_{\varphi(v)}}$ folgt $\varphi(v) \in |\Delta|$, also $v \in \varphi_{\mathbb{R}}^{-1}(|\Delta|) = |\Delta'|$, und damit existiert $\bar{\alpha}$.

Im allgemeinen ist jedoch C keine torische Varietät und damit α erst recht kein torischer Morphismus. Dann gehen wir folgendermaßen vor: Wir wählen ein $\sigma \in \Delta$ mit $\gamma(a) \in X_\sigma$. Nach geeigneter Verkleinerung von C und $X_{\Delta'}$ sei ohne Einschränkung $X_\Delta = X_\sigma$. Nunmehr wählen wir gemäß Aufgabe 7.4 $X_{\Delta'}$ und C so klein, daß $\alpha(C^*) \cap \mathbb{T}'$ nicht leer und C affin ist; insbesondere ist $\alpha^{-1}(\mathbb{T}') \subseteq C^*$ nicht leer. Wir erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} C^* & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{T}' & \subseteq & X_{\Delta'} \\ & & \downarrow X(\varphi) & & \downarrow X(\varphi) \\ \cap & & & & \\ C & \xrightarrow{\gamma} & X_\sigma & = & X_\sigma \quad . \end{array}$$

Dazu haben wir einen Kegel $\tau \in \Delta'$ zu finden, der ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} C^* & \subset & C & = & C \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \delta & & \downarrow \gamma \\ \mathbb{T}' & \subset & X_\tau & \xrightarrow{X(\varphi)} & X_\sigma \end{array}$$

liefert. Wir analysieren die duale Situation mit der Abbildung $\varphi^*: M \rightarrow M'$ und der durch den Hauptdivisor a in C gegebenen diskreten Bewertung β_a :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M] & = & \mathcal{O}(X_\sigma) & \longrightarrow & {}_C\mathcal{O}_a & \xrightarrow{\beta_a} & \mathbb{N} \cup \{\infty\} \\ & & \downarrow \varphi^* & & \cap & & \cap \\ \mathbb{C}[M'] & = & \mathcal{O}(\mathbb{T}') & \longrightarrow & \mathcal{R}(C) & \xrightarrow{\beta_a} & \mathbb{Z} \cup \{\infty\} \\ & & \cup & & & & \cup \\ M' & & & \xrightarrow{v} & & & \mathbb{Z} \quad . \end{array}$$

Dabei ist $v \in \text{Hom}(M', \mathbb{Z}) = N'$. Für $\varphi_*: N' \rightarrow N$ folgt aus $\beta_a({}_C\mathcal{O}_a) \geq 0$

$$\varphi_*(v)|_{\sigma^\vee} = v \circ \varphi^*|_{\sigma^\vee} \geq 0;$$

damit ist $\varphi_*(v) \in \sigma^{\vee\vee} = \sigma$. Aus $\varphi_{\mathbb{R}}^{-1}(|\Delta|) = |\Delta'|$ folgt die Existenz eines $\tau \in \Delta'$ mit $\varphi_*(\tau) \subset \sigma$ und $v \in \tau$; insbesondere gilt $v|_{\tau^\vee} \geq 0$. Wir erhalten eine Faktorisierung $\varphi^*: \mathcal{O}(X_\sigma) \rightarrow \mathcal{O}(X_\tau) \subset \mathcal{O}(\mathbb{T}')$, und wegen $v|_{\tau^\vee} \geq 0$ weiterhin eine Faktorisierung

$$\alpha^*: \mathcal{O}(X_\tau) \rightarrow {}_C\mathcal{O}_a \cap {}_C\mathcal{O}(C^*) = \mathcal{O}(C) \subset \mathcal{R}(X) .$$

Nach dem Antiäquivalenzsatz für affine Varietäten gehört zum ersten Teil ein Morphismus $C \rightarrow X_\tau \subseteq X_{\Delta'}$, der α fortsetzt. ■

Nach dem Satz von Nagata besitzt jede algebraische Varietät eine Vervollständigung, ist also Zariski-offener dichter Teil einer vollständigen algebraischen Varietät. In der torischen Kategorie ist ein derartiger Satz sehr viel einfacher zu beweisen. Wir stützen uns dabei auf folgendes Resultat (vgl. [Su, Th. 3]):

8.5 Satz von Sumihiro *Jede normale algebraische \mathbb{T} -Varietät ist äquivariant isomorph zu einem Zariski-offenen invarianten Teil einer vollständigen normalen algebraischen \mathbb{T} -Varietät. ■*

In Anbetracht des Äquivalenzsatzes 4.19 bedeutet dies für uns:

8.6 Korollar *Jede torische Varietät X besitzt eine torische Kompaktifizierung \overline{X} , d.h., X ist äquivariant isomorph zu einer invarianten offenen Untervarietät von \overline{X} . ■*

8.7 Korollar *Jeder Fächer in V ist Teilfächer eines vollständigen Fächers in V . ■*

Eine geometrisch interessante Verallgemeinerung ergibt sich wie folgt: Ein Fächer-morphismus $\varphi: (N', \Delta') \rightarrow (N, \Delta)$ und entsprechend der zugehörige torische Morphismus $X(\varphi): X' \rightarrow X$ heißen „*schwach eigentlich*“, wenn er $\varphi_{\mathbb{R}}(|\Delta'|) = |\Delta|$ erfüllt. Insbesondere sind eigentliche Morphismen schwach eigentlich. Ein nichteigentliches Beispiel wird etwa durch die Projektion $(\mathbb{C}^2)^* \rightarrow \mathbb{C}$ auf eine Komponente gegeben. Für eine geometrische Charakterisierung benötigen wir folgenden Begriff: Ein torischer Morphismus $f: X' \rightarrow X$ hat die „*Kurvenüberdeckungseigenschaft*“, wenn zu jeder algebraischen Kurve C in X eine algebraische Kurve C' in X' mit $f(C') = C$ existiert, so daß $f|_{C'}$ endliche Fasern hat. In [AC, Prop. 2.1] wird nun gezeigt:

8.8 Satz *Ein torischer Morphismus $f: X' \rightarrow X$ ist genau dann schwach eigentlich, wenn er die Kurvenüberdeckungseigenschaft besitzt. ■*

Aufgabe 8.1 Man zeige ohne Verwendung von Satz 8.3, daß ein Fächer Δ genau dann vollständig ist, wenn X_{Δ} eine vollständige torische Varietät ist.

Aufgabe 8.2 Es seien $v_1, v_2, v_3 \in N = \mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2 = V$ drei verschiedene, in mathematisch positiver Orientierung angeordnete primitive Vektoren, für die $\text{keg}(v_1, v_2)$ und $\text{keg}(v_2, v_3)$ regulär seien. Man zeige (für Aufgabe 8.3 und § 10):

- i) Es existiert ein $a \in \mathbb{Z}$ mit $v_1 + v_3 = av_2$.
- ii) Ist $v_1 + v_3 = av_2$ für ein $a \in \mathbb{Z}$, so gilt das „Kontraktionskriterium“

$$\text{keg}(v_1, v_3) \text{ ist regulär} \iff a = \pm 1.$$

Man erläutere die Bezeichnung „Kontraktionskriterium“.

Aufgabe 8.3 Für eine vollständige glatte torische Fläche X_{Δ} mit k Fixpunkten zeige man (für § 10):

- i) Ist $k = 3$, so ist X_{Δ} die projektive Ebene.
- ii) Ist $k = 4$, so wird Δ in geeigneten Koordinaten mit einem eindeutig bestimmten $a \in \mathbb{N}$ von den Kantenvektoren

$$v_1 = e_1, v_2 = e_2, v_3 = -e_1 + ae_2, v_4 = -e_2$$

erzeugt; der Fächer Δ werde mit Δ_a bezeichnet.

iii) \mathbb{P}_2 entsteht aus X_{Δ_1} durch Niederblasen einer Kurve.

Kleines Wörterbuch § 8

Theorie in (V, N)

torische Theorie

vollständiger Fächer

vollständige torische Varietät

Vervollständigung eines Fächers

Kompaktifizierung der torischen Varietät

$\varphi: \Delta' \rightarrow \Delta$ mit $|\Delta'| = \varphi^{-1}(|\Delta|)$

eigentliches $\varphi_*: X_{\Delta'} \rightarrow X_{\Delta}$

$\varphi: \Delta' \rightarrow \Delta$ mit $|\varphi(\Delta')| = (|\Delta|)$

schwach eigentliches $\varphi_*: X_{\Delta'} \rightarrow X_{\Delta}$

9. Simpliziale Fächer und Quotientensingularitäten

In diesem Paragraphen betrachten wir torische Varietäten, deren zugehörige Kegel oder Fächer regulär oder mindestens simplizial sind. Die einem regulären Kegel σ zugeordnete affine torische Varietät X_σ ist glatt, vgl. 6.5; bei simplizialen Kegeln σ können höchstens „milde“ Singularitäten, nämlich sogenannte „Quotientensingularitäten“ auftreten. Genauer werden wir in Satz 9.5 sehen, daß sich die zugehörige affine torische Varietät X_σ in der Form

$$X_\sigma = (\mathbb{C}^*)^{n-\dim \sigma} \times (\mathbb{C}^{\dim \sigma}/G)$$

mit dem Quotienten der affinen Varietät $\mathbb{C}^{\dim \sigma}$ nach der algebraischen Operation einer endlichen Gruppe G schreiben läßt. Mit Hilfe von Beispiel 9.7 werden wir zeigen, daß sich diese Aussage nicht auf den nicht-affinen Fall übertragen läßt.

Zunächst studieren wir die *zweidimensionalen* Kegel; diese sind offenbar immer simplizial.

9.1 Lemma *Es sei σ ein volldimensionaler N -Kegel in \mathbb{R}^2 . Dann existiert eine Gitterbasis e_1, e_2 derart, daß $\sigma = \text{keg}(e_2, \lambda e_1 - \kappa e_2)$ gilt, wobei λ und κ teilerfremde natürliche Zahlen mit $0 \leq \kappa < \lambda$ sind.*

Beweis Wir wählen einen primitiven Gitterpunkt e_2 auf einer Kante von σ und ergänzen ihn durch einen Gitterpunkt \tilde{e}_1 zu einer Basis von N . Den einzigen primitiven Gitterpunkt auf der anderen Kante von σ können wir dann in der Form $\lambda \tilde{e}_1 - \tilde{\kappa} e_2$ mit ganzen Zahlen λ und $\tilde{\kappa}$ schreiben. Wir können $\lambda > 0$ annehmen, indem wir gegebenenfalls den Basisvektor \tilde{e}_1 durch $-\tilde{e}_1$ ersetzen. Durch Übergang zu $e_1 := \tilde{e}_1 + \alpha e_2$ erreichen wir das Gewünschte, wobei die ganze Zahl α so zu wählen ist, daß $0 \leq \kappa := \tilde{\kappa} + \alpha \lambda < \lambda$ gilt. Insbesondere sind λ und κ teilerfremd, da der Kantenvektor $\lambda e_1 - \kappa e_2 = \lambda \tilde{e}_1 - \tilde{\kappa} e_2$ primitiv ist. ■

Wie kann also eine zweidimensionale affine torische Varietät X_σ aussehen? Der Fall $\kappa = 0$ ist trivial: Da λ und κ teilerfremd sind, folgt $\lambda = 1$; also ist σ regulär und damit $X_\sigma = \mathbb{C}^2$.

Für den Fall $\kappa = 1$ erinnern wir an folgendes: Die „projektive rationale Normalkurve vom Grad λ “ wird durch die Einbettung

$$\rho_\lambda: \mathbb{P}_1 \hookrightarrow \mathbb{P}_\lambda, \quad [u, v] \mapsto [u^\lambda, u^{\lambda-1}v, \dots, uv^{\lambda-1}, v^\lambda]$$

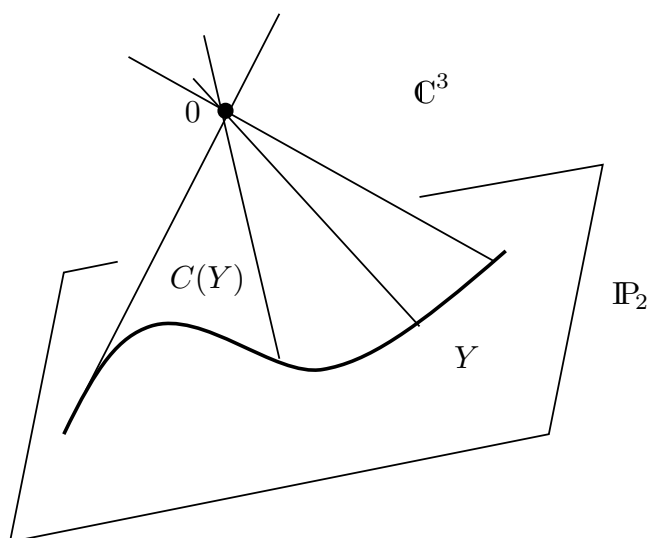
gegeben (vgl. [AG, 5.4]). Der affine Kegel $C(Y)$ über einer projektiven Varietät $Y \hookrightarrow \mathbb{P}_\lambda$ ist die Vereinigung der durch Y gegebenen komplexen Ursprungsgeraden im $\mathbb{C}^{\lambda+1}$, d.h.

$$C(Y) := \pi^{-1}(Y) \cup \{(0, \dots, 0)\} \hookrightarrow \mathbb{C}^{\lambda+1}$$

mit der kanonischen Projektion

$$\pi: (\mathbb{C}^{\lambda+1})^* \rightarrow \mathbb{P}_\lambda, \quad (x_0, \dots, x_\lambda) \mapsto [x_0, \dots, x_\lambda].$$

Für $\lambda = 2$ können wir uns das wie in Figur 9.1 vorstellen.



FIGUR 9.1 Projektive rationale Normalkurve vom Grad 2

Des weiteren benutzen wir die zur „Einheitswurzelgruppe“ $\mathbb{Z}/\lambda\mathbb{Z}$ isomorphe Gruppe von Diagonalmatrizen

$$\mu_\lambda := \{\zeta I_2; \zeta \in \mathbb{C}, \zeta^\lambda = 1\} \subset GL(2, \mathbb{C})$$

mit ihrer kanonischen Operation $z \mapsto \zeta z$ auf \mathbb{C}^2 .

9.2 Beispiel In den Bezeichnungen von 9.1 erhalten wir für $\kappa = 1$ als affine Varietät

$$X_\sigma \cong C(\rho_\lambda(\mathbb{P}_1)) \cong \mathbb{C}^2/\mu_\lambda.$$

Beweis 1) Für den Kegel $\sigma = \text{keg}(e_2, \lambda e_1 - e_2)$ ergaben sich (vgl. 1.26, 2.7 und 3.8)

$$\sigma^\vee = \text{keg}(f_1, f_1 + \lambda f_2), \quad S_\sigma = (f_1 + j f_2, j = 0, 1, \dots, \lambda)$$

sowie die assoziierte Algebra

$$A_\sigma = \mathbb{C}[T_1 T_2^j; j = 0, 1, \dots, \lambda] \subset \mathbb{C}[T_1, T_2].$$

Indem wir neue Unbestimmte U_1 und U_2 mit $T_1 =: U_1^\lambda$ und $T_2 =: U_2/U_1$ einführen, erhalten wir einen Isomorphismus

$$A_\sigma \cong \mathbb{C}[U_1^{\lambda-j}U_2^j, j = 0, 1, \dots, \lambda] \subset \mathbb{C}[U_1, U_2],$$

der für $\lambda > 1$ zu einer echten Inklusion führt. Der Koordinatenring des affinen Kegels

$$C(\rho_\lambda(\mathbb{P}_1)) = \{(z^\lambda, z^{\lambda-1}w, \dots, zw^{\lambda-1}, w^\lambda) \in \mathbb{C}^{\lambda+1}; z, w \in \mathbb{C}\}$$

über $\rho_\lambda(\mathbb{P}_1)$ ist offensichtlich isomorph zur Algebra A_σ , also gilt $X_\sigma \cong C(\rho_\lambda(\mathbb{P}_1))$.

2) Die affin-algebraische Varietät X_σ läßt sich folgendermaßen als Quotient von \mathbb{C}^2 schreiben: Nach [AG, Beispiel 11.20] ist die \mathbb{C} -Algebra

$$(\mathbb{C}[\mathbb{C}^2])^{\mu_\lambda} := \{f \in \mathbb{C}[\mathbb{C}^2]; (g \cdot f) := f \circ g^{-1} = f \text{ für alle } g \in \mu_\lambda\}$$

der μ_λ -invarianten regulären Funktionen auf \mathbb{C}^2 endlich erzeugt, und die Inklusion $(\mathbb{C}[\mathbb{C}^2])^{\mu_\lambda} \hookrightarrow \mathbb{C}[\mathbb{C}^2]$ korrespondiert mit der Quotientenabbildung $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2/\mu_\lambda$. Welche regulären Funktionen auf \mathbb{C}^2 sind konstant auf den μ_λ -Bahnen? Da die Gruppe μ_λ auf dem Koordinatenring $\mathbb{C}[U_1, U_2]$ des \mathbb{C}^2 vermöge $(\zeta \cdot f)(U_1, U_2) := f(\zeta^{-1}U_1, \zeta^{-1}U_2)$ operiert, sind die μ_λ -invarianten Polynome gerade dadurch gekennzeichnet, daß sie in Monome zerlegbar sind, deren Totalgrad Vielfaches von λ ist (vgl. [AG, Beispiel 11.20]), d.h. $(\mathbb{C}[U_1, U_2])^{\mu_\lambda} \cong A_\sigma$ oder anders ausgedrückt: $X_\sigma \cong \mathbb{C}^2/\mu_\lambda$. ■

Analog können wir die Kegel $\sigma = \text{keg}(e_2, \lambda e_1 - \kappa e_2)$ mit $\kappa \geq 2$ behandeln. Dazu verwenden wir für teilerfremde λ und κ die wiederum zur Einheitswurzelgruppe $\mathbb{Z}/\lambda\mathbb{Z}$ isomorphe Gruppe

$$\mu_{\lambda\kappa} := \left\{ \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^\kappa \end{pmatrix}; \zeta \in \mathbb{C}, \zeta^\lambda = 1 \right\} \subset \text{GL}(2, \mathbb{C})$$

aus [AG, Beispiel 11.20] mit der von $\text{GL}(2, \mathbb{C})$ induzierten Wirkung auf \mathbb{C}^2 . Als allgemeine Version von 9.2 zeigen wir:

9.3 Satz *Zu $\sigma = \text{keg}(e_2, \lambda e_1 - \kappa e_2)$ gehört ein torischer Morphismus $\mathbb{C}^2 \rightarrow X_\sigma$, der einen Isomorphismus $X_\sigma \cong \mathbb{C}^2/\mu_{\lambda\kappa}$ induziert.*

Beweis Ohne Einschränkung sei $\kappa \geq 1$. Wir erhalten zunächst

$$\sigma^\vee = \text{keg}(f_1, \kappa f_1 + \lambda f_2), \quad S_\sigma = \{\ell f_1 + j f_2; \ell, j \in \mathbb{N} \text{ mit } 0 \leq j \leq (\lambda/\kappa)\ell\}$$

und

$$A_\sigma = \bigoplus_{0 \leq j \leq (\lambda/\kappa)\ell} \mathbb{C}T_1^\ell T_2^j.$$

Die Hilbertbasis von S_σ ist dann durch

$$\{(\ell, j) \in \mathbb{N}^2; \ell < \kappa, (\lambda/\kappa)\ell - \lambda \leq j < (\lambda/\kappa)\ell\} \cup \{(\lambda, \kappa)\}$$

beschrieben. Um die Algebra A_σ wiederum in der Form $\mathbf{C}[U_1, U_2]^G$ schreiben zu können, führen wir unter Beibehaltung des Vektorraumes \mathbb{R}^2 und des Kegels σ eine Vergrößerung N' des Gitters N ein: Wir betrachten im Gitter N mit der Basis e_1, e_2 das von den Vektoren $(e'_1, e'_2) := (\lambda e_1 - \kappa e_2, e_2)$ und damit von $(\lambda e_1, e_2)$ als Basis erzeugte Untergitter N' . Der N -Kegel σ ist als N' -Kegel

$$\sigma' := \text{keg}(e'_2, e'_1) = \text{keg}(e_2, \lambda e_1 - \kappa e_2) = \sigma$$

regulär, und damit gilt $X_{\sigma'} \cong \mathbf{C}^2$. Das zu N duale Gitter M mit der Basis (f_1, f_2) ist dann ein Untergitter des dualen Gitters M' mit der Basis $(f_1/\lambda, f_2)$. Entsprechend gilt für die zugehörigen Koordinatenringe

$$\mathbf{C}[M] = \mathbf{C}[T_1^{\pm 1}, T_2^{\pm 2}] \subset \mathbf{C}[M'] = \mathbf{C}[U_1^{\pm 1}, T_2^{\pm 1}]$$

mit einer durch $U_1^\lambda = T_1$ charakterisierten neuen Unbestimmten U_1 . Der N' -Kegel σ' führt zur Halbgruppe

$$S_{\sigma'} = \mathbb{N} \cdot (1/\lambda)f_1 + \mathbb{N} \cdot ((\kappa/\lambda)f_1 + f_2) \subset M'$$

sowie der assoziierten Algebra $A_{\sigma'} = \mathbf{C}[U_1, U_1^\kappa T_2] = \mathbf{C}[U_1, U_2]$ mit $U_2 := U_1^\kappa T_2$.

Die Gruppe $G := \mu_{\lambda\kappa} \cong \mathbb{Z}/\lambda\mathbb{Z}$ operiert auf dem Koordinatenring des algebraischen Torus $\mathbb{T}_{N'}$, d.h. auf

$$\mathbf{C}[M'] = \mathbf{C}[U_1^{\pm 1}, T_2^{\pm 1}] = \mathbf{C}[U_1^{\pm 1}, U_2^{\pm 1}] \supset A_{\sigma'},$$

vermöge $\zeta \cdot U_1 = \zeta^{-1}U_1$ und $\zeta \cdot U_2 = \zeta^{-\kappa}U_2$, also ist neben $T_1 = U_1^\lambda$ auch T_2 G -invariant:

$$\zeta \cdot T_2 = \zeta \cdot (U_2 U_1^{-\kappa}) = (\zeta \cdot U_2)(\zeta \cdot U_1^{-\kappa}) = \zeta^{-\kappa} U_2 \zeta^\kappa U_1^{-\kappa} = T_2.$$

Weiter gilt für ein primitives $\zeta \in \mu_{\lambda\kappa}$ und $0 < \nu < \lambda$ wegen $\zeta \cdot U_1^{\pm\nu} \neq U_1^{\pm\nu}$ ersichtlich $\zeta \cdot (U_1^{\pm\nu} T_2^{\pm 1}) \neq U_1^{\pm\nu} T_2^{\pm 1}$, also folgt

$$\mathbf{C}[M']^G = \mathbf{C}[U_1^{\pm\lambda}, T_2^{\pm 1}] = \mathbf{C}[T_1^{\pm 1}, T_2^{\pm 1}] = \mathbf{C}[M].$$

Dies liefert einerseits $\mathbb{T}_N = \mathbb{T}_{N'}/G$, andererseits aber auch

$$A_\sigma = \mathbf{C}[S_\sigma] = \mathbf{C}[\sigma^\vee \cap M] = \mathbf{C}[(\sigma^\vee \cap M') \cap M] = \mathbf{C}[S_{\sigma'}] \cap \mathbf{C}[M] = A_{\sigma'} \cap \mathbf{C}[M']^G = (A_{\sigma'})^G,$$

so daß $X_\sigma \cong X_{\sigma'}/G \cong \mathbf{C}^2/\mu_{\lambda\kappa}$ folgt. ■

Damit ist der zweidimensionale Fall abgehandelt, so daß wir nun zu allgemeinem n übergehen können: Es sei $N' \subset N$ ein Untergitter von endlichem Index, d.h. $G := N/N'$ sei eine endliche Gruppe. Nun soll für das zu N' duale Gitter M' eine kanonische Wirkung von G auf dem Koordinatenring $\mathbf{C}[M']$ eingeführt werden. Dazu beginnen wir mit der wohldefinierten bilinearen Abbildung

$$M' \times N \rightarrow \mathbf{Q}, \quad (u', v) \mapsto \langle u', v \rangle := (1/k) u'(kv) \quad \text{falls } kv \in N' \text{ mit } k > 0.$$

In Verbindung mit dem Gruppenhomomorphismus

$$\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{C}^*, \quad t + \mathbb{Z} \mapsto \exp(2\pi it)$$

induziert sie offensichtlich eine bilineare Abbildung

$$(9.4.0) \quad M' \times N/N' \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{C}^* .$$

Daher können wir die Gruppe N/N' auf dem Koordinatenring $\mathbb{C}[M']$ vermöge

$$(9.4.1) \quad (v + N') \cdot \chi^{u'} := \exp(2\pi i \langle u', v \rangle) \chi^{u'}$$

für $v \in N, u' \in M'$ operieren lassen.

Wir erhalten aus (9.4.0) aber auch eine Dualitätspaarung

$$(9.4.2) \quad M'/M \times N/N' \rightarrow \mathbb{C}^* .$$

Sie ist nicht ausgeartet: Ist etwa $u' \in M' \setminus M$, so existiert ein $v \in N$, auf dem u' keinen ganzzahligen Wert annimmt; daher gilt $\langle u', v \rangle \notin \mathbb{Z}$. Also resultiert aus (9.4.2) auf kanonische Weise ein Isomorphismus

$$(9.4.3) \quad N/N' \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M'/M, \mathbb{C}^*) .$$

9.4 Satz *Ist $N' \subset N$ ein Untergitter von endlichem Index und $G := N/N'$, so gilt*

- 1) $\mathbb{C}[M']^G = \mathbb{C}[M]$,
- 2) $\mathbb{T}_{N'}/G \cong \mathbb{T}_N$.

Beweis 1) Nach dem Elementarteilersatz 2.18 existiert eine Basis e_1, \dots, e_n des Gitters N derart, daß für gewisse $\varepsilon_i > 0$ die Vielfachen $\varepsilon_1 e_1, \dots, \varepsilon_n e_n$ eine Basis des Untergitters N' bilden. Daraus ergibt sich die folgende Inklusion der zugehörigen Koordinatenringe:

$$\mathbb{C}[M] = \mathbb{C}[T_1^{\pm 1}, \dots, T_n^{\pm 1}] \subset \mathbb{C}[M'] = \mathbb{C}[U_1^{\pm 1}, \dots, U_n^{\pm 1}]$$

mit $T_j = \chi^{f_j}$ bezüglich der zu den e_j dualen Basis f_j und $U_j = \chi^{f_j/\varepsilon_j}$, also $U_j^{\varepsilon_j} = T_j$. Ein Gruppenelement

$$(a_1, \dots, a_n) \in \bigoplus_{j=1}^n \mathbb{Z} / (\varepsilon_j \mathbb{Z}) \cong N/N' = G$$

operiert gemäß (9.4.1) auf einem Monom $U_1^{\ell_1} \dots U_n^{\ell_n} \in \mathbb{C}[M']$ durch Multiplikation mit dem Faktor⁶⁾

$$(9.4.4) \quad \exp \left(-2\pi i \left\langle \sum_{j=1}^n \ell_j f_j / \varepsilon_j, \sum_{j=1}^n a_j e_j \right\rangle \right) = \exp \left(-2\pi i \sum_{j=1}^n \ell_j a_j / \varepsilon_j \right) .$$

⁶⁾ Das Minuszeichen resultiert aus der Definition der Gruppenwirkung $g \cdot f = f \circ g^{-1}$.

Daher ist das Monom der Gestalt $U_1^{\ell_1} \cdots U_n^{\ell_n}$ genau dann G -invariant, wenn es für alle $g_j := (0, \dots, 0, \bar{1}, 0, \dots, 0) \in N/N' \cong \bigoplus_{j=1}^n \mathbb{Z}_{\varepsilon_j}$ invariant ist, also $\ell_j/\varepsilon_j \in \mathbb{Z}$ und somit ε_j ein Teiler von ℓ_j ist. Damit folgt $\mathbb{C}[M']^G = \mathbb{C}[T_1^{\pm 1}, \dots, T_n^{\pm 1}] = \mathbb{C}[M]$.

2) Der Operation von G auf $\mathbb{C}[M']$ gemäß (9.4.1) entspricht eine G -Wirkung auf $\mathbb{T}_{N'}$: Mit den Identifikationen (vgl. (9.4.3))

$$G = N/N' \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M'/M, \mathbb{C}^*) \quad \text{und} \quad \mathbb{T}_{N'} = \text{Sp}(\mathbb{C}[M']) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M', \mathbb{C}^*)$$

erhalten wir

$$G \times \mathbb{T}_{N'} \rightarrow \mathbb{T}_{N'}, \quad (g, t) \mapsto (m' \mapsto g(m')t(m')) .$$

Der zur Inklusion $M \subset M'$ gehörige Epimorphismus

$$\mathbb{T}_{N'} = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M', \mathbb{C}^*) \rightarrow \mathbb{T}_N = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{C}^*)$$

hat den Kern $G = N/N' \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M'/M, \mathbb{C}^*)$ gemäß (9.4.3), so daß er den gesuchten Isomorphismus induziert. ■

Auf diese Weise können wir zunächst volldimensionale simpliciale N -Kegel σ behandeln. Denn die primitiven Gittervektoren auf den n Kanten von σ erzeugen in diesem Fall ein Untergitter $N' \subset N$ von endlichem Index. Bezeichnen wir den als N' -Kegel aufgefaßten Kegel σ mit σ' , so ist dieser N' -Kegel nach Konstruktion regulär, also gilt $X_{\sigma'} = \mathbb{C}^n$. Für die kanonische Operation der endlichen Gruppe $G := N/N'$ gemäß (9.4.4) auf dem Koordinatenring $A_{\sigma'}$ gilt $(A_{\sigma'})^G = A_{\sigma}$ und damit $X_{\sigma} \cong X_{\sigma'}/G \cong \mathbb{C}^n/G$, was man wie am Schluß des Beweises von Satz 9.3 durch Schneiden des Koordinatenringes $A_{\sigma'}$ mit $\mathbb{C}[M']^G = \mathbb{C}[M]$ zeigt. — Beachten wir als nächstes, daß sich jeder niederdimensionale simpliciale Gitterkegel nach 2.5 in die Form $\sigma = \tilde{\sigma} \oplus \mathfrak{o}$ mit einem simplicialen Gitterkegel $\tilde{\sigma}$ in $\mathbb{R}^{\dim \sigma}$ und dem Nullkegel in $\mathbb{R}^{n-\dim \sigma}$ zerlegen läßt, so ergibt sich mit Bemerkung 3.7 unser Hauptergebnis dieses Abschnittes:

9.5 Satz *Ist σ ein simplicialer N -Kegel und N' das von den primitiven Kantenvektoren von σ in N erzeugte Untergitter, dann gestattet die affine torische Varietät X_{σ} eine äquivariante Zerlegung*

$$X_{\sigma} \cong (\mathbb{C}^{\dim \sigma}/G) \times (\mathbb{C}^*)^{n-\dim \sigma}$$

in das Produkt aus einem algebraischen Torus und dem Quotienten von $\mathbb{C}^{\dim \sigma}$ nach der endlichen Gruppe $G := (N \cap \text{lin } \sigma)/N'$. ■

Folglich ist die einem simplicialen Fächer Δ zugeordnete torische Varietät X_{Δ} in einer wenig schönen Terminologie eine *V-Mannigfaltigkeit*, d.h., sie besitzt höchstens *Quotientensingularitäten*, also Singularitäten vom gleichen Typ wie der Ursprung im Quotienten eines affinen Raums nach der Operation einer endlichen Gruppe.

Aufgabe 9.1 Gemäß der im Beweis von Satz 9.4 angegebenen Methode bestimme man den zugehörigen Invariantenring A_{σ}^G für den Kegel σ in geeigneten Koordinaten:

- a) $\sigma := \text{keg}(e_1, e_1 + 2e_2) \subset \mathbb{R}^2$ gibt $A_{\sigma}^G = \mathbb{C}[V_1^2, V_1V_2, V_2^2]$;

b) $\sigma := \text{keg}(e_1, e_1 + 2e_2, e_1 + 2e_3, e_1 + 2e_2 + 2e_3 + 4e_4) \subset \mathbb{R}^4$ gibt

$$A_{\sigma'}^G = \mathbb{C}[V_1 V_2 V_3 V_4, V_j V_\ell; 1 \leq j, \ell \leq 4].$$

Die beiden folgenden Aufgaben verallgemeinern die in 9.1 und 9.3 auftretenden zweidimensionalen Beispiele:

Aufgabe 9.2 Für eine Basis e_1, \dots, e_n des Gitters N und ein $\lambda \in \mathbb{N}_{>0}$ setze man

$$\sigma := \text{keg}(e_1, \dots, e_{n-1}, \lambda e_n - \sum_{i=1}^{n-1} e_i).$$

Die Einheitswurzelgruppe $G := \{\zeta \in \mathbb{C}^*; \zeta^\lambda = 1\}$ wirke vermöge $\zeta \cdot (x_1, \dots, x_n) := (\zeta x_1, \dots, \zeta x_n)$ auf \mathbb{C}^n . Man zeige:

- i) $X_\sigma \cong \mathbb{C}^n / G$.
- ii) X_σ ist der affine Kegel über der λ -fachen Veronese-Einbettung von \mathbb{P}_{n-1} , die durch die Abbildung

$$\mathbb{P}_{n-1} \hookrightarrow \mathbb{P}_s, \quad [x_1, \dots, x_n] \mapsto [\text{Monome in } x_1, \dots, x_n \text{ vom Grad } \lambda]$$

mit $s := \binom{\lambda+n-1}{n-1} - 1$ gegeben ist.

Aufgabe 9.3 Für teilerfremde Zahlen $\lambda, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}_{>0}$ operiere die zyklische Gruppe G der Ordnung λ auf der affinen Varietät \mathbb{C}^n vermöge $\zeta \cdot (x_1, \dots, x_n) := (\zeta^{a_1} x_1, \dots, \zeta^{a_n} x_n)$. In Verallgemeinerung des Falles $a_1 = \dots = a_n = 1$ aus Aufgabe 9.2 identifiziere man den Quotienten \mathbb{C}^n / G mit einer affinen torischen Varietät X_σ . Hinweis: Man verwende die Gitter

$$N' := \sum_{i=1}^n \mathbb{Z} \cdot (1/a_i) e_i \subset N := N' + \mathbb{Z} \cdot (1/\lambda) \sum_{i=1}^n e_i.$$

Die Konstruktion in 9.5 läßt sich auf eine nicht-affine simpliziale torische Varietät ausdehnen, falls die Gruppenoperationen auf den einzelnen affinen torischen Karten verträglich gewählt werden können:

9.6 Beispiel Für positive natürliche Zahlen a_0, \dots, a_n und die Wirkung

$$\mathbb{C}^* \times (\mathbb{C}^{n+1})^* \rightarrow (\mathbb{C}^{n+1})^*, \quad \zeta \cdot (x_0, \dots, x_n) := (\zeta^{a_0} x_0, \dots, \zeta^{a_n} x_n)$$

von \mathbb{C}^* betrachten wir den *gewichtet projektiven Raum*

$$\mathbb{P}(a_0, \dots, a_n) := (\mathbb{C}^{n+1})^* / \mathbb{C}^*.$$

Insbesondere gilt $\mathbb{P}(1, \dots, 1) = \mathbb{P}_n$. Wie in Aufgabe 9.4 gezeigt wird, läßt sich der gewichtet projektive Raum $\mathbb{P}(a_0, \dots, a_n)$ folgendermaßen als torische Varietät realisieren: Man startet mit dem Fächer, der zur Konstruktion des projektiven Raums \mathbb{P}_n in 4.8 3) verwendet wurde, d.h. mit dem Fächer, dessen Kegel von den echten Teilmengen von $\{v_0, \dots, v_n\} \subset \mathbb{R}^n$ erzeugt werden, wobei je n dieser Vektoren linear unabhängig seien

und ferner $\sum_{i=0}^n v_i = 0$ gelte. Dieser Fächer ist nun aber nicht als Fächer bezüglich des Gitters $N := \sum_{i=0}^n \mathbb{Z} \cdot v_i$, sondern bezüglich des Gitters $N' := \sum_{i=0}^n \mathbb{Z} \cdot (1/a_i)v_i$ zu betrachten. Mehr zu gewichtet projektiven Räumen findet man etwa im Kapitel 2 von [Wa].

Aufgabe 9.4 Man erkenne mit Hilfe von Aufgabe 9.3 die den Kegeln des Fächers in 9.6 zugeordneten affinen torischen Varietäten als Quotienten von \mathbb{C}^n , identifiziere diese Varietäten mit der kanonischen offenen Überdeckung von $\mathbb{P}(a_0, \dots, a_n)$ und schreibe sodann $\mathbb{P}(a_0, \dots, a_n)$ als Quotienten einer glatten torischen Varietät nach einer endlichen Gruppe.

Zwar findet man nach Satz 9.5 zu jedem Kegel σ eines simplicialen Fächers Δ ein Untergitter $N'_\sigma \subset N$ derart, daß $G := (N \cap \text{lin } \sigma)/N'_\sigma$ eine endliche Gruppe ist und $X_\sigma = (\mathbb{C}^{\dim \sigma}/G) \times (\mathbb{C}^*)^{n-\dim \sigma}$ gilt; im allgemeinen ändert sich dieses N'_σ jedoch mit $\sigma \in \Delta$.

9.7 Beispiel Für $N = \mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2 = V$ sei Δ der vollständige N -Fächer mit Kantenmenge $\Delta^1 = \{e_1, e_1 + e_2, e_2, -2e_1 - 3e_2\}$. Dann ist X_Δ ersichtlich singular. Für jedes Untergitter $N' \subset N$ von endlichem Index kann der Fächer Δ als N' -Fächer Δ' aufgefaßt werden. Dann ist die torische Varietät $X_{\Delta'}$ singular, d.h. nicht jeder Kegel in Δ' wird von einem Teil einer Basis des Gitters N' aufgespannt. Insbesondere ist die Varietät X_Δ nicht als Quotient $X_{\Delta'}/(N/N')$ einer glatten Varietät $X_{\Delta'}$ nach einer endlichen Gruppe N/N' realisierbar.

Aufgabe 9.5 Man beweise die Aussagen in Beispiel 9.7.

Das Gegenbeispiel 9.7 ist in folgendem Sinne minimal:

Aufgabe 9.6 Man zeige für einen vollständigen Fächer Δ in \mathbb{R}^2 mit drei Kanten $v_1, v_2, v_3 \in N$ und Kegelvielfachheiten m_1, m_2, m_3 die Äquivalenz folgender Bedingungen:

- i) Δ beschreibt einen gewichtet projektiven Raum.
- ii) $\text{ggT}(m_1, m_2, m_3) = 1$.
- iii) $\sum \mathbb{Z} \cdot m_i v_i = N$.

Aufgabe 9.7 Für $n, m \geq 1$ operiere \mathbb{C}^* auf \mathbb{C}^{n+m+2} vermöge

$$t \cdot (x_1, \dots, x_{n+m+2}) := (tx_1, \dots, tx_{n+1}, t^{-1}x_{n+2}, \dots, t^{-1}x_{n+m+2}).$$

Man zeige, daß der affine Quotient $\mathbb{C}^{n+m+2}/\mathbb{C}^*$ eine nicht-simpliciale torische Varietät ist.

§ 9 Anhang: Simpliciale Fächer und rationale Homologiemannigfaltigkeiten

Wir haben gesehen, daß zu simplicialen Fächern nur Quotientensingularitäten gehören. Nicht jeder Quotient \mathbb{C}^n/G nach einer endlichen Gruppe $G \subset \text{GL}(n, \mathbb{C})$ ist jedoch singular; so ist etwa für $n = 1$ der Quotient stets regulär. Komplex analytisch werden die hier auftretenden Singularitäten durch folgenden Begriff erfaßt:

9.8 Definition Eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ heißt klein, falls sie keine komplexen Reflexionen enthält, d.h. keine Elemente endlicher Ordnung, die den Eigenwert 1 mit Vielfachheit $n - 1$ besitzen.

Man beachte, daß für endliche Gruppen algebraische und geometrische Vielfachheit gleich sind. In [Pr, Th.2] wird gezeigt, daß man komplex analytisch kleine endliche Gruppen $G \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ durch die Raumkeime $(\mathbb{C}^n/G)_0$ charakterisieren kann:

9.9 Satz Zwei kleine endliche Untergruppen G und H von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ sind genau konjugiert, wenn die Raumkeime $(\mathbb{C}^n/G)_0$ und $(\mathbb{C}^n/H)_0$ analytisch isomorph sind. ■

Bei simplizialen torischen Varietäten sind wir immer in dieser Situation:

9.10 Satz Es sei σ ein volldimensionaler simplizialer N -Kegel. Das Untergitter $N' \subset N$ werde von den (primitiven) Gittervektoren auf den Kanten von σ erzeugt. Dann ist die Gruppe $N/N' \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ klein und $X_\sigma \cong \mathbb{C}^n / (N/N')$.

Beweis Es seien v_1, \dots, v_n die primitiven Gittervektoren auf den Kanten von σ ; weiter sei σ' der als N' -Kegel aufgefaßte Kegel σ . Dann gilt $X_{\sigma'} = \mathbb{C}^n$ mit Koordinatenring $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$, wobei $X_i = \chi^{v_i^*}$. Ferner wirkt $v + N' \in N/N'$ gemäß (9.4.4) auf den Erzeugenden dieses Koordinatenringes vermöge $(v + N') \cdot X_j = \exp(-2\pi i \langle v_j^*, v \rangle) X_j$ und damit auf der Varietät \mathbb{C}^n durch Multiplikation mit der Diagonalmatrix

$$\mathrm{diag}\left(\exp(+2\pi i \langle v_1^*, v \rangle), \dots, \exp(+2\pi i \langle v_n^*, v \rangle)\right) \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}).$$

Diese Diagonalmatrix zu v ist genau dann eine Reflexion, wenn alle $p_j := \langle v_j^*, v \rangle$ mit genau einer Ausnahme, etwa $\langle v_n^*, v \rangle =: p/q$ mit teilerfremden p, q , ganzzahlig sind. Aus der Gleichung $v = \sum_{j=1}^n \langle v_j^*, v \rangle v_j$ ergibt sich daher die Beziehung

$$(pv_n)/q = v - \sum_{j=1}^{n-1} p_j v_j \in M,$$

so daß der Vektor v_n in M durch q teilbar ist, obwohl v_n primitiv gewählt war. ■

Man kann andererseits simpliziale Fächer Δ dadurch charakterisieren, daß X_Δ „triviale“ rationale lokale Homologie hat. Dazu haben wir allerdings einige Ergebnisse aus der algebraischen Topologie zu zitieren (etwa aus dem sehr systematischen Buch [Br]), die wir der Verständlichkeit halber jedenfalls erläutern werden.

Wir erinnern zunächst an den Begriff der lokalen Homologie einer (komplex) n -dimensionalen normalen algebraischen Varietät X (hier stets bezüglich der metrischen Topologie verwendet, daher würde für alles folgende „lokal irreduzibel in der analytischen Struktur“ statt „normal“ ausreichen; auf eine systematischere Theorie für allgemeineren Basisräume gehen wir hier nicht ein):

9.11 Definition Ist G eine abelsche Gruppe, X eine algebraische Varietät und $x \in X$, so heißt die Gruppe $H_j(X, X \setminus \{x\}; G)$ die „ j -te lokale Homologie von X im Punkte x mit Koeffizienten in G “.

Wir verwenden hier, daß jeder Punkt x in der algebraischen Varietät X beliebig kleine „gute Umgebungen“⁷⁾ U besitzt. Für torische Varietäten folgt das einfach aus der Tatsache, daß für jeden n -dimensionalen Kegel σ der Fixpunkt x_σ starker Deformationsretrakt ist (vgl. allgemeiner 12.4).

Daraus ergibt sich mit dem Ausschneidungssatz für jede gute Umgebung U von x :

$$H_j(X, X \setminus \{x\}; G) \cong H_j(\bar{U}, \partial U; G) \cong \tilde{H}_{j-1}(\partial U; G),$$

wobei \tilde{H}_* die reduzierte Homologie bezeichne. Man bezeichnet als Homologie mit abgeschlossenen Trägern

$$(9.11.1) \quad H_j^{\text{cld}}(U; G) := H_j(\bar{U}, \partial U; G).$$

Für abgeschlossene Teilmengen $A \subset X$ existieren naheliegende kanonische „Homomorphismen“

$$H_j^{\text{cld}}(A; G) \rightarrow H_j^{\text{cld}}(X; G).$$

Die Konstruktion läßt sich zu relativen Gruppen $H_j^{\text{cld}}(X, A; G)$ erweitern, die dann zu einer exakten Homologiesequenz ([Br, V.5 Seite 194])

$$(9.11.2) \quad \dots \rightarrow H_j^{\text{cld}}(A; G) \rightarrow H_j^{\text{cld}}(X; G) \rightarrow H_j^{\text{cld}}(X, A; G) \rightarrow H_{j-1}^{\text{cld}}(A; G) \rightarrow \dots$$

führen⁸⁾. Es ist nun nützlich zu wissen, daß sich die relativen Gruppen in dieser Theorie durch absolute ersetzen lassen (vgl. [Br, V.5.9]):

$$(9.11.3) \quad H_j^{\text{cld}}(X, A; G) \cong H_j^{\text{cld}}(X \setminus A; G).$$

Für $U' := U \setminus A \subset U \subset X$ existieren damit kanonische „Einschränkungshomomorphismen“

$$\rho_{U'}^U: H_j^{\text{cld}}(U; G) \rightarrow H_j^{\text{cld}}(U'; G),$$

mit denen die Homologie mit abgeschlossenen Trägern eine Prägarbe⁹⁾ bildet. Die zugehörige Garbe ${}_X\mathcal{H}_j^G$ auf X , genannt „Garbe der j -ten lokalen Homologie“ von X mit Koeffizienten in G , hat als Halme $\mathcal{H}_{j,x} := {}_X\mathcal{H}_{j,x}^G$ wie die Prägarbe gerade die lokale Homologie $H_j(X, X \setminus \{x\}; G)$.

⁷⁾ Eine relativkompakte Umgebung U von x heie gute Umgebung, wenn ihr Abschluß auf x und $U \setminus \{x\}$ auf ∂U zusammenziehbar ist. Aus 12.4 folgt, daß X_σ für $\sigma \in \Delta^n$ eine gute Umgebung von x_σ ist, vgl. 9.18. Da algebraische Varietäten lokal so triangulierbar sind, daß ein vorgegebener Punkt x ein Eckpunkt der Triangulierung ist, kann man dann U als den offenen Simplexstern dieser Triangulierung wählen.

⁸⁾ Wir erhalten eine Homologietheorie, welche die einschlägigen Axiome aus [EiStr, I.3] mit Ausnahme des Homotopieaxioms erfüllt.

⁹⁾ In Verallgemeinerung des Begriffes „Prägarbe von Funktionen“ ist eine Prägarbe von R -Moduln auf X ein kontravarianter Funktor \mathcal{G} auf der Kategorie der offenen Teilmengen von X mit Werten in der Kategorie der R -Moduln. Eine solche Prägarbe \mathcal{G} heißt eine Garbe, wenn für jede Familie offener Teilmengen $(U_j)_{j \in J}$ von X mit $U := \bigcup_{j \in J} U_j$ die über die

Für $n \geq 1$ folgt aus der Tatsache, daß X lokal irreduzibel ist:

$$(9.11.4) \quad {}_X \mathcal{H}_j^G = 0 \text{ falls } j \leq 1 \text{ oder } j \geq 2n + 1 .$$

Denn es genügt, das Verschwinden einer Garbe halmweise nachzuweisen. Jede Gruppe $H_{\geq 2n+1}(X, X \setminus \{x\}; G)$ verschwindet zunächst aus Dimensionsgründen. Da X lokal irreduzibel ist, bleibt für jede zusammenhängende Umgebung U von x auch $U \setminus \{x\}$ zusammenhängend. Wählt man nun U zusätzlich gut, so ist

$$\mathcal{H}_{j,x}^G = \tilde{H}_{j-1}(\bar{U} \setminus \{x\}; G) \stackrel{j \leq 1}{\cong} 0 .$$

9.12 Beispiele 1) Ist x ein regulärer Punkt in X , so ist

$${}_X \mathcal{H}_{j,x}^G = \begin{cases} 0, & j \neq 2n \\ G, & j = 2n . \end{cases}$$

2) Die „Orientierungsgarbe“ ${}_X \mathcal{H}_{2n}^G$ ist die konstante Garbe ${}_X G$ auf X .

Beweis 1) Ohne Einschränkung sei X_x durch eine offene Menge in \mathbb{C}^n realisiert. Man wähle als gute Umgebung U von x in \mathbb{C}^n eine offene Kugel um x , dann ist

$$\mathcal{H}_{j,x}^G = \tilde{H}_{j-1}(\partial U; G) = \tilde{H}_{j-1}(S^{2n-1}; G) = \begin{cases} 0, & j \neq 2n \\ G, & j = 2n . \blacksquare \end{cases}$$

2) Die konstante Garbe ${}_X G$ auf X wird von der Prägarbe $U \mapsto G$ induziert; ersichtlich gilt

$${}_X G(U) = \{f: U \rightarrow G; f \text{ ist lokal konstant}\} .$$

Da X normal ist (für die topologische Aussage würde hier wieder eine lokal irreduzible komplex analytische Varietät ausreichen), gilt $\text{codim}_X S(X) \geq 2$ für den singulären Ort $S(X)$ von X . Aus der exakten Sequenz (9.11.2) zum Paar $(U, S(U))$ für $U \subset X$ folgt in Verbindung mit (9.11.3) eine exakte Sequenz

$$\dots \rightarrow H_j^{\text{cld}}(S(U); G) \rightarrow H_j^{\text{cld}}(U; G) \rightarrow H_j^{\text{cld}}(U_{\text{reg}}; G) \rightarrow H_{j-1}^{\text{cld}}(S(U); G) \rightarrow \dots .$$

„Einschränkungen“ definierte Sequenz

$$(9.11.5) \quad 0 \rightarrow \mathcal{G}(U) \rightarrow \prod_{j \in J} \mathcal{G}(U_j) \xrightarrow{\vartheta} \prod_{(j,k) \in J \times J} \mathcal{G}(U_j \cap U_k) \\ (g_j)_j \mapsto (g_j|_{U_j \cap U_k} - g_k|_{U_j \cap U_k})_{(j,k)}$$

exakt ist. Für Prägarben von Funktionen ist die Sequenz (9.11.5) stets an der ersten Stelle exakt. — Jeder Prägarbe läßt sich auf kanonische Weise eine Garbe (mit gleichen Halmen) zuordnen. Dies ist einfach, wenn die Sequenz (9.11.5) an der ersten Stelle exakt ist; dann ist die gegebene Prägarbe nur geeignet anzureichern.

Daraus erhält man wegen $\dim_{\mathbb{R}} S(U) \leq 2n - 2$ einen Isomorphismus

$$H_{2n}^{\text{cld}}(U, G) \cong H_{2n}^{\text{cld}}(U_{\text{reg}}, G) .$$

Also genügt es, für reguläres X zu zeigen, daß $H_{2n}^{\text{cld}}(X, G)$ kanonisch zu G isomorph ist. Dies folgt nun aus der globalen Orientierbarkeit komplexer Mannigfaltigkeiten. ■

9.13 Definition Die Varietät X heiße G -Homologiemannigfaltigkeit, wenn ihre lokale G -Homologie „trivial“ ist, wenn also gilt:

$${}_X \mathcal{H}_j^G = \begin{cases} {}_X G, & j = 2n \\ 0 & \text{sonst} . \end{cases}$$

Nach Beispiel 9.12 1) ist außer für $j = 2n$ die lokale Homologie von X auf den singulären Ort $S(X)$ konzentriert. Insbesondere ist eine reguläre torische Varietät für jedes G eine G -Homologiemannigfaltigkeit.

Für die explizite Berechnung von Beispielen zitieren wir zwei Ergebnisse der algebraischen Topologie, die wir meist im (besonders einfachen, da dann die Torsion verschwindet) Spezialfall rationaler Koeffizienten verwenden:

9.14 Künnethformel der lokalen Homologie Es seien R ein Hauptidealbereich, G und G' R -Moduln sowie X und Y torische Varietäten. Dann gilt für alle ℓ :

$${}_{X \times Y} \mathcal{H}_{\ell, (x, y)}^{G \otimes G'} \cong \bigoplus_{i+j=\ell} ({}_X \mathcal{H}_{i, x}^G) \otimes_R ({}_Y \mathcal{H}_{j, y}^{G'}) \oplus \bigoplus_{i+j=\ell-1} \text{Tor}^R({}_X \mathcal{H}_{i, x}^G, {}_Y \mathcal{H}_{j, y}^{G'}) .$$

Für unsere Anwendungen des Torsionsproduktes $\text{Tor}^R(G, G')$ genügen statt einer präzisen Definition die folgenden Eigenschaften:

- a) $\text{Tor}^R(G, G') = 0$ falls G oder G' ein torsionsfreier R -Modul ist.
- b) Das Torsionsprodukt ist symmetrisch und additiv.
- c) $\text{Tor}^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(p), \mathbb{Z}/(q)) \cong \mathbb{Z}/(\text{ggT}(p, q)) .$

Ein Beweis findet sich in [Br, V, 13.4]. Spezialisiert man Y zu einem einpunktigen Raum, so erhält man:¹⁰⁾

9.15 Universelles Koeffiziententheorem der lokalen Homologie Es seien R ein Hauptidealbereich, G ein R -Modul sowie X eine torische Varietät. Dann gilt für jedes j

$${}_X \mathcal{H}_j^G \cong {}_X \mathcal{H}_j^R \otimes_R G \oplus \text{Tor}^R({}_X \mathcal{H}_{j-1}^R, G) . \blacksquare$$

¹⁰⁾ Die universellen Koeffiziententheoreme berechnen die Homologie (bzw. Kohomologie) mit Koeffizienten in einem Modul G über einem Hauptidealbereich R und Trägerfamilie c oder cld

- a) im *kovarianten* Fall innerhalb der Theorie unter Beibehaltung der Träger mit Hilfe des Tensorproduktes und des derivierten Funktors Tor des in der Theorie folgenden Moduls (Homologie ist absteigend, Kohomologie aufsteigend),
- b) im *kontravarianten* Fall in der dualen Theorie unter Wechsel der Träger mit Hilfe des Homfunktors und des derivierten Funktors Ext des in der Theorie folgenden Moduls, vgl. etwa 10.15.

9.16 Beispiel Der affine quadratische Kegel X aus Beispiel 3.11 ist eine rationale, aber keine ganzzahlige Homologiemannigfaltigkeit.

Beweis Es ist $S(X) = \{0\}$, also sind nur $\mathcal{H}_{j,0}^G$ für $j = 2, 3$ zu untersuchen. Es sei zunächst $G = \mathbb{Z}$. Betrachten wir die Restklassenabbildung

$$\pi: \mathbb{C}^2 \rightarrow X \cong \mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$$

gemäß 9.2 2). Die Einheitskugel B um 0 in \mathbb{C}^2 hat als Bild eine gute Umgebung $\pi(B)$ von $0 \in X$ mit Rand $S^3/\mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$. Also ist für $j = 2, 3$ (vgl. [Gr 19.23])

$$\mathcal{H}_{j,0}^{\mathbb{Z}} = H_{j-1}(\mathbb{P}_3(\mathbb{R}); \mathbb{Z}) = \begin{cases} 0 & j = 3 \\ \mathbb{Z}/2 & j = 2. \end{cases}$$

Für rationale Koeffizienten folgt aus dem Universellen Koeffiziententheorem 9.15 mit

$$\mathcal{H}_{j,0}^{\mathbb{Q}} = \mathcal{H}_{j,0}^{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

die Behauptung. ■

Des weiteren wollen wir ein allgemeines Ergebnis über die Homologie mit abgeschlossenen Trägern von torischen Varietäten zitieren. Für eine einfache Formulierung führen wir folgenden Begriff ein: Ein Fächer Δ heißt „*nicht entartet*“, wenn er nicht in einer Hyperebene von V enthalten ist. Für einen solchen Fächer sei

$$k := k(\Delta) := \#\Delta^1$$

die Kantenzahl, ferner seien v_1, \dots, v_k die primitiven Erzeugenden der Kanten von Δ . Diese erzeugen ein Untergitter von N , zu dem nach dem Elementarteilersatz 2.18 natürliche Zahlen $1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ gehören. Unter \mathbb{Z}^0 werde die Gruppe 0 verstanden.

9.17 Satz Für jeden nicht entarteten Fächer Δ gilt:

$$H_j^{\text{cld}}(X_{\Delta}; \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} 0, & j = 2n - 1 \\ \text{Cl Div}_W(X_{\Delta}) \cong \mathbb{Z}^{k(\Delta)-n} \oplus \bigoplus_{j=2}^n \mathbb{Z}_{\varepsilon_j}, & j = 2n - 2 \\ 0, & j = 1 \\ \text{Cl Div}_C(X_{\Delta}), & j = 2. \end{cases}$$

Zum Beweis sei auf die Sätze 2.1 und 2.9 in [BaBrFiKp] verwiesen.

Die lokale Homologie in beliebigen Punkten einer torischen Varietät läßt sich aus der in den Fixpunkten berechnen. Die Verbindung zur Homologie mit abgeschlossenen Trägern von affinen torischen Varietäten ergibt sich aus folgendem:

9.18 Bemerkung Ist $\sigma \in \Delta^d$ und $x \in \mathbb{B}_{\sigma}$, so gilt mit $\sigma = \sigma' \oplus \mathfrak{o} \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$

$$(9.18.1) \quad X_{\Delta} \mathcal{H}_{j,x}^G \cong H_{j-2(n-d)}^{\text{cld}}(X_{\sigma'}; G).$$

Beweis Es sei zunächst $d = n$. Nach 12.4 ist der Fixpunkt x_σ starker Deformationsretrakt von X_σ , wobei die Deformation X_σ homöomorph auf beliebig kleine Umgebungen von x_σ abbildet.

Nun sei d beliebig. Für die äquivariante Produktzerlegung gilt gemäß 7.5 mit dem Fixpunkt $x_{\sigma'}$ in $X_{\sigma'}$

$$x = (x_{\sigma'}, t) \in \mathbb{B}_\sigma = \{x_{\sigma'}\} \times \mathbb{T}^{n-d} \hookrightarrow X_{\sigma'} \times \mathbb{T}^{n-d} = X_\sigma .$$

Aus der Künnethformel und mit Beispiel 9.12 1) ergibt sich, weil \mathbb{T}^{n-d} als Mannigfaltigkeit freie lokale Homologie hat:

$$\begin{aligned} X_\Delta \mathcal{H}_{k,x}^G &\cong \bigoplus_{i+j=k} (X_{\sigma'} \mathcal{H}_{i,x}^G) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{T}^{n-d} \mathcal{H}_{j,y}^{\mathbb{Z}}) \cong (X_{\sigma'} \mathcal{H}_{k-2(n-d),x}^G) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{T}^{n-d} \mathcal{H}_{2(n-d),y}^{\mathbb{Z}}) \\ &\cong (X_{\sigma'} \mathcal{H}_{k-2(n-d),x}^G) \cong H_{j-2(n-d)}^{\text{cl}}(X_{\sigma'}; G) . \blacksquare \end{aligned}$$

9.19 Beispiel Es sei σ der dreidimensionale Kegel mit viereckiger Basis aus Beispiel 1.26. Dann ist X_σ keine rationale Homologiemannigfaltigkeit.

Beweis Für den Seitenfächer $\Delta = \mathfrak{S}(\sigma)$ verschwindet $H_4^{\text{cl}}(X_\sigma; \mathbb{Q})$ nach 9.17 und nach (9.18.1) auch $\mathcal{H}_{4,x_\sigma}^{\mathbb{Q}}$ zum Fixpunkt x_σ genau dann, wenn $n = 3$ und $k(\sigma)$ übereinstimmen, also σ simplicial ist. Es ist jedoch $k(\sigma) - 3 = 1$, also $\mathcal{H}_{4,x_\sigma}^{\mathbb{Q}} \cong \mathbb{Q}$. ■

Als Anwendung beweisen wir Charakterisierungen (darunter eine durch lokale Homologie¹¹⁾) von regulären wie von simplicialen Fächern:

9.20 Satz Für eine torische Varietät X_Δ sind folgende Bedingungen äquivalent:

- 1) Δ ist regulär.
- 2) X_Δ ist eine ganzzahlige Homologiemannigfaltigkeit.
- 3) X_Δ ist faktoriell.

Beweis Bekanntlich heißt eine algebraische Varietät faktoriell, wenn alle ihre lokalen Ringe faktoriell sind. Damit sei Δ ohne Einschränkung ein mindestens eindimensionaler affiner Fächer $\mathfrak{S}(\sigma)$. Ferner können wir σ als volldimensional voraussetzen: Für 2) folgt das aus 9.18, für 3) kann man wie folgt argumentieren: Auf faktoriellen Varietäten stimmen Weil- und Cartierdivisoren überein. Ist $d := \dim \sigma$ und $\sigma = \sigma' \oplus \mathfrak{o}$, so folgt

$$\text{Cl Div}(X_\sigma) \cong \text{Cl Div}(X_{\sigma'}) \times \text{Cl Div}((\mathbb{C}^*)^{n-d}) \cong \text{Cl Div}(X_{\sigma'})$$

aus [AG, 10.38], da $(\mathbb{C}^*)^{n-d} \subseteq \mathbb{C}^{n-d}$ verschwindende Divisorenklassengruppe hat (vgl. [AG,10.33]).

¹¹⁾ Die lokale Homologie kann grundsätzlich auf dem Rechner bestimmt werden; die Grundlagen dafür wurden in [Jo] gelegt; vgl. auch [BaBrFiKp₃] bzw. das Paket Sheafhom [MCo].

Zu 1) \Rightarrow 2) vgl. 9.12. Für 2) \Rightarrow 3) verwenden wir die Tatsache, daß für einen Hauptidealbereich R auf einer orientierbaren R -Homologiemannigfaltigkeit X der topologischen Dimension $2n$ mit einem beliebigen Koeffizientenmodul G über R ein *Poincarédualitätsisomorphismus*

$$(9.20.1) \quad P_{2n-j}(X): H^j(X; G) \xrightarrow{\cong} H_{2n-j}^{\text{cld}}(X; G)$$

existiert, vgl. [Br, V.9.3]. Für $j = 2$ und $R = G = \mathbb{Z}$ erhalten wir somit aus 9.17 wegen der Zusammenziehbarkeit von X_σ , daß die Cartier- und damit die Weildivisorenklassengruppe von X_σ verschwindet. Nach [AG, 10.29 und Aufgabe 10.9] folgt daraus, daß die normale affine Varietät X_σ faktoriell ist.

3) \Rightarrow 1) Nach 12.4 ist X_σ zusammenziehbar, insbesondere verschwinden nach 9.17

$$\mathbb{Z}^{k-n} \oplus \bigoplus_{j=2}^n \mathbb{Z}_{\varepsilon_j} \cong \text{Cl Div}_W(X_\sigma) = \text{Cl Div}_C(X_\sigma) \cong H^2(X_\sigma; \mathbb{Z}) = 0.$$

Dies bedeutet zunächst $n = k$, i.e., σ ist simplizial; andererseits sind alle Elementarteiler $\varepsilon_j = 1$, d.h. die primitiven Kantenvektoren von σ bilden eine Basis der abelschen Gruppe N . Damit ist σ regulär. ■

Für eine entsprechende Charakterisierung simplizialer Fächer nennen wir in Analogie zu [AG, 10.29] eine torische Varietät X_Δ „fastfaktoriell“ oder „ \mathbb{Q} -faktoriell“, wenn für jedes $\sigma \in \Delta$ die rationale Divisorenklassengruppe $\text{Cl Div}_W(X_\sigma) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ verschwindet. Eine genauere Untersuchung des Begriffes „fastfaktoriell“ findet man in [Sto]. Damit erhalten wir das Analogon zu Satz 9.20:

9.21 Satz *Für eine torische Varietät X_Δ sind folgende Bedingungen äquivalent:*

- 1) Δ ist simplizial.
- 2) X_Δ ist eine rationale Homologiemannigfaltigkeit.
- 3) X_Δ ist \mathbb{Q} -faktoriell.

Beweis Da die Behauptung lokaler Natur ist, sei Δ wieder ohne Einschränkung ein mindestens eindimensionaler affiner Fächer $\mathfrak{S}(\sigma)$ der Dimension n .

1) \Rightarrow 2) Nach 9.5 ist X_σ ein Quotient der Gestalt $\pi: \mathbb{C}^n \rightarrow X_\sigma \cong \mathbb{C}^n/G$ mit einer endlichen Gruppe G . Ist $p = 0$ oder eine zur Anzahl der Elemente von G teilerfremde Primzahl, so existiert für den Primkörper \mathbb{k} der Charakteristik p (i.e., \mathbb{Q} bzw. \mathbb{Z}_p für $p \neq 0$) ein kanonischer Isomorphismus

$$\pi_*: H_*^{\text{cld}}(\mathbb{C}^n; \mathbb{k})^G \rightarrow H_*^{\text{cld}}(\mathbb{C}^n/G; \mathbb{k}),$$

wobei $H_*^{\text{cld}}(\mathbb{C}^n; \mathbb{k})^G$ die Gruppe der unter der natürlichen Operation von G invarianten Elemente von $H_*^{\text{cld}}(\mathbb{C}^n; \mathbb{k})$ bezeichnet, vgl. [Br, II.19.1]. Nun ist

$$H_*^{\text{cld}}(\mathbb{C}^n; \mathbb{k}) = H_{2n}^{\text{cld}}(\mathbb{C}^n; \mathbb{k}) = \mathbb{k},$$

also folgt

$$H_j^{\text{clid}}(X_\sigma; \mathbb{k}) = \begin{cases} 0, & j \neq 2n \\ \mathbb{k}, & j = 2n. \end{cases}$$

Weiter ist ${}_{X_\sigma} \mathcal{H}_{*,x_\sigma}^{\mathbb{Q}} = H_*^{\text{clid}}(X_\sigma; \mathbb{Q})$ nach 9.18, und die Verschwindungsbedingung für die rationale lokale Homologie ist in allen Fixpunkten erfüllt. Für andere Punkte von X_σ geht man mit Hilfe der Künnethformel 9.14 vor.

Für 2) \Rightarrow 3) liefert zu jedem $\sigma \in \Delta$ der rationale Poincarédualitätsisomorphismus $P_{2n-2}(X_\sigma)$ für die rationale Homologiemannigfaltigkeit X_σ nach 9.17 und dem globalen Universellen Koeffiziententheorem Isomorphismen

$$0 = H^2(X_\sigma; \mathbb{Q}) \cong H_{2n-2}^{\text{clid}}(X_\sigma; \mathbb{Q}) \cong \text{Cl Div}_W(X_\sigma) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q};$$

also ist X_σ fastfaktoriell.

3) \Rightarrow 1) Ist σ nicht simplicial, so ist in den Bezeichnungen von 9.17 der Vektorraum

$$H_{2n-2}^{\text{clid}}(X_\sigma, \mathbb{Q}) \cong \text{Cl Div}_W(X_\sigma) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}^{k(\sigma)-n}$$

nicht der Nullvektorraum, im Gegensatz zur vorausgesetzten Fastfaktorialität. ■

9.22 Korollar Enthält ein Fächer Δ höchstens zweidimensionale Kegel, so ist X_Δ eine rationale Homologiemannigfaltigkeit.

Beweis Da ersichtlich jeder höchstens zweidimensionale Kegel simplicial ist, folgt die Behauptung aus 9.21. ■

Aufgabe 9.8 Eine Prägarbe \mathcal{G} von R -Moduln auf dem topologischen Raum T ist genau dann eine Garbe, wenn für jede Familie offener Teilmengen $(U_j)_{j \in J}$ von X mit $U := \bigcup_{j \in J} U_j$ folgende beiden Bedingungen erfüllt sind:

- a) *Eindeutigkeit*: Elemente $f, g \in \mathcal{G}(U)$ sind gleich $\iff f|_{U_j} = g|_{U_j}$ für alle $j \in J$;
- b) *Reichhaltigkeit*: Sind für alle $j \in J$ Elemente $f_j \in \mathcal{G}(U_j)$ mit $f_i|_{U_{ij}} = f_j|_{U_{ij}}$ gegeben, so existiert ein $f \in \mathcal{G}(U)$ mit $f|_{U_j} = f_j|_{U_j}$ für alle j .

Kleines Wörterbuch § 8

Theorie in (V, N)	torische Theorie
regulärer Fächer Δ	faktorielles X_Δ
regulärer Fächer Δ	\mathbb{Z} -Homologiemannigfaltigkeit X_Δ
simplicialer Fächer Δ	\mathbb{Q} -faktorielles X_Δ
simplicialer Fächer Δ	\mathbb{Q} -Homologiemannigfaltigkeit X_Δ
Elementarteiler zur Kantenmatrix von Δ	zyklische Erzeugende der $(2n - 2)$ -Torsion
$k(\Delta) - n$	Bettizahl $b_{2n-2}^{\text{clid}}(X_\Delta)$

10. Glatte vollständige torische Flächen

Glatte vollständige torische Flächen werden durch den „Fächerzahlenvektor“ eindeutig charakterisiert, der jeder Kante des beschreibenden Fächers eine ganze Zahl zuordnet. Es wird charakterisiert, welche Vektoren aus \mathbb{Z}^k als solche Fächerzahlenvektoren auftreten. Eine der Bedingungen ist eine Gleichung, die sich als die Noetherformel der Algebraischen Geometrie interpretieren läßt.

Es sei Δ ein vollständiger zweidimensionaler Fächer. Er läßt sich durch seine (in mathematisch positivem Sinne orientierte) Folge von primitiven Kantenvektoren

$$(10.0.1) \quad (v_1, \dots, v_k) \quad \text{mit} \quad v_{k+1} := v_1$$

aus N charakterisieren; die Orientierung drückt sich durch positive $\det(v_j, v_{j+1})$ für alle j aus. Die zugehörigen 2-Kegel bezeichnen wir mit

$$(10.0.2) \quad \sigma_i := \text{keg}(v_i, v_{i+1}) \quad \text{für} \quad 1 \leq i \leq k.$$

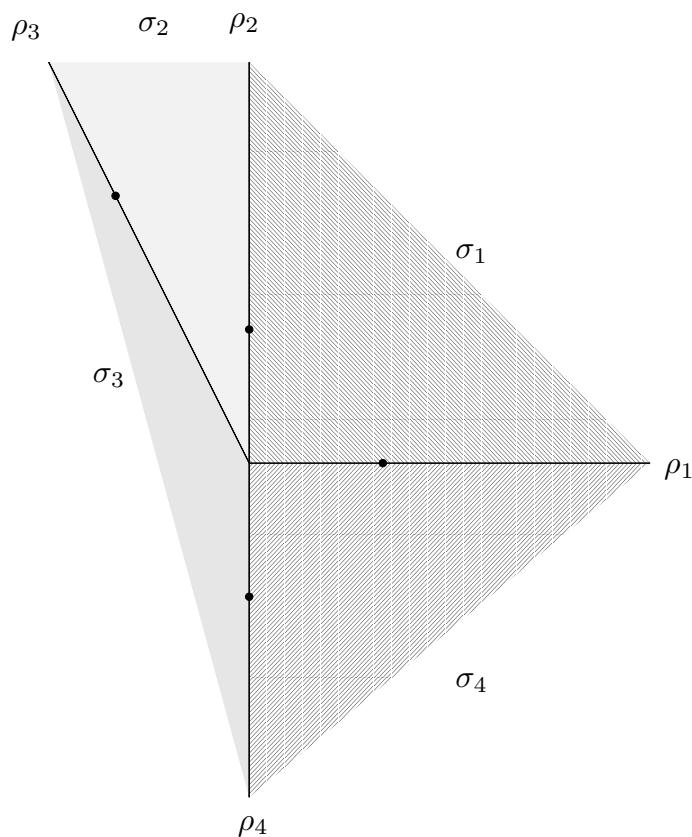
Eine zyklische Vertauschung in (v_1, \dots, v_k) führt ersichtlich zum gleichen Fächer, so daß wir (v_1, \dots, v_k) kurz als „Fächerzyklus zu Δ “ bezeichnen wollen. Nach 4.19 entsprechen Äquivalenzklassen von Fächerzyklen (wobei Äquivalenz „durch eine unimodulare Transformation ineinander überführbar“ heißt) genau den Isomorphieklassen vollständiger Flächen. Wir nennen einen Fächerzyklus „regulär“, wenn Δ regulär ist. Dies ist hier genau dann der Fall — und damit X_Δ genau dann glatt, wenn alle $\det(v_j, v_{j+1})$ den Wert 1 annehmen.

An den Anfang unserer Überlegungen stellen wir einige markante Beispiele vollständiger torischer Flächen X_Δ . Wir haben in Aufgabe 8.3 gesehen, daß für $k = 3$ nur der \mathbb{P}_2 auftritt. Für den Fall $k = 4$ hatten wir gezeigt, daß in geeigneten Koordinaten ein $a \in \mathbb{N}$ existiert, so daß gilt (vgl. Figur 10.1):

$$v_1 = e_1, \quad v_2 = e_2, \quad v_3 = -e_1 + ae_2, \quad v_4 = -e_2.$$

Mit der angegebenen Festlegung von v_1 und v_2 ist $a \in \mathbb{N}$ ersichtlich eindeutig bestimmt; daher schreiben wir auch Δ_a für Δ . Die zugehörige Fläche X_Δ heißt „Hirzebruchsche Σ -Fläche“ und wird mit Σ_a bezeichnet.

Sie ist damit von der Form $\Sigma_a = X_{\sigma_1} \cup X_{\sigma_2} \cup X_{\sigma_3} \cup X_{\sigma_4}$, wobei alle X_{σ_i} zu \mathbb{C}^2 isomorph sind. Genauer läßt sie sich durch eine allgemeine lokale Überlegung zum Teilfächer



FIGUR 10.1 Fächer zu Σ_a

$\mathfrak{S}(\sigma_1, \sigma_2)$ wie folgt beschreiben (dabei geht nur ein, daß die σ_i regulär sind und sich in einer Kante schneiden): Es gilt mit $f_j := e_j^*$

$$\sigma_1^\vee = \text{keg}(f_1, f_2) \quad \text{und} \quad \sigma_2^\vee = \text{keg}(af_1 + f_2, -f_1).$$

Folglich erhalten wir Koordinaten

$$(10.0.3) \quad \begin{aligned} x &:= \chi^{f_1} \quad \text{und} \quad y := \chi^{f_2} \quad \text{auf} \quad X_{\sigma_1}, \\ \eta &:= \chi^{af_1+f_2} \quad \text{und} \quad \xi := \chi^{-f_1} \quad \text{auf} \quad X_{\sigma_2}. \end{aligned}$$

Insbesondere bedeutet dies

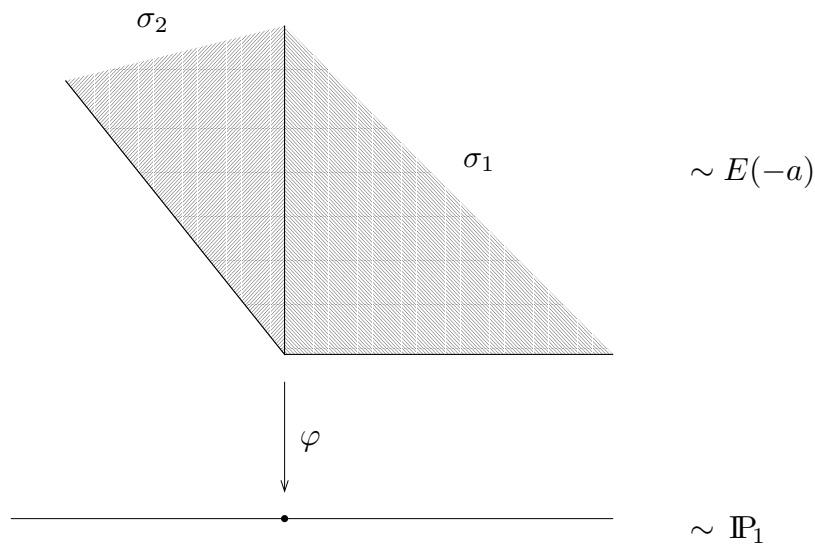
$$\xi = x^{-1} \quad \text{auf} \quad x \neq 0 \quad \text{und} \quad \eta = \xi^{-a} \cdot y \quad \text{auf} \quad \xi \neq 0.$$

Die Karten X_{σ_1} und X_{σ_2} sind längs

$$X_{\text{keg}(e_2)} = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \subseteq \mathbb{C}_{(x,y)}^2$$

zu verheften (wir deuten in \mathbb{C}^2 die jeweiligen Koordinatensysteme durch einen unteren Index an):

$$(10.0.4) \quad (x, y) \sim (\eta, \xi) = (\xi^{-a}y, \xi) = (x^ay, x^{-1}) \quad \text{auf} \quad x \neq 0 \neq \xi;$$

FIGUR 10.2 Morphismus zu $E(-a)$

dies liefert eine (weder affine noch vollständige) glatte torische Fläche

$$E(-a) := X_{\sigma_1} \cup X_{\sigma_2} = \mathbb{C}_{(x,y)}^2 \cup \mathbb{C}_{(\eta,\xi)}^2.$$

Sie läßt sich durch den in Figur 10.2 illustrierten Fächer-morphismus φ weiter untersuchen.

Dieser wird durch $\varphi: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$, $e_1 \mapsto e$, $e_2 \mapsto 0$ induziert, was ersichtlich einen Fächer-morphismus $\varphi: \mathfrak{S}(\sigma_1, \sigma_2) \rightarrow \mathfrak{S}(\pm \text{keg}(e))$ mit dualem Homomorphismus φ^* liefert, der durch $\varphi^*: f \mapsto f_1$ für $f := e^*$ bestimmt ist. Auf $X_{\mathfrak{S}(\pm \text{keg}(e))} = \mathbb{P}_1$ betrachten wir die Überdeckung

$$\mathbb{P}_1 = \mathbb{C}_{(x)} \cup \mathbb{C}_{(\xi)} \quad \text{mit } \xi \sim x^{-1} \text{ auf } \mathbb{C}^* \cup \mathbb{C}^*.$$

Die zu φ gehörigen Morphismen

$$\begin{aligned} X_{\sigma_1} &= \text{Hom}_{\text{Hgr}}(S_{\sigma_1}, \mathbb{C}) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Hgr}}(S_{\text{keg}(e)}, \mathbb{C}) = \mathbb{C} \\ X_{\sigma_2} &= \text{Hom}_{\text{Hgr}}(S_{\sigma_2}, \mathbb{C}) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Hgr}}(S_{\text{keg}(-e)}, \mathbb{C}) = \mathbb{C} \end{aligned}$$

sind in obigen Koordinaten auf $E(-a)$ von der Gestalt

$$(10.0.5) \quad \varphi_*: E(-a) \rightarrow \mathbb{P}_1, \quad (x, y) \mapsto x \quad \text{und} \quad (\eta, \xi) \mapsto \xi.$$

Ersichtlich hat der Morphismus φ_* die Fasern $\mathbb{C}_{(y)}$ bzw. $\mathbb{C}_{(\eta)}$, die also zu \mathbb{C} isomorph sind.

Damit liefert uns der Morphismus φ_* aus (10.0.5) ein erstes Beispiel für folgende Begriffsbildung, die wir in § 15 noch genauer untersuchen werden:

10.1 Definition Ein Morphismus $\psi: Y \rightarrow Z$ algebraischer Varietäten heißt ein „Geradenbündel“ über Z , wenn gilt

- 1) Jede Faser $Y_z := \psi^{-1}(z)$ trägt die Struktur einer komplexen Geraden;
 2) es gibt eine affine Überdeckung aus Unterräumen $U \subseteq Z$ mit Isomorphismen

$$\psi_U: \psi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbf{C},$$

die für jedes $z \in U$ einen Vektorraumisomorphismus $\psi_U|_{Y_z}: Y_z \rightarrow z \times \mathbf{C}$ induzieren.

Ein solches Geradenbündel $\psi: Y \rightarrow Z$ hat stets einen (regulären) „Nullschnitt“ $\nu: Z \rightarrow Y$, der auf jeder „lokalen Karte“ U durch $z \mapsto (z, 0)$ gegeben ist. Im Beispiel $\varphi_*: E(-a) \rightarrow \mathbb{P}_1$ stiftet der Nullschnitt einen Isomorphismus zwischen \mathbb{P}_1 und dem Bahnabschluß $\mathbb{V}_{\text{keg}(v_2)}$, der in $X_{\sigma_1} \cup X_{\sigma_2}$ liegt.

Kommen wir nun speziell zur Fläche Σ_a zurück: Entsprechend zu $E(-a)$ erhalten wir

$$E(a) := X_{\sigma_3} \cup X_{\sigma_4} = \mathbf{C}^2 \cup \mathbf{C}^2,$$

wenn in der Konstruktion a durch $-a$ und f_2 durch $-f_2$ ersetzt werden; dies ergibt also Koordinaten

$$\begin{aligned} \chi^{-af_1-f_2} \quad \text{und} \quad \chi^{-f_2} \quad \text{auf} \quad X_{\sigma_3}, \\ \chi^{f_1} \quad \text{und} \quad \chi^{-f_2} \quad \text{auf} \quad X_{\sigma_4}. \end{aligned}$$

Insgesamt ist $X_{\Delta_a} = E(-a) \cup E(a)$ mit Kartenverheftung $\chi^{f_2} \mapsto \chi^{-f_2}$, was für jede einzelne Gesamtfaser bedeutet, daß zwei affine Karten \mathbf{C} zu \mathbb{P}_1 verheftet werden. Wir erhalten damit schließlich einen Morphismus

$$\Sigma_a = X_{\Delta_a} \rightarrow \mathbb{P}_1,$$

der auch ein „ \mathbb{P}_1 -Bündel über \mathbb{P}_1 “ genannt wird.

Aufgabe 10.1 Für festes $b \in \mathbb{Z}$ induziert der Gitterhomomorphismus

$$\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^2 = N, \quad e \mapsto e_1 + be_2$$

einen Fächermorphismus

$$s: (\mathbb{Z}, \mathfrak{S}(\pm \text{keg}(e))) \rightarrow (\mathbb{Z}^2, \Delta_a).$$

Der zugehörige torische Morphismus $s_*: \mathbb{P}_1 \rightarrow \Sigma_a$ heißt ein „Schnitt des \mathbb{P}_1 -Bündels“.

- i) Man zeige, daß s_* wie folgt in lokalen Koordinaten beschreibbar ist:

$$t \mapsto (x, y) = (t, t^b), \quad u = t^{-1} \mapsto (\eta, \xi) = (u^{-(a+b)}, u).$$

- ii) Man zeige, daß s_* einen (Null- und Polstellen-)Divisor (s_*) definiert; dessen Gesamtordnung ist $-a$.

(Für 10.13.)

Aufgabe 10.2 Man zeige für die Hirzebruchschen Σ -Flächen: $\Sigma_a \cong \Sigma_{a'} \iff a = a'$ und damit insbesondere: $\Sigma_a \cong \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1 \iff a = 0$.

Nach Aufgabe 10.2 ist Σ_a zu keinem $\Sigma_{a'}$ mit $a \neq a'$ also torische Varietät isomorph. Nach [Gu, Th. 3.1] sind Σ_a und $\Sigma_{a'}$ daher ebenfalls als abstrakte algebraische Varietäten nicht isomorph. Dies gilt auch in der Kategorie der analytischen Varietäten: Da Σ_a und $\Sigma_{a'}$ durch einen polytopischen Fächer gegeben sind, erweisen sie sich zunächst als projektive Varietäten (16.19). Nach dem GAGA-Prinzip gemäß [Se₂, Th. 2] ist die algebraische Struktur für normale projektive Varietäten aus der analytischen eindeutig bestimmt. Dies gilt interessanterweise jedoch nicht in der Kategorie topologischer Räume: Man kann zeigen, daß jedes Σ_{2j} zu Σ_0 sowie Σ_{2j+1} zu Σ_1 homöomorph ist (vgl. [Hz, 2.10] oder [DuFoNo, Seite 240]).

Damit können wir glatte vollständige torische Flächen charakterisieren (wir erinnern an Aufgabe 8.3 iii), wonach \mathbb{P}_2 aus Σ_1 durch Niederblasen einer Kurve entsteht):

10.2 Theorem *Jede vollständige glatte torische Fläche, die nicht die projektive Ebene \mathbb{P}_2 ist, entsteht aus einem Σ_a durch sukzessives Aufblasen von Fixpunkten.*

Beweis Der zur betrachteten Fläche gehörige Fächer Δ bestimmt einen Fächerzyklus (v_1, \dots, v_k) , der nach Aufgabe 8.3 $k \geq 4$ Komponenten hat. Ist $k = 4$, so erhalten wir nach Aufgabe 8.3 eine Σ -Fläche Σ_a . Es sei nun $k \geq 5$. Nach Hilfssatz 10.5 existiert dann ein j mit $v_{j+1} + v_{j-1} = v_j$, wobei $\text{keg}(v_{j-1}, v_{j+1})$ ein spitzer Kegel ist. Nach Beispiel 8.2 entsteht durch Weglassen von $\text{keg}(v_j)$ aus dem Fächer $\mathfrak{S}(\text{keg}(v_{j-1}, v_j), \text{keg}(v_j, v_{j+1}))$ ein regulärer Kegel; i.e., die Kurve \mathbb{V}_{v_j} kann niedergeblasen werden, was k um 1 erniedrigt. Nach endlich vielen Kontraktionen landen wir bei einer Σ -Fläche. ■

Wie das Beispiel 10.8 belegt, ist die Fläche Σ_a in 10.2 allerdings nicht eindeutig bestimmt. — Für den Beweis von 10.2 zeigen wir drei Hilfssätze, deren erster in Figur 10.3 illustriert wird:

10.3 Hilfssatz *Es seien $\text{keg}(v_1, v_2)$ und $\sigma_{\pm} := \text{keg}(\pm w_1, w_2)$ reguläre 2-Kegel. Liegt v_1 in σ_+° , so liegt v_2 nicht in σ_-° .*

Beweis Für die Darstellung $v_1 = \alpha w_1 + \beta w_2$ und $v_2 = \gamma w_1 + \delta w_2$ mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z}$ gilt

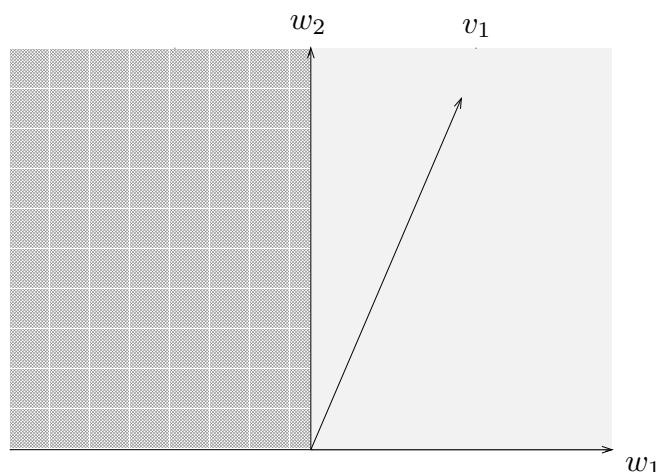
$$v_1 \in \sigma_+^{\circ} \iff \alpha, \beta > 0 \quad \text{und} \quad v_2 \in \sigma_-^{\circ} \iff \gamma < 0 < \delta.$$

Also folgte aus $v_2 \in \sigma_-^{\circ}$ der Widerspruch

$$1 = \det(v_1, v_2) = \alpha\delta - \beta\gamma \geq 2. \blacksquare$$

10.4 Hilfssatz *Es sei (v_1, \dots, v_k) ein regulärer Fächerzyklus mit $k \geq 4$. Dann existiert ein $\ell \geq 4$, so daß in geeigneter Numerierung des Fächerzyklus $v_{\ell} = -v_1$ gilt.*

Beweis Nach Aufgabe 8.3 gilt die Behauptung für $k = 4$, es sei nun $k \geq 5$. Ohne Einschränkung sei die Numerierung der v_j so gewählt, daß v_1, \dots, v_{ℓ} eine Folge maximaler Länge sei, die ganz in einer abgeschlossenen Halbebene liegt; weiter seien als Gitterbasis $v_1 =: e_1$ und $v_2 =: e_2$ gewählt. Wegen $k \geq 5$ ist $\ell \geq 3$, und v_3 liegt im Innern des Quadranten $\text{keg}(e_2, -e_1)$. Nehmen wir nun $\ell = 3$ an. Dann liegt v_4 im Innern der unteren Halbebene. Nach 10.3 liegt v_4 dann sogar im vierten Quadranten, und damit

FIGUR 10.3 Verbotenes Land für v_2 in 10.3

liegen $v_4, \dots, v_k, v_1, v_2$ im Widerspruch zur Wahl von ℓ in einer Halbebene. Daher gilt $\ell \geq 4$.

Wir nehmen nun an, daß die Behauptung falsch sei. Als erstes zeigen wir $\ell = k - 1$. Dazu reicht nach Definition von ℓ der Nachweis, daß in der von $v_{\ell-1}$ und $-v_{\ell-1}$ aufgespannten offenen Halbebene, die v_ℓ enthält, kein weiterer Kantenvektor liegt. Aus $v_\ell \neq -v_j$ ergibt sich zunächst

$$v_\ell \in \text{keg}(v_j, -v_{j-1})^\circ \quad \text{für } 2 \leq j \leq \ell - 1.$$

Daraus folgt jedoch mit 10.3

$$v_{\ell+1} \notin \text{keg}(-v_{j-1}, -v_j)^\circ \quad \text{für } 2 \leq j \leq \ell - 1,$$

woraus die Zwischenbehauptung folgt.

In geeigneter Numerierung haben wir also folgende Situation vorliegen:

- Die Basis (v_1, v_2) teilt die Ebene in vier Quadranten I – IV.
- Die Vektoren v_2, \dots, v_k liegen in der linken Halbebene $\text{II} \cup \text{III}$.
- Die Vektoren v_3, \dots, v_k liegen im Quadranten III. Dazu genügt es ersichtlich, $v_3 \in \text{III}$ zu zeigen. Andernfalls sei v_j mit $j \geq 3$ der letzte Vektor in II, dann liegt nach 10.3 der Vektor v_{j+1} in IV, d.h. $j = k$ und der Kegel $\text{keg}(v_k, v_1)$ ist nicht spitz!
- Der Vektor v_k liegt in $\text{keg}(v_3, -v_2)^\circ$ und damit v_{k+1} nicht in $\text{keg}(-v_2, -v_3)^\circ$, obwohl dieser Vektor als v_1 in gerade diesem Kegel enthalten ist! ■

In Aufgabe 8.2 i) wurden einem regulären Fächerzyklus (v_1, \dots, v_k) ganze Zahlen a_j mit der Eigenschaft $v_{j-1} + v_{j+1} = a_j v_j$ zugeordnet.

10.5 Hilfssatz Ist (v_1, \dots, v_k) ein regulärer Fächerzyklus mit $k \geq 5$, so existiert ein j , für das $\text{keg}(v_{j-1}, v_{j+1})$ ein spitzer Kegel und $a_j = 1$ ist.

Beweis Gemäß 10.4 wähle man unter allen $\ell \geq 4$ mit $v_\ell = -v_1$ ein minimales. Für $b_j := \det(v_1 + v_2, v_j)$ gilt dann

$$b_2 = 1 = b_\ell \quad \text{und} \quad b_j > 1 \quad \text{für} \quad j = 3, \dots, \ell - 1.$$

Man fixiere ein j zwischen 3 und $\ell - 1$, für das

$$b_{j-1} \leq b_j \quad \text{und} \quad b_{j+1} < b_j$$

gilt. Aus der Darstellung $v_{j-1} + v_{j+1} = a_j v_j$ folgt $b_{j-1} + b_{j+1} = a_j b_j$ und damit

$$0 < a_j = \frac{b_{j-1} + b_{j+1}}{b_j} < \frac{2b_j}{b_j} = 2,$$

also $a_j = 1$. Aus der Wahl von j folgt weiter, daß der Kegel $\text{keg}(v_{j-1}, v_{j+1}) \subset \text{keg}(v_2, v_\ell)$ spitz ist. ■

Wir kommen nun zu einer einfacheren numerischen Charakterisierung aller glatten kompakten torischen Flächen X_Δ mit Hilfe „regulärer Fächerzahlenzyklen“,

$$(a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{Z}^k,$$

die sich aus dem regulären Fächerzyklus (v_1, \dots, v_k) zu Δ durch die Bedingung

$$v_{j-1} + v_{j+1} = a_j v_j \quad \text{mit} \quad v_0 := v_k, \quad v_1 := v_{k+1}$$

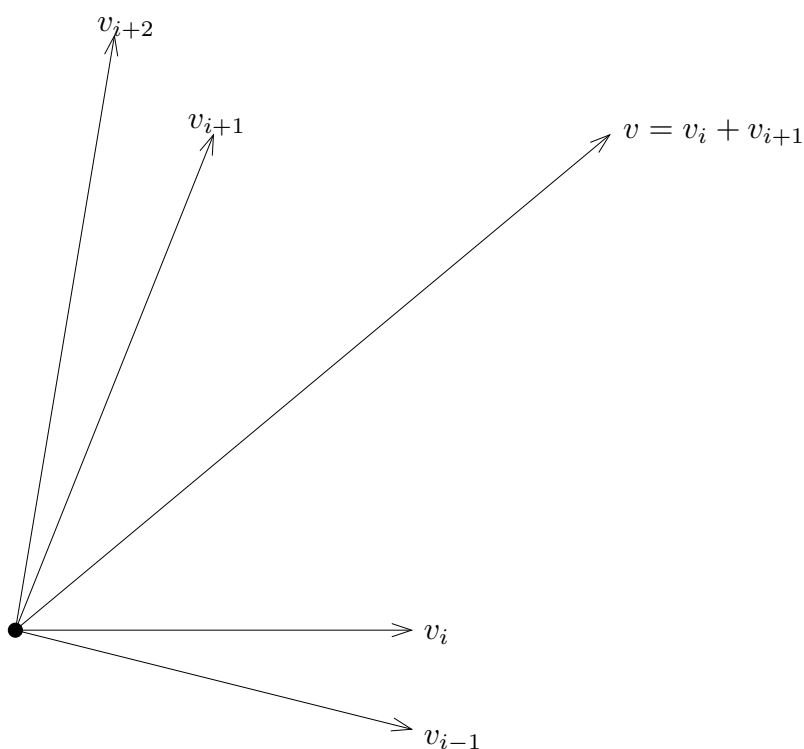
ergeben; damit wird aus einer $k \times n$ -Matrix eine $k \times 1$ -Matrix. Evident definieren äquivalente Fächerzyklen den gleichen Fächerzahlenzyklus. Damit charakterisiert der reguläre Fächerzahlenvektor die Isomorphieklasse einer gegebenen regulären vollständigen torischen Fläche; sind nämlich (v_1, \dots, v_k) und (w_1, \dots, w_k) dazu passende Fächervektoren, so ist die Transformation $v_i \mapsto w_i$ für $i = 1, 2$ eine nach Aufgabe 2.1 unimodulare Basistransformation, die nach der Rechenvorschrift des Fächerzahlenvektors alle v_i auf w_i abbildet.

10.6 Beispiel Der reguläre Fächerzahlenzyklus zu \mathbb{P}_2 ist $(-1, -1, -1)$, der reguläre Fächerzahlenzyklus zu Δ_a ist $(0, a, 0, -a)$. ■

10.7 Lemma Jeder reguläre Fächerzahlenzyklus (a_1, \dots, a_k) erfüllt die Bedingung

$$\sum_{j=1}^k a_j - 3k = -12.$$

Beweis Für \mathbb{P}_2 und Σ_a ist die Behauptung mit 10.6 evident. Weil gemäß 10.2 jede andere glatte vollständige torische Fläche aus einem Σ_a durch sukzessives Aufblasen von Fixpunkten, d.h. durch reguläre Unterteilung des Fächers Δ_a entsteht, genügt der Nachweis, daß der Ausdruck $\sum a_j - 3k$ bei jeder einzelnen regulären Unterteilung seinen Wert nicht ändert.

FIGUR 10.4 Reguläres Unterteilen von $\text{keg}(v_i, v_{i+1})$

Fügen wir etwa zwischen v_i und v_{i+1} regulär einen Vektor v ein, i.e., setzen wir $v = v_i + v_{i+1}$, so gilt (vgl. Figur 10.4)

$$v_{i-1} + v = (v_{i-1} + v_{i+1}) + v_i = (a_i + 1)v_i$$

und analog $v + v_{i+2} = (a_{i+1} + 1)v_{i+1}$.

Damit wird aus dem regulären Fächerzahlenzyklus (a_1, \dots, a_k) der Länge k der reguläre Fächerzahlenzyklus

$$(10.7.1) \quad (a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + 1, 1, a_{i+1} + 1, a_{i+2}, \dots, a_k)$$

der Länge $k+1$. Evident bleibt der Wert der zu untersuchenden Summe ungeändert. ■

Aufgabe 10.3 Für $k \geq 5$ und einen Zyklus $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ zeige man, daß \mathbf{a} genau dann von einem regulären Fächer herkommt (also ein regulärer Fächerzahlenzyklus ist), wenn sich \mathbf{a} durch „Kontraktion“ auf einen der beiden Zyklen $(0, a, 0, -a)$ und $(-1, -1, -1)$ reduzieren läßt.

Die Kontraktion eines Zyklus \mathbf{a} ist keineswegs eindeutig:

10.8 Beispiel Der Zyklus $\mathbf{a} = (0, 2, 1, 3, 1, 3, 1, 1)$ entsteht durch sukzessives Aufblasen von 4 Fixpunkten aus \mathbb{P}_2 , aus Σ_0 , aber auch aus Σ_2 .

Beweis Wir schreiben die jeweiligen Kontraktionen nieder, wobei die weggelassene Fächerkante im Zyklus durch Fettdruck hervorgehoben ist:

$$\begin{aligned} (0, 2, 1, 3, \mathbf{1}, 3, 1, 1) &\curvearrowright (0, 2, \mathbf{1}, 2, 2, 1, 1) \curvearrowright (0, 1, 1, 2, \mathbf{1}, 1) \curvearrowright (0, 1, \mathbf{1}, 1, 0) \curvearrowright (0, 0, 0, 0); \\ (0, 2, 1, 3, \mathbf{1}, 3, 1, 1) &\curvearrowright (0, 2, \mathbf{1}, 2, 2, 1, 1) \curvearrowright (0, 1, 1, 2, \mathbf{1}, 1) \curvearrowright (0, 1, 1, \mathbf{1}, 0) \curvearrowright (0, 1, 0, -1); \\ (0, 2, \mathbf{1}, 3, 1, 3, 1, 1) &\curvearrowright (0, \mathbf{1}, 2, 1, 3, 1, 1) \curvearrowright (-1, \mathbf{1}, 1, 3, 1, 1) \curvearrowright (-2, 0, 3, \mathbf{1}, 1) \curvearrowright (-2, 0, 2, 0). \end{aligned}$$

Aufgabe 10.4 Man zeige, für welche a der Weihnachtsstern aus Aufgabe 5.12 aus einer Fläche Σ_a durch Kontraktionen gebastelt werden kann.

Aufgabe 10.5 Man zeige, daß es zwischen je zwei vollständigen glatten torischen Flächen X_{Δ_1} und X_{Δ_2} eine birationale Abbildung $\vartheta: X_{\Delta_1} \rightarrow X_{\Delta_2}$ gibt, die aus einer Folge von Aufblasungen von Fixpunkten und regulären Kontraktionen von Kurven besteht (anders formuliert: In der Kategorie der torischen Varietäten existiert eine glatte vollständige torische Fläche X_{Δ} mit surjektiven Morphismen $\varphi_i: X_{\Delta} \rightarrow \Delta_i$, die aus der regulären Kontraktion von Kurven bestehen, so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & X_{\Delta} & \\ \varphi_1 \swarrow & & \searrow \varphi_2 \\ X_{\Delta_1} & \xrightarrow{\vartheta} & X_{\Delta_2} \end{array}$$

kommutiert).

Eine weitere Beobachtung ist für die Charakterisierung regulärer Fächerzahlenzykeln wichtig: In einem zugehörigen Fächerzyklus (v_1, \dots, v_k) bilden je zwei aufeinanderfolgende Vektoren (v_j, v_{j+1}) eine Gitterbasis. Bei einmaligem Durchlaufen dieser Basiswechsel müssen wir daher wieder beim Ausgangsbasispaar ankommen. In Formeln lautet das wie folgt: Es sei

$$T(a) := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}).$$

Aus $a_j v_j = v_{j-1} + v_{j+1}$ folgt (wegen der Zeilenschreibweise (v_j, v_{j+1}) steht die Matrix rechts)

$$(v_j, v_{j+1}) = (v_j, -v_{j-1} + a_j v_j) = (v_{j-1}, v_j) T(a_j),$$

also ergibt sich induktiv

$$(v_k, v_1) \cdot \prod_{j=1}^{\ell} T(a_j) = (v_{\ell}, v_{\ell+1})$$

und damit die

10.9 Bemerkung Für einen regulären Fächerzahlenzyklus (a_1, \dots, a_k) gilt

$$\prod_{j=1}^k T(a_j) = E_2. \blacksquare$$

Dies ermöglicht nun eine Charakterisierung der regulären Fächerzahlenzyklen:

10.10 Satz *Ein Tupel $(a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{Z}^k$ ist genau dann ein regulärer Fächerzahlenzyklus (gehört also genau dann zu einer regulären vollständigen torischen Fläche), wenn gilt:*

$$\sum_{j=1}^k a_j - 3k = -12 \quad \text{und} \quad \prod_{j=1}^k T(a_j) = E_2 .$$

Beweis „ \Rightarrow “ folgt aus 10.7 und 10.9.

„ \Leftarrow “ Zu gegebenem $(a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{Z}^k$ mit $\prod_{j=1}^k T(a_j) = E_2$ ist ein Zyklus (v_1, \dots, v_k) aus $(N_{\neq 0})^k$ zu konstruieren, der mit $v_{k+1} := v_1$ genau einmal um 0 herumläuft und für den alle Paare (v_j, v_{j+1}) eine positiv orientierte Basis von N bildet.

Zunächst ist $k \geq 3$, denn für $a, b \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$ ist

$$T(a) \neq E_2 \neq \begin{pmatrix} -1 & * \\ * & * \end{pmatrix} = T(a)T(b)$$

und damit für $k \leq 2$ die zweite Voraussetzung nicht erfüllbar. Die Folge (v_1, \dots, v_k) wird, ausgehend von $v_1 := e_1$ und $v_2 := e_2$, für $j \geq 2$ wie folgt definiert:

$$(10.10.1) \quad (v_j, v_{j+1}) := (e_1, e_2) \cdot \prod_{i=2}^j T(a_i) .$$

Dann ist $\det(v_j, v_{j+1}) = 1$, und aus $\prod_{j=1}^k T(a_j) = E_2$ folgt $(v_{k+1}, v_{k+2}) = (e_1, e_2)$, denn es gilt

$$\prod_{i=2}^{k+1} T(a_i) = \left(\prod_{i=2}^k T(a_i) \right) T(a_1) = T(a_1)^{-1} T(a_1) = E_2 .$$

So bleibt zu zeigen, daß der Zyklus der v_j genau dann einmal um den Nullpunkt läuft, vgl. Lemma 10.11.

10.11 Lemma *Für $k \geq 3$ sei $(a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{Z}^k$ mit $\prod_{i=1}^k T(a_i) = E_2$ gegeben. Für die gemäß (10.10.1) gegebene Folge $(v_1, \dots, v_k) \in N^k$ sei $\ell \in \mathbb{N}$ die Umlaufzahl des Streckenzuges $[v_1, \dots, v_{k+1}]$ um den Nullpunkt. Dann gilt*

$$\sum_{j=1}^k a_j - 3k = -12\ell .$$

Aufgabe 10.6 Liegt ein Vektor $v \in N = \mathbb{Z}^2$ in einem regulären N -Kegel $\text{keg}(v_1, v_1)$, so existiert eine reguläre Unterteilung von $\text{keg}(v_1, v_2)$, die v als Kante enthält (für Aufgabe 10.7).

Aufgabe 10.7 Man beweise 10.11.

§ 10 Anhang: Invariante Kurven und der duale Graph

Wir wollen auf einen Vergleich der Formel $\sum a_j - 3k = -12$ aus 10.7 mit der Noetherischen Formel der algebraischen Geometrie hinaus. Ferner wollen wir die Homologie vollständiger regulärer torischer Flächen bestimmen, die uns später als Prototyp für den Chowring dienen wird.

Dazu sei (v_1, \dots, v_k) ein regulärer Fächerzyklus mit zugehörigem vollständigen regulären Fächer Δ . Dann besitzt X_Δ nach Punkt 3a) des Wörterbuches von § 7 genau k invariante abgeschlossene Kurven C_1, \dots, C_k , die gemäß 7.15 alle zu \mathbb{P}_1 isomorph sind. In der am Anfang von § 10 gegebenen Beschreibung lassen sich im Teilfächer $\mathfrak{S}(\sigma_{j-1}, \sigma_j)$ mit $\sigma_j = \text{keg}(v_j, v_{j+1})$ die Kurven C_{j-1}, C_j, C_{j+1} orten: Bezüglich der Koordinaten

$$(x, y) \quad \text{und} \quad (\eta, \xi) = (yx^{a_j}, x^{-1})$$

wie in (10.0.4) gehört zum Strahl v_j die durch die x -Achse und ξ -Achse (wegen der Bedingung $y = 0 \iff \eta = 0$) beschriebene Kurve C_j . Zum Strahl v_{j+1} gehört entsprechend C_{j+1} , was (jedenfalls affin) durch die η -Achse $\xi = 0$ charakterisiert wird, und zu v_{j-1} die Kurve C_{j-1} mit der y -Achse $x = 0$. Dies bedeutet insbesondere, daß sich die Kurven C_j und C_{j+1} „transversal schneiden“, wir also nur mengentheoretische Schnitte $C_i \cap C_j$ zu untersuchen haben. Diese lesen wir aus dem Fächer Δ ab.

Fassen wir zusammen:

10.12 Bemerkung Die torische Varietät X_Δ enthält genau k invariante Kurven C_j . Jede ist isomorph zu \mathbb{P}_1 und hat eine invariante Umgebung der Form $E(-a_j)$, in der C_j als Nullschnitt realisiert ist. Der Schnitt zweier verschiedener Kurven ist transversal und erfüllt

$$C_i \cap C_j = \begin{cases} \emptyset, & \text{für } |i - j| \geq 2, \\ \text{einpunktig,} & \text{sonst.} \end{cases}$$

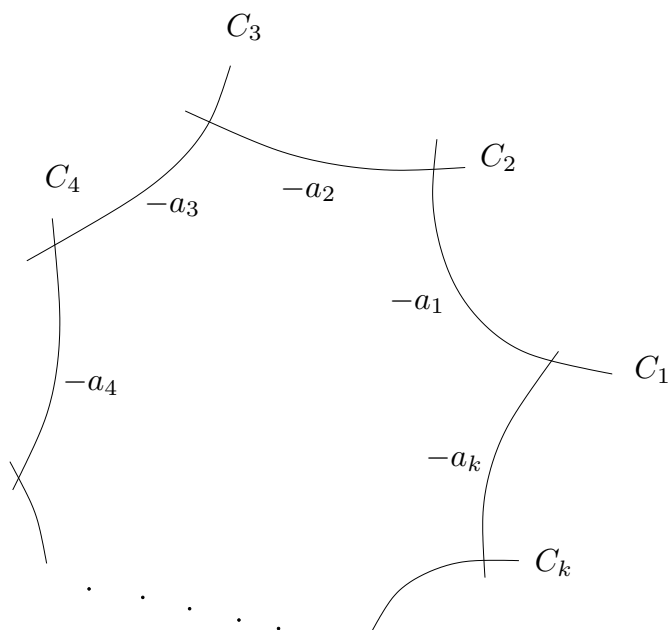
Wir ordnen diesem System invarianter Kurven in Figur 10.5 einen Graphen zu. Ihm wird üblicherweise ein „gewichteter dualer Graph“ auf folgende Weise zugesellt:

Jeder Kante des Ausgangsgraphen entspricht eine Ecke des dualen Graphen; zwei Ecken werden genau dann durch eine Kante verbunden, wenn sich die zugehörigen Kurven des Ausgangsgraphen schneiden, vgl. Figur 10.6. Als Gewichte verwenden wir die Zahlen $-a_j$.

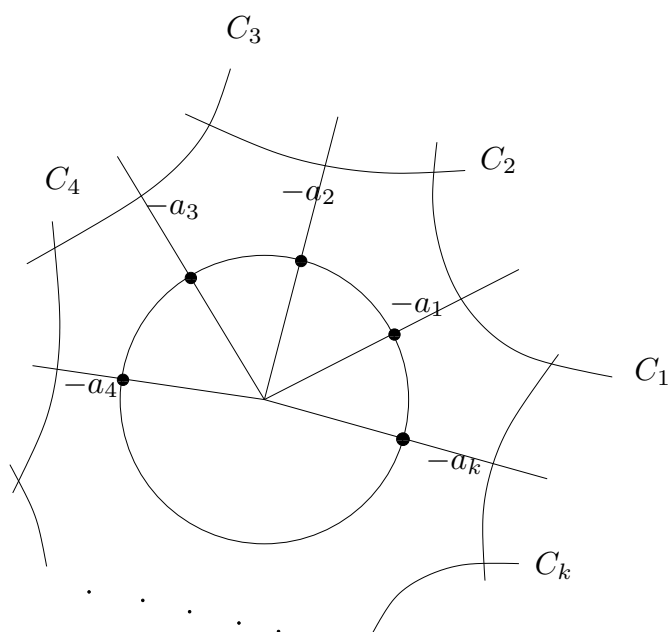
Wie wir in 10.2 gesehen haben, läßt sich vom dualen Graphen zu \mathbb{P}_2 bzw. \sum_a in Figur 10.6 jeder andere duale Graph nach dem in (10.7.1) beschriebenen Verfahren durch Aufblasen gewinnen, vgl. Figur 10.7.

Für irreduzible Kurven C, C' in X_Δ definiert man eine „Schnittzahl“ wie folgt: Schneiden sich C und C' transversal, so sei sie

$$(10.12.1) \quad C \cdot C' := \#(C \cap C').$$

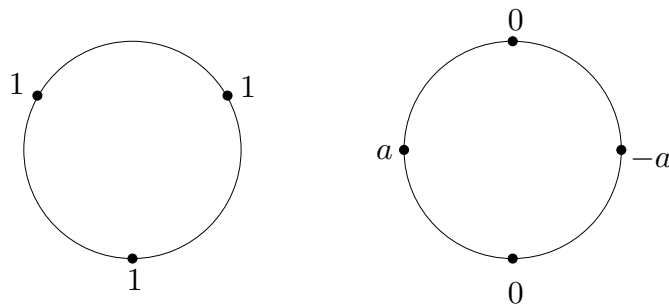
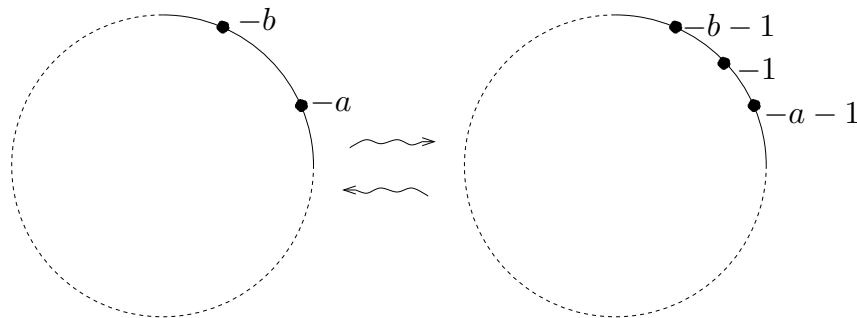


FIGUR 10.5 Invariantes Kurvensystem in X_Δ



FIGUR 10.6 Dualer Graph zu Figur 10.5

Sehr viel komplizierter ist der Fall $C = C'$, in dem man eine „Selbstschnittzahl“ $C \cdot C$ wie folgt definiert (wir beschränken uns auf die Angabe der Idee): Man ersetze ein Exemplar von C durch einen „homologen“ Schnitt C' , der C transversal schneidet, und verwende die dann existierende Schnittzahl. Wir können dies mit Hilfe des am Anfang des Paragraphen beschriebenen lokalen Modells zu $\mathfrak{S}(\sigma_1, \sigma_2)$ durchführen. Dazu seien $C := C_2$ und $a := a_2$; wir verwenden den in den Koordinaten (x, y) durch $y = 1$ gege-

FIGUR 10.7 Duale Graphen zu P_2 bzw. Σ_a 

FIGUR 10.8 Aufblasen eines regulären Punktes und der duale Graph

benen „rationalen Schnitt“ s in dem Geradenbündel $E(-a)$ über $\mathbb{P}_1 \cong C$, er läßt sich als regulärer Schnitt im assoziierten \mathbb{P}_1 -Bündel über \mathbb{P}_1 interpretieren (vgl. Aufgabe 10.1). Dieser Schnitt ist homolog zum Nullschnitt C . In der Karte (η, ξ) ist er durch die Funktion $\eta = \xi^{-a}$ gegeben und hat somit in $\xi = 0$ einen Pol der Ordnung a . Topologisch läßt sich s zu einem besser zu überschauenden (wegen der Konjugation nur noch „antiholomorphen“) Schnitt

$$\tilde{s} := \begin{cases} s & \text{auf } |\xi| \geq 1, \\ \bar{\xi}^a & \text{auf } |\xi| \leq 1 \end{cases}$$

abändern, der in $\xi = 0$ eine Nullstelle der Ordnung a hat. Da die Transformation $\xi \mapsto \bar{\xi}$ die Orientierung umkehrt, setzt man

$$(10.12.2) \quad C \cdot C := C \cdot \tilde{s}(\mathbb{P}_1) := -a.$$

Damit liefert die Konstruktion:

10.13 Bemerkung In der durch den regulären Fächerzahlenzyklus (a_1, \dots, a_k) definierten vollständigen glatten Fläche X_Δ haben die zugehörigen invarianten Kurven C_j die Selbstschnittzahl $-a_j$. ■

Man nennt nun $K := K_{X_\Delta} := -\sum_{j=1}^k C_j$ einen „kanonischen Divisor“¹²⁾ von X_Δ . Diese Objekte sind an vielen Stellen der Algebraischen Geometrie von fundamentaler

¹²⁾ Üblicherweise wird ein kanonischer Divisor zu einer algebraischen Fläche über eine globale

Bedeutung. Wir benötigen hier jedoch nur die zugehörige Selbstschnittzahl $K^2 := K \cdot K$, die sich durch bilineare Fortsetzung ergibt:

$$(10.13.1) \quad K^2 = \sum_{j=1}^k C_j^2 + \sum_{i \neq j} C_i \cdot C_j = \sum_{j=1}^k (-a_j) + 2k.$$

Beispielsweise ist

$$K_{\mathbb{P}_2}^2 = 9, \quad K_{\Sigma_a}^2 = 8.$$

Halten wir noch das Verhalten von K^2 bei einmaligem Aufblasen eines Punktes fest, vgl. Figur 10.8:

$$(10.13.2) \quad K_{\widehat{X}}^2 = K_X^2 - 1.$$

Als nächstes benötigen wir eine rein topologische Invariante von X_Δ , nämlich die „Eulercharakteristik“. Dazu verwenden wir rationale Homologie $H_\bullet(T; \mathbb{Q})$ für einen topologischen Raum T mit $\dim_{\mathbb{Q}} H_\bullet(T) < \infty$. Dann existiert mit den Bettizahlen $b_j(T) := \dim_{\mathbb{Q}} H_j(T; \mathbb{Q})$ die Eulercharakteristik

$$(10.13.3) \quad e(T) := \sum_{j \geq 0} (-1)^j b_j(T).$$

Bekanntlich ist $e(\mathbb{P}_1) = e(S^2) = 2$ und $e(\mathbb{R}^n) = 1$. Die Eulercharakteristik hat für algebraische Varietäten folgende bemerkenswerte Additivitätseigenschaft für $A \hookrightarrow X$ (vgl. den Beweis von 13.9):

$$(10.13.4) \quad e(X \setminus A) = e(X) - e(A).$$

Wir werden für beliebige torische Varietäten in 13.4 deren Eulercharakteristik als die Anzahl der Fixpunkte, i.e., als die Anzahl der volldimensionalen Kegel in Δ identifizieren; für eine vollständige Fläche X_Δ gilt also $e(X_\Delta) = k$, was mit (10.13.4) und der Homotopieinvarianz der Eulercharakteristik unmittelbar zu verifizieren ist: Für \mathbb{P}_2 und Σ_a gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_2 &= \mathbb{C}^2 \cup \mathbb{P}_1 \Rightarrow e(\mathbb{P}_2) = 1 + 2 = 3 \\ \Sigma_a &= \mathbb{C} \times \mathbb{P}_1 \cup \{\infty\} \times \mathbb{P}_1 \Rightarrow e(\Sigma_a) = 2 + 2 = 4. \end{aligned}$$

Bezeichnet \widehat{X} die Aufblasung einer Fläche X in einem regulären Punkt x , so folgt mit Hilfe der exzeptionellen Kurve $E \cong \mathbb{P}_1$:

$$(10.13.5) \quad e(\widehat{X}) = e(\widehat{X} \setminus E) + e(E) = e(X \setminus x) + e(\mathbb{P}_1) = e(X) - e(x) + 2 = e(X) + 1.$$

rationale 2-Form auf X_Δ definiert. Für \mathbb{P}_2 (vgl. [GrHa, Seite 146]) ist der in Figur 10.7 durch den dualen Graphen charakterisierte Divisor kanonisch; entsprechendes gilt für Σ_a . — Dem Aufblasen eines Punktes einer regulären Fläche mit exzeptioneller Kurve E entspricht auf der Ebene kanonischer Divisoren neben dem Hochheben eines gegebenen kanonischen Divisors das Hinzufügen von $-E$; vgl. [GrHa, Lemma Seite 187]. Gemäß Figur 10.8 ist daher unsere Definition von K zulässig.

Ansichts 10.2 ist damit die Behauptung für X_Δ bewiesen.

Die Invariante $e(X_\Delta) + K_{X_\Delta}^2$ ist also nach (10.13.2) und (10.13.5) unter Aufblasungen invariant, und Einsetzen ergibt nach (10.13.1)

$$e(X_\Delta) + K_{X_\Delta}^2 = k - \sum_{j=1}^k a_j + 2k = 3k - \sum_{j=1}^k a_j = 12.$$

Die **Noetherformel** (nach Max Noether) der algebraischen Geometrie

$$(10.13.6) \quad \chi(X, \mathcal{O}) = \frac{1}{12}(K_X^2 + e(X))$$

ist damit für $X = X_\Delta$ bewiesen, denn die holomorphe Eulercharakteristik

$$\chi(X, \mathcal{O}) = \sum_j (-1)^j \dim_{\mathbb{C}} H^j(X, \mathcal{O})$$

ist 1, weil X rational ist: Nach [SaWa] ist $\chi(X, \mathcal{O})$ eine birationale Invariante, so daß es genügt, sie für $X = \mathbb{P}_2$ zu berechnen. Dazu sei etwa auf [KpKp, E 74f] verwiesen.

Wir wollen schließlich für die durch einen regulären Fächerzahlenzyklus (a_1, \dots, a_k) gegebene vollständige reguläre Fläche X_Δ die Homologie (und damit den noch später einzuführenden Chowring) bestimmen. Aus 10.12 und 10.13 ergibt sich zunächst die „Schnittmatrix“ $(C_i \cdot C_j)_{i,j=1,\dots,k}$ für die Primdivisoren C_1, \dots, C_k zu einem assoziierten regulären Fächerzyklus (v_1, \dots, v_k) :

$$(10.14.1) \quad \begin{pmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & -a_2 & 1 & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & 1 & -a_{k-1} & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & -a_k \end{pmatrix}$$

Sie spielt für die Homologie eine fundamentale Rolle, da die (einfach wieder mit C_j bezeichneten) Homologieklassen der Primdivisoren C_j in $H_2(X_\Delta; \mathbb{Z})$ diese Gruppe und damit die gesamte nichttriviale Homologie erzeugen:

10.14 Satz Die Homologie $H_\bullet(X_\Delta; \mathbb{Z})$ ist eine freie abelsche Gruppe mit den Rängen

$$b_j(X_\Delta) = \begin{cases} 0, & j \neq 0, 2, 4 \\ 1, & j = 0, 4 \\ k-2, & j = 2. \end{cases}$$

Dabei wird $H_2(X_\Delta; \mathbb{Z})$ von Primdivisoren C_j erzeugt.

Beweis Aus Dimensionsgründen reicht es, die Werte $j = 0, \dots, 4$ zu betrachten. Da X_Δ zusammenhängend, kompakt und orientierbar ist, gilt $H_j(X_\Delta; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ für $j = 0, 4$. Andererseits ist X_Δ nach 12.7 einfach zusammenhängend und daher $H_1(X_\Delta; \mathbb{Z}) = 0$. Weiter gilt für jede abelsche Gruppe G wegen der Poincarédualität (9.20,1) und dem (zu 9.15 analogen) Universellen Koeffiziententheorem der Homologie

$$H^3(X_\Delta; G) \cong H_1(X_\Delta; G) \cong H_1(X_\Delta; \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} G = 0.$$

Daraus folgt mit dem Universellen Koeffiziententheorem der Kohomologie 10.15, wenn man für G die Gruppe \mathbb{Z} und die Torsionsgruppe von $H_\bullet(X_\Delta; \mathbb{Z})$ wählt, einerseits das Verschwinden von $H_3(X_\Delta; \mathbb{Z})$, andererseits aber auch, daß $H_2(X_\Delta; \mathbb{Z})$ eine freie abelsche Gruppe ist. — Es bleibt also die zweite Bettizahl zu bestimmen. Nach dem Voranstehenden ist $b_2(X_\Delta) = e(X_\Delta) - 2$. Aus 13.4 ergibt sich $e(X_\Delta) = k$ und damit $b_2(X_\Delta) = k - 2$.

Die Wahl expliziter Erzeugender geschieht in drei Schritten:

a) Es sei $X_\Delta = \mathbb{P}_2$: Betrachten wir etwa $C_1 \cong \mathbb{P}_1$, dann ist $\mathbb{P}_2 \setminus C_1 \cong \mathbb{C}^2$. Die exakte Homologiesequenz (9.11.2) mit ganzzahligen Koeffizienten liefert

$$0 = H_3^{\text{cld}}(\mathbb{P}_2 \setminus C_1) \rightarrow H_2(C_1) \rightarrow H_2(\mathbb{P}_2) \rightarrow H_2^{\text{cld}}(\mathbb{P}_2 \setminus C_1) = 0,$$

also wird $\mathbb{Z} \cong H_2(\mathbb{P}_2; \mathbb{Z})$ von der Klasse C_1 erzeugt.

b) Es sei $X_\Delta = \Sigma_a$: Betrachten wir in der Darstellung vom Anfang des § 10 die Klassen C_1 und C_2 ; sie entsprechen einer Faser und dem Nullschnitt des \mathbb{P}_1 -Bündels Σ_a über \mathbb{P}_1 . Als Selbstschnittzahlen haben wir $C_1^2 = 0$, da alle Fasern homolog sind und man damit C_1^2 als Schnitt zweier verschiedener und damit disjunkter Fasern berechnen kann, sowie $C_2^2 = -a$. Damit sind die Homologieklassen C_1 und C_2 in $H_2(X_\Delta; \mathbb{Z})$ linear unabhängig, denn aus $0 = \alpha C_1 + \beta C_2$ folgt

$$0 = \alpha C_1 \cdot C_1 + \beta C_2 \cdot C_1 = 0 + \beta$$

und somit auch $\alpha = 0$, weil $H_2(\Sigma_a; \mathbb{Z})$ frei ist. Daher genügt es zu zeigen, daß beide Klassen je einen direkten Summanden von $H_2(X_\Delta; \mathbb{Z})$ erzeugen. Einerseits gilt

$$\Sigma_a \setminus C_1 \cong \mathbb{C} \times \mathbb{P}_1 \simeq \mathbb{P}_1;$$

auf Grund der Poincarédualität (9.20,1) ist damit

$$H_j^{\text{cld}}(\mathbb{C} \times \mathbb{P}_1) \cong H^{4-j}(\mathbb{C} \times \mathbb{P}_1) \cong H^{4-j}(\mathbb{P}_1).$$

Andererseits ist auch $\Sigma_a \setminus C_2$ als Geradenbündel über C_4 zu $\mathbb{P}_1 \cong C_4$ homotop. Damit existieren spaltende exakte Sequenzen mit ganzzahligen Koeffizienten

$$0 = H_3^{\text{cld}}(\Sigma_a \setminus C_i) \rightarrow H_2(C_i) \rightarrow H_2(\Sigma_a) \rightarrow H_2^{\text{cld}}(\Sigma_a \setminus C_i) \cong \mathbb{Z}$$

für $i = 1, 2$.

c) Wenn die vollständige Fläche $X_{\Delta'}$ aus der glatten Fläche X_{Δ} durch einmaliges Aufblasen eines Fixpunktes x_{σ} entsteht und $E = C_j$ die exzeptionelle Kurve bezeichnet, so ist $H_2(X_{\Delta'}; \mathbb{Z})$ die freie abelsche Gruppe $H_2(X_{\Delta}; \mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z} \cdot E$. Angesichts 10.2 erhält man daher mit Ausnahme von a) den allgemeinen Fall induktiv aus b).

Zum Beweise benutzen wir folgendes allgemeine Argument (vgl. etwa [KpWe, § 1]): Jede exakte kommutative Leiter von R -Moduln

$$\begin{array}{cccccccc} \dots & \rightarrow & C_{j+1} & \rightarrow & A_j & \rightarrow & B_j & \rightarrow & C_j & \rightarrow & A_{j-1} & \rightarrow & \dots \\ & & \downarrow \cong & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \cong & & \downarrow & & \\ \dots & \rightarrow & C'_{j+1} & \rightarrow & A'_j & \rightarrow & B'_j & \rightarrow & C'_j & \rightarrow & A'_{j-1} & \rightarrow & \dots \end{array}$$

induziert kanonisch eine exakte „Mayer-Vietoris-Sequenz“

$$\dots \rightarrow B'_{j+1} \rightarrow A_j \rightarrow A'_j \oplus B_j \rightarrow B'_j \rightarrow A_{j-1} \rightarrow \dots$$

Wenden wir dies auf den Morphismus $\varphi_*: (X_{\Delta'}, E) \rightarrow (X_{\Delta}, x_{\sigma})$ und die zugehörige Homologieleiter an, so ergibt sich damit wegen

$$H_{\bullet}(X_{\Delta'}, E) \cong H_{\bullet}^{\text{cld}}(X_{\Delta'} \setminus E) = H_{\bullet}^{\text{cld}}(X_{\Delta} \setminus x_{\sigma}) \cong H_{\bullet}(X_{\Delta}, x_{\sigma})$$

eine spaltende exakte Sequenz mit ganzzahligen Koeffizienten

$$0 = H_3(X_{\Delta}) \rightarrow H_2(E) \rightarrow H_2(x_{\sigma}) \oplus H_2(X_{\Delta'}) \rightarrow H_2(X_{\Delta}) \rightarrow H_1(E) = 0. \blacksquare$$

Im Beweis haben wir von folgendem Standardresultat der algebraischen Topologie Gebrauch gemacht:

10.15 Universelles Koeffiziententheorem der Kohomologie *Es seien R ein Hauptidealbereich, G ein R -Modul sowie X eine torische Varietät. Dann existiert für jedes j eine exakte Sequenz*

$$(10.15.1) \quad 0 \rightarrow \text{Ext}(H_{j-1}(X_{\Delta}; R), G) \rightarrow H^j(X_{\Delta}, G) \rightarrow \text{Hom}(H_j(X_{\Delta}; R), G) \rightarrow 0.$$

Statt einer Definition oder einer Interpretation als Modul der Erweiterungen von G' mit G , vgl. etwa [HiWy, 5.9 Appendix 2], für den R -Modul $\text{Ext}(G, G')$, den wir vor allem im Fall seines Verschwindens benötigen, geben wir auch hier nur einige Eigenschaften an:

- $\text{Ext}(G, G') = 0$ falls G frei oder G' divisibel ist.
- Der Ext-Modul ist (bezüglich endlicher Summen) additiv.
- Für $R = \mathbb{Z}$, $p \geq 1$ und $q \geq 0$ ist $\text{Ext}(\mathbb{Z}/(p), \mathbb{Z}/(q)) = \mathbb{Z}/(\text{ggT}(p, q))$.

Ein Beweis findet sich etwa in [Br, V.11.10]. \blacksquare

Aufgabe 10.8 Es bezeichne σ den dreidimensionalen Kegel mit viereckiger Basis aus Beispiel 3.11. Man gebe das Schnittverhalten der irreduziblen invarianten Untervarietäten von X_{σ} an.

11. Die Auflösung von torischen Singularitäten

In diesem Paragraphen konstruieren wir für jeden zweidimensionalen Fächer Δ einen Fächermorphismus $\varphi: \tilde{\Delta} \rightarrow \Delta$, wobei $\tilde{\Delta}$ eine „reguläre“ Unterteilung von Δ ist, die Δ_{reg} ungeändert läßt. Dazu gehört eine „Auflösung von Singularitäten“

$$\varphi_*: X_{\tilde{\Delta}} \rightarrow X_{\Delta} .$$

Während wir bei der Bildung von Quotienten unter Beibehaltung der Fächerkegel das Gitter verfeinert haben, werden wir für die Singularitätenauflösung unter Beibehaltung des Gitters die Kegel verfeinern, also unterteilen.

Man nennt einen eigentlichen Morphismus $\psi: X' \rightarrow X$ algebraischer Varietäten eine „eigentliche Modifikation“, wenn für ein dichtes $U \subseteq X$ die Einschränkung

$$\psi|_{\psi^{-1}(U)}: \psi^{-1}(U) \rightarrow U$$

ein Isomorphismus ist. Ist ψ zusätzlich ein torischer Morphismus, so nennen wir die Modifikation ψ „torisch“.

11.1 Definition Eine (torische) eigentliche Modifikation $\psi: X_{\Delta'} \rightarrow X_{\Delta}$ heißt „(torische) Auflösung der Singularitäten von X_{Δ} “, oder einfach „(torische) Auflösung von X_{Δ} “, wenn

- a) $X_{\Delta'}$ regulär und
- b) $\psi|_{\psi^{-1}(X_{\Delta_{\text{reg}}})}: \psi^{-1}(X_{\Delta_{\text{reg}}}) \rightarrow X_{\Delta_{\text{reg}}}$ ein Isomorphismus ist.
- 2) Eine Fächerunterteilung $\varphi: (N, \Delta') \rightarrow (N, \Delta)$ heie eine „Auflösung von Δ “, wenn Δ' regulär und $\varphi|_{\varphi^{-1}(\Delta_{\text{reg}})}: \varphi^{-1}(\Delta_{\text{reg}}) \rightarrow \Delta_{\text{reg}}$ ein Fächerisomorphismus ist.
- 3) Eine Auflösung $\Delta' \rightarrow \Delta$ heie „minimal“, wenn das Weglassen auch nur einer Kegelunterteilung in Δ' zu einem nicht mehr regulären Fächer führt.

Wir sind zunächst am Flächenfall interessiert. Er ist besonders einfach, da Singularitäten höchstens in Fixpunkten vorliegen, so daß man für die Auflösung alle 2-Kegel separat behandeln kann:

11.2 Satz Jeder zweidimensionale N -Fächer Δ besitzt eine (bis auf Isomorphie) eindeutige minimale Auflösung

$$\varphi: (N, \Delta') \rightarrow (N, \Delta) .$$

Entsprechend ist $\varphi_*: X_{\Delta'} \rightarrow X_{\Delta}$ eine minimale torische Singularitätenauflösung.

Beweis Es genügt, jeden Kegel $\sigma = \text{keg}(v_1, v_2) \in \Delta^2$ einzeln in endlich viele reguläre Teilkegel zu unterteilen. Dabei werde σ nur dann unterteilt, wenn σ nicht regulär ist, also zu jedem möglichen Teilungsvektor v notwendig eine Gleichung $v_1 + v_2 = av$ mit $a \geq 2$ gehört. Dann hat die zu v gehörige exzeptionelle Kurve $\mathbb{V}_{\text{keg}(v)}$ in der Auflösung nach 10.13 die Selbstschnittzahl $-a \neq -1$, und die Auflösung von X_Δ ist in der Tat minimal.¹³⁾

Wir führen den Nachweis der regulären Unterteilbarkeit von σ durch Induktion über die „Multiplizität“

$$\lambda := \det \sigma = \det(v_1, v_2)$$

von σ : Für $\lambda = 1$ ist σ regulär, es sei also $\lambda \geq 2$. Nach 9.1 existiert dann in einer geeigneten Basis (e_1, e_2) von N ein $\kappa \in \mathbb{N}$ mit

$$(11.2.1) \quad v_1 = \lambda e_1 - \kappa e_2, \quad 0 < \kappa < \lambda, \quad \text{ggT}(\kappa, \lambda) = 1 \quad \text{und} \quad v_2 = e_2.$$

Der Vektor $w_1 := e_1$ liefert eine Unterteilung von $\text{keg}(v_1, v_2)$ in einen regulären Kegel $\text{keg}(e_1, e_2)$ und einen „kritischen“ Kegel $\sigma' := \text{keg}(\lambda e_1 - \kappa e_2, e_1)$ mit Multiplizität $\det \sigma' = \kappa < \lambda$. Daher ist σ' nach Induktionsvoraussetzung in endlich viele reguläre Kegel mit neuen Kanten w_2, \dots, w_ℓ zerlegbar. Es sei noch vermerkt, daß dabei die Reihenfolge $w_{\ell+1} := v_1, w_\ell, \dots, w_1 := v_2$ positiv orientiert ist.

Nun ist die Minimalität nachzuweisen, daß also das Weglassen von Teilungsvektoren w_j stets zu singulären Teilkegeln führt. Es genügt, dies für aufeinanderfolgende Vektoren w_j, \dots, w_{j+i} mit $i \geq 0$ und $2 \leq j \leq \ell - i$ zu verifizieren. Nach Konstruktion der Unterteilung sei ohne Einschränkung $w_{j-1} = e_2$; es ist also zu zeigen, daß $\text{keg}(v, e_2)$ mit $v := w_{j+i+1}$ singulär ist. Aus $v_1 = \lambda e_1 - \kappa e_2$ für $\kappa < \lambda$ ergibt sich, daß der Winkel $\sphericalangle(v_1, e_2)$ kleiner als 45° ist. Die Regularität von $\text{keg}(v, e_2)$ würde eine Darstellung $v = e_1 - \mu e_2$ mit $\mu \geq 1$ implizieren. Also müßte der Teilwinkel $\sphericalangle(v, e_2)$ mindestens 45° sein, ein Widerspruch.

Für die Eindeutigkeit reicht der Nachweis, daß der Vektor e_1 bei der gewählten Darstellung von σ notwendig als erster Teilungsvektor v' auftritt; rekursiv folgt daraus die Behauptung. Zunächst kann v' nicht im Innern des vierten Quadranten liegen, da jeder Vektor $v' = \lambda' e_1 - \kappa' e_2$ mit $1 \leq \kappa' < \lambda'$ mit e_2 einen singulären Kegel bildet. Liegt v' im Innern des ersten Quadranten, so existiert ein regulärer Kegel $\tau := \text{keg}(w_1, w_2)$, wobei w_1 in σ , w_2 im Innern von $\text{keg}(e_1, e_2)$ und e_1 in τ liegt. Nach Hilfssatz 10.3 darf e_2 nicht im Innern von $\text{keg}(w_2, -w_1)$ liegen, obwohl es das offensichtlich tut! ■

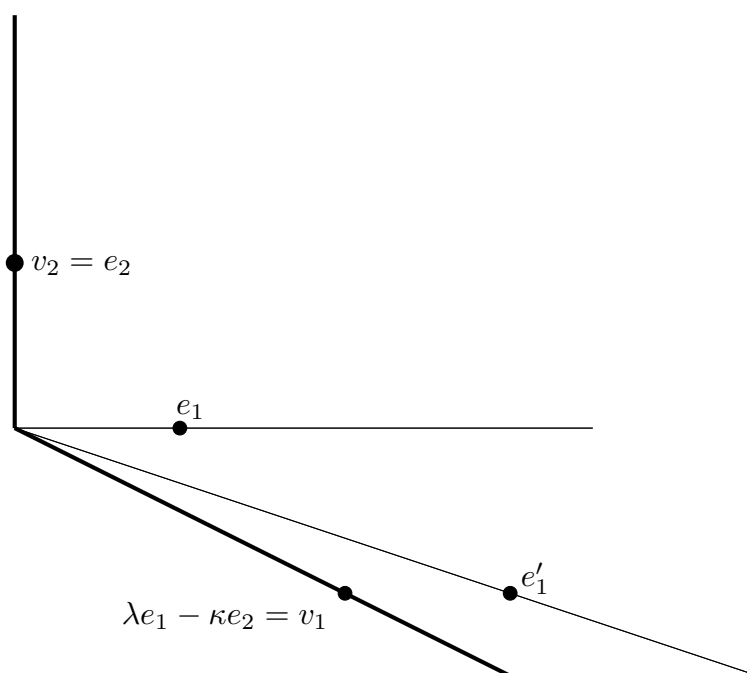
11.3 Beispiel Es seien $v_1 := 3e_1 - 2e_2$ und $v_2 := e_2$. Durch Hinzunahme der Vektoren e_1 und $2e_1 - e_2$ erhält man eine Auflösung

$$\mathfrak{S}(\text{keg}(3e_1 - 2e_2, 2e_1 - e_2), \text{keg}(2e_1 - e_2, e_1), \text{keg}(e_1, e_2)) \quad \text{von} \quad \mathfrak{S}(\text{keg}(v_1, v_2)) \quad . \blacksquare$$

¹³⁾ Dies ist ein Spezialfall der allgemeinen Tatsache der Algebraischen Geometrie, daß in glatten Flächen genau die Kurven mit Selbstschnittzahl -1 (regulär) zusammenziehbar sind.

Wir wollen als nächstes aus dem Existenzbeweis von 11.2 ein *rekursives Verfahren* zur Bestimmung der Anzahl der erforderlichen Teilungsvektoren und der zugehörigen Selbstschnittzahlen für jeden einzelnen singulären Kegel ableiten; damit kann man im vollständigen Fall den regulären Fächerzahlenzyklus zu Δ' aus dem von Δ rekursiv berechnen.

Wir gehen von einem Kegel $\sigma = \text{keg}(v_1, v_2)$ wie in (11.2.1) aus; dabei sei $\kappa \geq 2$, da der kritische Kegel sonst regulär ist. Die typische Situation ist in Figur 11.1 angedeutet.¹⁴⁾ Für den kritischen Teilkegel σ' ist wiederum eine Basis (e'_1, e'_2) von N wie in (11.2.1) zu finden und dann die Vielfachheit a_1 des Teilungsvektors e_1 für den Kegel $\text{keg}(e'_1, e_2)$ zu bestimmen.



FIGUR 11.1 Reguläre Unterteilung von $\text{keg}(v_1, v_2)$

Rotation um 90° gibt zunächst eine neue Basis $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2) := (-e_2, e_1)$. Definieren wir dann $a_1, r \in \mathbb{N}$ mit $r < \kappa$ durch $\lambda := (a_1 - 1)\kappa + r$, so ist $a_1 \geq 2$ und $r > 0$, da κ und λ teilerfremd sind; wir haben also

$$0 < \kappa - r = \kappa a_1 - \lambda < \kappa \quad \text{und} \quad \text{ggT}(\kappa a_1 - \lambda, \kappa) = 1.$$

Damit ist a_1 die obere Gaußklammer $\lceil \lambda/\kappa \rceil$, die für $p/q \in \mathbb{Q}$ durch

$$\lceil p/q \rceil := \min\{a \in \mathbb{Z}; a \geq p/q\}$$

¹⁴⁾ Wenn nur eine Unterteilung für die Regularisierung erforderlich ist, ergibt sich die Berechnung bereits aus dem Beginn des Beweises von 11.2.

definiert ist. — Es kommt nun die Scherung

$$e'_1 := \tilde{e}_1 + a_1 \tilde{e}_2, \quad e'_2 := \tilde{e}_2$$

als weitere Basistransformation hinzu. Dann ist

$$v_1 = \kappa(e'_1 - a_1 e'_2) + \lambda e'_2 = \kappa e'_1 - (\kappa a_1 - \lambda) e'_2.$$

Der Teilungsvektor e'_1 von $\text{keg}(v_1, v_2)$ erzeugt einen regulären Teilkegel $\text{keg}(e'_1, e_1)$ und ist im Koordinatensystem $(e_1, e_2) = (e_1, v_2)$ durch

$$(11.2.2) \quad e'_1 = a_1 e_1 - v_2$$

gegeben. Also ist zunächst $-a_1$ in der Tat die Selbstschnittzahl der Kurve $C_1 = \mathbb{V}_{\text{keg}(e_1)}$. — Wenn $\kappa a_1 - \lambda = 1$ ist, dann bricht das Verfahren ab; andernfalls konstruiert man analog einen Teilungsvektor e''_1 etc.

Die gesuchte rekursive Konstruktion aller auftretenden a_j verwendet nun „modifizierte¹⁵⁾ Kettenbrüche“. Zunächst ist

$$\frac{\lambda}{\kappa} = a_1 - \frac{a_1 \kappa - \lambda}{\kappa} = a_1 - \frac{1}{\frac{\kappa}{a_1 \kappa - \lambda}}.$$

Dabei ist $\kappa/(a_1 \kappa - \lambda)$ genau dann ganzzahlig, wenn $a_1 \kappa - \lambda$ den Wert 1 annimmt; in diesem Falle bricht das Verfahren ab. Andernfalls ist $a_2 := \lceil \frac{\kappa}{a_1 \kappa - \lambda} \rceil \geq 2$, und man fährt damit fort:

$$\frac{\lambda}{\kappa} = a_1 - \frac{1}{a_2 - \frac{1}{(\dots)}}$$

etc. Auf diese Weise erhält man den „Hirzebruch-Jung-Kettenbruch“

$$(11.2.3) \quad \frac{\lambda}{\kappa} = a_1 - \frac{1}{\left\lfloor a_2 \right\rfloor} - \frac{1}{\left\lfloor \dots \right\rfloor} - \frac{1}{\left\lfloor a_\ell \right\rfloor}$$

mit eindeutig bestimmten $a_j \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und $\ell \leq \lambda - 1$, aus dem man die Anzahl und den Wert der gesuchten a_j ablesen kann.

Fassen wir zusammen:

11.4 Satz *In einer Basis (e_1, e_2) von N sei $\sigma := \text{keg}(v_1, v_2)$ mit*

$$v_1 = \lambda e_1 - \kappa e_2, \quad 0 < \kappa < \lambda, \quad \text{ggT}(\kappa, \lambda) = 1 \quad \text{und} \quad v_2 = e_2$$

und der zugehörigen Kettenbruchentwicklung

$$\frac{\lambda}{\kappa} = a_1 - \frac{1}{\left\lfloor a_2 \right\rfloor} - \frac{1}{\left\lfloor \dots \right\rfloor} - \frac{1}{\left\lfloor a_\ell \right\rfloor}.$$

¹⁵⁾ In [Pe] werden aufsteigende Kettenbrüche verwendet; die modifizierten absteigenden haben den Vorteil einer eindeutigen Darstellung.

Dann besitzt σ eine reguläre Unterteilung mit Vektoren $w_0 := v_1, \dots, w_{\ell+1} := v_2$, welche für $j = 1, \dots, \ell$ die Beziehung $w_{j-1} + w_{j+1} = a_j w_j$ erfüllen. ■

11.5 Beispiele 0) Für den in 11.3 betrachteten Kegel $\text{keg}(3e_1 - 2e_2, e_2)$ ist der zugehörige Kettenbruch $3/2 = 2 - 1/2$, daher werden zwei Teilungsvektoren benötigt mit Selbstschnittzahlen 2 für die exceptionellen Kurven.

- 1) Für $\kappa = 1$ gibt es genau eine exceptionelle Kurve in der minimalen Auflösung; ihre Selbstschnittzahl ist $-\lambda$.
- 2) Der Vektor v_1 liege auf der Geraden durch e_2 und e_1 . Dann gibt es $\lambda - 1$ exceptionelle Kurven C_j , und alle a_j sind 2.¹⁶⁾

Beweis 1) Für $\kappa = 1$ ist der bei der ersten Unterteilung auftretende kritische Kegel $\text{keg}(\lambda e_1 - e_2, e_1)$ regulär, und aus $\lambda e_1 = (\lambda e_1 - e_2) + e_2$ ergibt sich die Selbstschnittzahl von $\mathbb{V}_{\text{keg}(e_1)}$.

2) Die Voraussetzung bedeutet gerade $\kappa = \lambda - 1$. Aus $\lambda = (a_1 - 1)(\lambda - 1) + r$ mit $r < \lambda - 1$ folgt $a_1 = 2$. Beim nächsten Schritt ist der Vektor

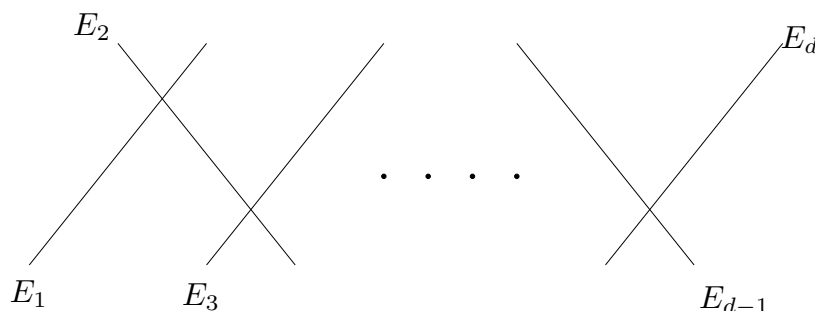
$$\kappa e'_1 - (\kappa a_1 - \lambda) e'_2 = (\lambda - 1) e'_1 - (\lambda - 2) e'_2$$

weiterzubehandeln. Damit folgt die Behauptung induktiv. ■

11.6 Korollar Zum Keim $(X_\sigma)_{x_\sigma}$ im Fixpunkt x_σ des Kegels σ aus 11.4 existiert eine minimale Singularitätenauflösung φ_* , deren exceptioneller Divisor

$$\varphi_*^{-1}(x_\sigma) = : E_1 \cup \dots \cup E_\ell$$

einen zusammenhängenden linearen Graphen (Baum) mit Komponenten $E_j \cong \mathbb{P}_1$ und Selbstschnittzahlen $-a_j \leq -2$ bildet, vgl. Figur 11.2.



FIGUR 11.2 Graph der minimalen Auflösung einer torischen Flächensingularität.

¹⁶⁾ In der Singularitätenklassifikation spricht man von einem rationalen Doppelpunkt der Klasse $A_{\lambda-1}$.

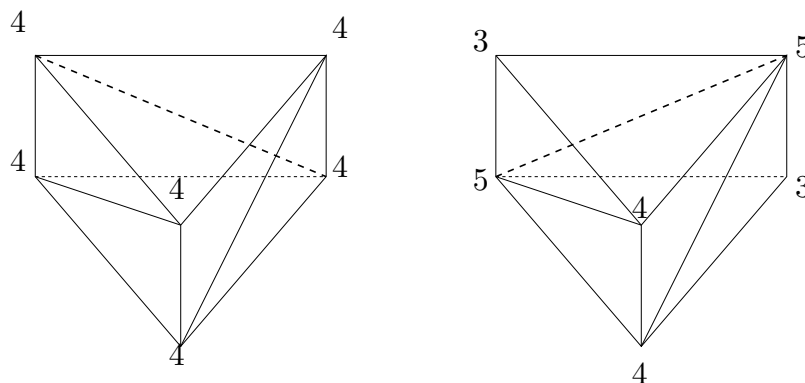
Beweis Der exzeptionelle Divisor ist der zu den Vektoren w_1, \dots, w_ℓ gehörige Teil des Graphen zum Divisor von $-K_{X_\sigma}$ aus § 10; dessen Schnittverhalten wurde in (10.14.1) analysiert. ■

Aufgabe 11.1 Man zeige für $\sigma = \text{keg}(\lambda e_1 - \kappa e_2, e_2)$ mit $0 < \kappa < \lambda$ und $\text{ggT}(\kappa, \lambda) = 1$, daß die im rekursiven Verfahren konstruierten regulären Unterteilungsvektoren w_1, \dots, w_ℓ genau die Gitterpunkte auf dem Randstreckenzug von e_2 nach $\lambda e_1 - \kappa e_2$ der konvexen Hülle von $N \cap (\sigma \setminus \{0\})$ sind.

Aufgabe 11.2 Man zeige: Der minimale Auflösungsgraph der Singularität im Nullpunkt der Fläche $V(\mathbb{C}^3; T_3^\lambda - T_1 T_2)$ ist ein Baum aus $\lambda - 1$ Kurven \mathbb{P}_1 mit Selbstschnittzahl -2 .

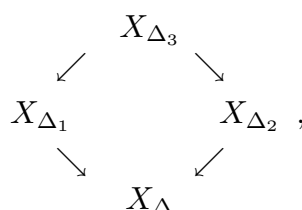
Wir wollen nun zeigen, daß jeder Fächer Δ beliebiger Dimension eine reguläre Unterteilung Δ' besitzt. Anders als im zweidimensionalen Fall kann man allerdings keine kombinatorische Eindeutigkeit für minimale Unterteilungen erreichen.

Wir beginnen mit dem Beispiel eines dreidimensionalen Kegels, der zwei verschiedene, aber gleichwertige reguläre Unterteilungen besitzt. Durch das Umfeld des Kegels in einem größeren Fächer können diese Unterteilungen aber zu kombinatorisch inäquivalenten Fächerunterteilungen führen, vgl. Figur 11.3, in der nur eine der beiden Unterteilungen zum Stern einer Ecke mit 5 Kanten führt.



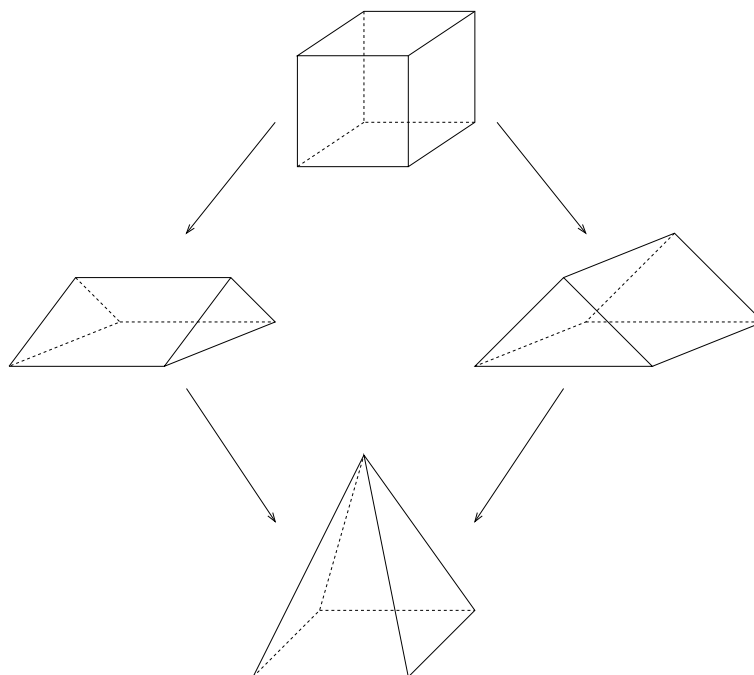
FIGUR 11.3 Inäquivalente Auflösungen im \mathbb{R}^3

11.7 Beispiel In $\mathbb{Z}^3 \subset \mathbb{R}^3$ seien v_1, v_2, v_3 eine \mathbb{Z} -Gitterbasis und $v_4 := v_1 - v_2 + v_3$. Dann spannen je drei der v_j einen Teilkegel $\sigma_i := \text{keg}(\{v_j; j \neq i\})$ von $\sigma := \text{keg}(v_1, v_2, v_3, v_4)$ auf. Man setze $\Delta := \mathfrak{S}(\sigma)$, $\Delta_1 := \mathfrak{S}(\sigma_2, \sigma_4)$, $\Delta_2 := \mathfrak{S}(\sigma_1, \sigma_3)$. Die gemeinsame Verfeinerung $\Delta_3 := \Delta_1 \cup \Delta_2$ enthält als neue Kante $\text{keg}(v_0)$ mit $v_0 := v_1 + v_3$. Zu den Fächermorphismen der Unterteilungen gehört ein kommutatives Diagramm torischer Varietäten



das drei Auflösungen der Singularitäten von X_Δ liefert; ersichtlich ist zwar X_{Δ_3} keine minimale Auflösung, aber X_{Δ_1} und X_{Δ_2} sind inäquivalente minimale Auflösungen.

Geometrisch läßt sich die Situation wie folgt interpretieren (vgl. Figur 11.4): X_σ ist von der Form $V(\mathbb{C}^4; T_1T_3 - T_2T_4)$, also ein affiner Teil des Kegels über der (zu $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ isomorphen) glatten Quadrik im \mathbb{P}_3 . Der Fixpunkt von X_σ läßt sich auf zwei verschiedene Weisen durch einen \mathbb{P}_1 ersetzen; diese beiden Singularitätenauflösungen werden von einer weiteren dominiert, die zusätzlichen einen invarianten Divisor $\mathbb{V}_{\text{keg}(v_0)}$ enthält. ■



FIGUR 11.4 Auflösung eines affinen quadratischen Kegels

Aufgabe 11.3 Es bezeichne W den Einheitswürfel $\text{conv}(v_{\pm\pm\pm})$ mit $v_{\pm} := (\pm 1, \pm 1, \pm 1) \in \mathbb{R}^3$. Man zeige, wie sich X_{Δ^W} aus dem \mathbb{P}_3 durch Aufblasen und Kontrahieren gewinnen läßt.

Die Desingularisierung eines Fächers Δ geschieht nun in zwei Schritten: Zunächst konstruiert man eine „simpliciale Auflösung“ $\Delta' \rightarrow \Delta$ durch eine simpliciale Unterteilung von Δ , wobei keine neuen Kanten erforderlich sind, und dann verschafft man sich zum simplicialen Fächer Δ' eine „kohärente“ Regularisierung. Bei beiden Schritten werden reguläre Kegel des Fächers nicht tangiert.

A. Die simpliciale Auflösung eines beliebigen Fächers

Ziel dieses Abschnittes ist das folgende Ergebnis:

11.8 Satz *Zu jedem Fächer Δ existiert eine Unterteilung $\Delta' \rightarrow \Delta$ ohne zusätzliche Kanten, bei der Δ' simplicial ist.*

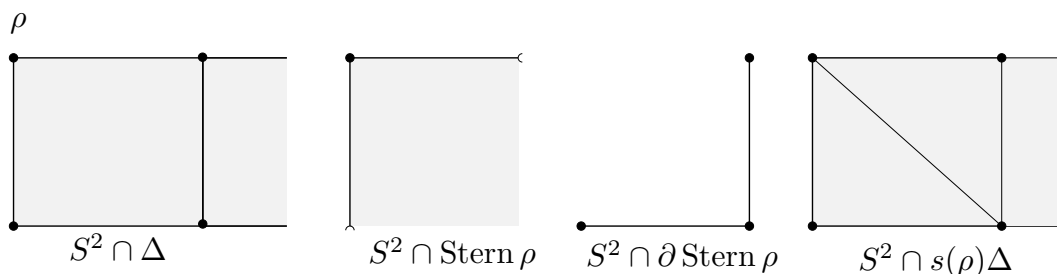
Um ein zu starkes Rekurrenieren auf die Anschauung zu vermeiden, werden wir den Beweis mit Hilfe eines Spezialfalles der Technik „stellarer Unterteilungen“ führen; für die allgemeine Theorie sei auf [Ew, III.2] verwiesen.

11.9 Definition Für eine Kante $\rho \in \Delta^1$ heißt der Fächer

$$s(\rho)\Delta := (\Delta \setminus \text{Stern}(\rho)) \cup (\rho + \partial \text{Stern}(\rho))$$

die „stellare Unterteilung“ des Fächers Δ bezüglich ρ .

Mit dem Randfächer $\partial \text{Stern}(\rho)$ trägt ersichtlich ebenfalls die Minkowskisumme $\rho + \partial \text{Stern}(\rho)$ und damit $s(\rho)\Delta$ eine natürliche Fächerstruktur. Die Kanten von Δ bleiben bei dieser stellaren Unterteilung unverändert; auch jeder simpliziale Kegel von Δ wird von dieser Operation nicht berührt. Anders ist die Situation, falls nichtsimpliciale Kegel vorliegen, vgl. Figur 11.5, wo der Einfachheit halber $S^2 \cap \Delta$ dargestellt wird.



FIGUR 11.5 Stellare Unterteilung von $\Delta \cap S^2$

Der Beweis von 11.8 ergibt sich unmittelbar aus folgendem Resultat:

11.10 Lemma Es seien ρ_1, \dots, ρ_k die Kanten des Fächers Δ und $\Delta_j := s(\rho_j)\Delta_{j-1}$ für $j = 1, \dots, k$, so ist Δ_k eine simpliziale Unterteilung von Δ mit $|\Delta_k| = |\Delta|$ und $\Delta_k^1 = \Delta^1$.

Beweis Zu zeigen ist nur, daß Δ_k simplizial ist. Ist dies nicht der Fall, so existiert ein nichtsimplicialer Kegel $\sigma \in \Delta_k$. Dieser enthält zwei Kanten ρ_i, ρ_j , für die $\text{konv}(\rho_i, \rho_j)$ keine Seite von σ ist, obwohl ρ_j in $\partial \text{Stern}(\rho_i)$ liegt und daher $\text{konv}(\rho_i, \rho_j)$ nach Konstruktion ein Kegel in $s(\rho_i)\Delta_{i-1}$ ist und damit als neue Seite in Δ_i auftritt! ■

B. Reguläre Unterteilungen eines simplizialen Fächers

Bei der Regularisierung eines simplizialen Fächers haben wir schon im zweidimensionalen Fall gesehen, daß man in der Regel auf die Einführung neuer Kanten nicht verzichten kann.

11.11 Satz Jeder simpliziale Fächer Δ besitzt eine reguläre Unterteilung Δ' , bei der Δ_{reg} ungeändert bleibt.

Für einen induktiven Beweis haben wir ein Maß für die Nicht-Regularität eines d -dimensionalen simplizialen Kegels $\sigma = \text{keg}(v_1, \dots, v_d)$ mit primitiven Erzeugenden $v_j \in N$ anzugeben. Dazu bezeichne Γ_σ das Untergitter $\sum_{i=1}^d \mathbb{Z} \cdot v_i$ von $N_\sigma = N \cap \text{lin } \sigma$. Der Index

$$m_\sigma := [N_\sigma : \Gamma_\sigma] \in \mathbb{N}$$

ist dann eine endliche Zahl, genannt die „Multiplizität des Kegels σ “. Wählt man entsprechend dem Elementarteilersatz 2.18 eine geeignete Basis von N_σ , dann ist m_σ einfach das Produkt der Elementarteiler $\varepsilon_1 \cdot \dots \cdot \varepsilon_d = |\det(v_1, \dots, v_d)|$. Insbesondere ist σ genau dann regulär, wenn m_σ den Wert 1 hat.

Die folgenden Überlegungen behandeln rekursiv den Schritt vom k -Skelett $\Delta^{\leq k}$ zu Δ^{k+1} . Da die dabei auftretenden Unterteilungen jeweils auch auf die höherdimensionalen Kegel fortgesetzt werden müssen, benötigen wir folgende Variante der stellaren Unterteilung: Für einen simplizialen Fächer Δ sei ρ ein (rationaler) Halbstrahl in $|\Delta|$. Es bezeichne $\sigma \in \Delta$ den Kegel mit $\rho^\circ \subset \sigma^\circ$. Der Rand $\partial \text{Stern}(\sigma)$ von $\text{Stern}(\sigma)$ in Δ bildet einen Unterfächer von Δ . Man ersetze ihn durch den Fächer

$$\{\text{keg}(\rho, \gamma); \gamma \in \partial \text{Stern}(\sigma)\}.$$

Damit erhält man eine Verfeinerung von Δ , genannt *stellare Unterteilung von Δ bezüglich ρ* . Der für uns wichtigste Fall ist der, daß σ volldimensional ist. Dann ist

$$s(\rho)\Delta := (\Delta \setminus \{\sigma\}) \cup (\rho + \partial\sigma)$$

die stellare Unterteilung von Δ bezüglich ρ . Dabei wird kein niederdimensionaler Kegel von Δ unterteilt.

11.12 Lemma *Zu jedem singulären simplizialen Kegel $\sigma \in \Delta^n$ mit regulärem Randfächer existiert ein Strahl $\rho = \text{keg}(v)$ im Innern von σ , so daß für alle n -Kegel γ aus $s(\rho)\mathfrak{S}(\sigma)$ gilt:*

$$m_\gamma < m_\sigma.$$

Beweis Bezüglich einer geeigneten Basis (e_1, \dots, e_n) von N hat σ eine Darstellung $\sigma = \text{keg}(e_1, \dots, e_{n-1}, v)$ mit $v = \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j$ und $\alpha_j \in \mathbb{N}$. Dabei ist $\alpha := \alpha_n \geq 2$, denn σ ist n -dimensional und singulär. Damit gilt $\alpha_j > 0$ für alle j , denn wäre etwa $\alpha_1 = 0$, so folgte aus der Regularität der Seite $\text{keg}(e_2, \dots, e_{n-1}, v)$ die Gleichung $\alpha = 1$. Nach einer unimodularen Transformation des Gitters läßt sich zudem $\alpha_j < \alpha$ für $j \leq n-1$ annehmen: Ist etwa $\alpha_1 \geq \alpha$, so setze man $e'_1 := e_1 - e_n$ und erhält

$$v = \alpha_1 e'_1 + \sum_{j=2}^{n-1} \alpha_j e_j + (\alpha + \alpha_1) e_n.$$

Rekursiv ergibt sich damit eine Darstellung der gewünschten Form

$$v = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j e_j + \alpha e_n \quad \text{mit} \quad 0 < \alpha_j < \alpha.$$

Der N -Vektor

$$w := \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j e_j + (\alpha - 1)e_n$$

liegt nun ersichtlich im Innern von σ . — Man erhält die volldimensionalen Kegel γ der stellaren Unterteilung $s(\text{keg}(w))\mathfrak{S}(\sigma)$, indem man jeweils für $j = 1, \dots, n$ die j -te Komponente von (e_1, \dots, e_{n-1}, v) durch w ersetzt. Wegen der Multilinearität der Determinantenfunktion ist für $j = n$

$$m_\gamma = |\det(e_1, \dots, e_{n-1}, w)| = \alpha - 1 < \alpha = |\det(e_1, \dots, v)| = m_\sigma .$$

Für $j \neq n$ sei ohne Einschränkung $j = n - 1$, und wir erhalten mit

$$A := \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & & & & 0 & 0 \\ & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ \hline \alpha_1 & \dots & \dots & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} & \alpha - 1 \\ \alpha_1 & \dots & \dots & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} & \alpha \end{array} \right)$$

die Beziehung

$$m_\gamma = |\det(e_1, \dots, e_{n-2}, w, v)| = \det A = \alpha_{n-1} < \alpha = m_\sigma . \blacksquare$$

Beweis von 11.11 durch Induktion über $\dim \Delta$: Zunächst ist Δ^0 regulär. Ohne Einschränkung sei durch reguläre stellare Unterteilung nur der singuläre Kegel bereits $\Delta^{\leq n-1}$ regulär geworden; man setze diese Unterteilung auf den gesamten Fächer fort. Es bezeichne wiederum Δ den dadurch aus dem Ausgangsfächer entstandenen simplizialen Fächer. Wir werden für jedes singuläre $\sigma \in \Delta^n$ eine reguläre Unterteilung konstruieren, die $\partial\sigma$ ungeändert läßt. Daher genügt es, den Fall $\Delta = \mathfrak{S}(\sigma)$ zu betrachten. Wegen $m_\sigma > 1$ existiert nach 11.12 eine simpliziale Unterteilung von σ , die den Rand nicht ändert, und für die alle n -Simplizes γ eine Multiplizität $1 \leq m_\gamma < m_\sigma$ haben. Nach endlichmaliger Wiederholung haben alle m_γ den Wert 1. ■■

Kapitel IV

Topologie und Geradenbündel

Wir gehen nun genauer auf algebraisch-topologische Invarianten torischer Varietäten ein. Wir beschreiben die Fundamentalgruppe durch Fächerdaten und geben an, wann eine torische Varietät einfach zusammenhängend ist. Außerdem gehen wir mit Hilfe von Techniken der Eulercharakteristik auf eine erste Bestimmung von Bettizahlen ein. Darauf untersuchen wir die Divisorenklassengruppen, die sich im torischen Fall durch invariante Divisoren repräsentieren lassen. Mit Hilfe von Geradenbündeln wird die Untersuchung von Cartierdivisoren wesentlich erleichtert. Schließlich charakterisieren wir über strikt konkave Trägerfunktionen die projektiv algebraischen torischen Varietäten.

12. Fundamentalgruppe

Wir beschreiben die Fundamentalgruppe torischer Varietäten in Satz 12.6 durch Fächerdaten und geben an, wann eine torische Varietät einfach zusammenhängend ist, vgl. 12.7; die erforderlichen elementaren Kenntnisse über Fundamentalgruppen kann man etwa [Gb, Part I] entnehmen.

Die Berechnung der Fundamentalgruppe einer torischen Varietät in der Zariskitopologie ist von geringem Interesse:

12.1 Beispiel In der Zariskitopologie sind algebraische Tori zusammenziehbar.

Beweis Wir führen dies exemplarisch für \mathbb{C}^* durch, haben also eine Homotopie

$$H: \mathbb{C}^* \times I \rightarrow \mathbb{C}^*, \text{ mit } H(*, 0) = \text{id}_{\mathbb{C}^*} \text{ und } H(*, 1) = 1$$

anzugeben. Dazu wähle man eine beliebige Injektion $h: \mathbb{C}^* \times]0, 1[\rightarrow \mathbb{C}^*$ ¹⁷⁾ und setze

$$H(z, t) =: \begin{cases} z, & t = 0 \\ h(z, t), & 0 < t < 1 \\ 1, & t = 1. \end{cases}$$

¹⁷⁾ Nach Cantor [1878] existiert insbesondere eine Bijektion $I \cong I^3$; aus der Umkehrabbildung erhält man h etwa durch eine Komposition

$$\mathbb{C}^* \times I \subset \mathbb{R}^2 \times I \cong (I^\circ)^2 \times I \subset (I^2 \setminus \{(0, 0)\}) \times I \subset I \setminus \text{Punkt} \subset \mathbb{C} \setminus \text{Punkt} \cong \mathbb{C}^* .$$

Zu zeigen ist nur, daß H bezüglich der Produkttopologie der Zariskitopologie von \mathbb{C}^* und der Standardtopologie von I stetig ist. Dazu sei $A \subset \mathbb{C}^*$ Zariski-abgeschlossen – ohne Einschränkung sei A zusammenhängend und nicht \mathbb{C}^* , also $A = \{a\}$. Dann ist

$$H^{-1}(a) = \{a\} \times \{0\} \cup h^{-1}(a) \cup \begin{cases} \mathbb{C}^* \times \{1\}, & a = 1 \\ \emptyset, & \text{sonst} \end{cases}$$

als Vereinigung dreier abgeschlossener Mengen abgeschlossen. ■

12.2 Bemerkung Allgemeiner läßt sich zeigen, daß jede irreduzible algebraische Varietät in der Zariskitopologie zusammenziehbar ist. Die Voraussetzung irreduzibel ist dabei wichtig:

Aufgabe 12.1 Man zeige, daß die Vereinigung dreier Geraden $X := V(\mathbb{C}^2; z_1 z_2 (z_1 + z_2 - 1))$ in der Zariskitopologie nicht zusammenziehbar ist.

Torische Varietäten X sind irreduzibel, also kann deren Fundamentalgruppe $\pi_1(X)$ nur in der \mathbb{C} -Topologie zusätzliche Informationen liefern. Wir werden daher stets diese Topologie für die Fundamentalgruppen benutzen. Dabei wählen wir in der Regel als Basispunkt $1 \in \mathbb{T} \subset X$. Mit dem Standardweg

$$\varepsilon: [0, 1] \rightarrow S^1 \subset \mathbb{C}^*, \quad t \mapsto e^{2\pi i t}$$

erhalten wir folgende explizite Beschreibung der Fundamentalgruppe des Torus:

12.3 Bemerkung Für ein Gitter N ist die Abbildung

$$(12.3.1) \quad N \rightarrow \pi_1(\mathbb{T}_N), \quad v \mapsto [\lambda_v \circ \varepsilon]$$

ein Isomorphismus.

Beweis Aus der Darstellung $\mathbb{C}^* \cong S^1 \times \mathbb{R}_{>0}$ ergeben sich Isomorphismen

$$\mathbb{Z} = \pi_1(S^1, 1) \cong \pi_1(\mathbb{C}^*, 1), \quad 1 \mapsto [\varepsilon] \mapsto [\varepsilon].$$

Nach der Produktformel für Fundamentalgruppen

$$(12.3.1) \quad \pi_1(X \times Y) \cong \pi_1(X) \times \pi_1(Y)$$

ist damit

$$\pi_1(\mathbb{T}) = \pi_1((\mathbb{C}^*)^n) \cong \mathbb{Z}^n.$$

Dieser Isomorphismus läßt sich explizit realisieren als

$$N \xrightarrow{\cong} \pi_1(\mathbb{T}), \quad v \mapsto [\lambda_v \circ \varepsilon],$$

wobei λ_v die zu v gehörige 1-PUG bezeichnet. Zum Nachweis dieser Behauptung seien (v_1, \dots, v_n) eine Basis von N und (u_1, \dots, u_n) die duale Basis von M . Aus der Beziehung

$$\lambda_{v_i}(z)(u_j) = z^{\langle u_j, v_i \rangle} = z^{\delta_{ij}}$$

(vgl. (6.7.2)) ergibt sich mit

$$\mathbb{T} = \text{Hom}(M, \mathbb{C}^*) \xrightarrow{\cong} (\mathbb{C}^*)^n, \quad x \mapsto (x(u_1), \dots, x(u_n))$$

die Beschreibung

$$\mathbb{C}^* \xrightarrow{\lambda_{v_i}} \mathbb{T} \xrightarrow{\cong} (\mathbb{C}^*)^n, \quad z \mapsto (1, \dots, 1, z, 1, \dots, 1).$$

Bezeichnet \mathbb{C}_i^* die i -te Komponente des Produkts, so folgt mit $\mathbb{Z} \cdot v_i \cong \pi_1(\mathbb{C}_i^*, 1)$

$$N = \bigoplus_i \mathbb{Z} \cdot v_i \xrightarrow{\cong} \prod_{i=1}^n \pi_1(\mathbb{C}_i^*) \cong \pi_1((\mathbb{C}^*)^n) \cong \pi_1(\mathbb{T}), \quad v_i \mapsto [\lambda_{v_i} \varepsilon]. \blacksquare$$

Die algebraisch-topologische Information über X_σ ist bereits in der abgeschlossenen Bahn \mathbb{B}_σ enthalten:

12.4 Satz *Ist σ ein N -Kegel, so ist die Inklusion $\iota: \mathbb{B}_\sigma \hookrightarrow X_\sigma$ ein starker Deformationsretrakt mit einer äquivarianten Retraktion.*

Dabei bedeutet das Wort „starker Deformationsretrakt“, daß für die Retraktionsabbildung $r: X_\sigma \rightarrow \mathbb{B}_\sigma$ eine geeignete Homotopie $\iota \circ r \simeq \text{id}_{X_\sigma}$ den Unterraum \mathbb{B}_σ punktweise fest läßt.

Beweis Die Bahn

$$\mathbb{B}_\sigma = \text{Hom}(\sigma^\perp \cap M, \mathbb{C}) \hookrightarrow X_\sigma = \text{Hom}(\sigma^\vee \cap M, \mathbb{C})$$

ist nach 7.6 als Unterraum durch „Fortsetzung durch Null auf $\sigma^\vee \cap M$ “ eingebettet. Die über den Fußpunkt x_σ definierte Abbildung

$$(12.4.1) \quad r: X_\sigma \rightarrow \mathbb{B}_\sigma \hookrightarrow X_\sigma, \quad x \mapsto x_\sigma \cdot x$$

ist stetig und erfüllt $r \circ \iota = \text{id}_{\mathbb{B}_\sigma}$ nach Definition von x_σ :

$$x_\sigma(u) = \begin{cases} 1, & u \in \sigma^\perp \cap M \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Fixieren wir ein $v \in \sigma^\circ \cap N$ und setzen

$$H: X_\sigma \times I \rightarrow X_\sigma, \quad (x, t) \mapsto \begin{cases} \lambda_v(t) \cdot x, & t > 0 \\ x_\sigma \cdot x & t = 0. \end{cases}$$

Nach 6.11 ist $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda_v(t) = x_\sigma$, also H auch in $t = 0$ stetig. Weiter ist $H(*, 1) = \text{id}_{X_\sigma}$; da schließlich aus $u \in \sigma^\perp \cap M$ folgt, daß $\lambda_v(t)(u) = t^{\langle u, v \rangle} = 1$ gilt, ist \mathbb{B}_σ starker Deformationsretrakt von X_σ . \blacksquare

12.5 Korollar Für jeden d -dimensionalen N -Kegel σ in V gilt:

- 1) $\pi_1(X_\sigma) \cong N/\sigma \cong \mathbb{Z}^{n-d}$.
- 2) Ist $d = n$, so ist X_σ zusammenziehbar.

Beweis Für einen volldimensionalen Kegel ist die abgeschlossene Bahn \mathbb{B}_σ gerade der Fixpunkt x_σ , so daß X_σ nach 12.4 zusammenziehbar ist. Für allgemeines d folgt damit aus der Produktzerlegung (3.19.1) und der Produktformel (12.1.1):

$$\pi_1(X_\sigma) \cong \pi_1(X_{\sigma'}) \times \pi_1(\mathbb{T}^{n-d}) \cong \{1\} \times \mathbb{Z}^{n-d} . \blacksquare$$

Über die Fächerdaten läßt sich nunmehr die Fundamentalgruppe mit Hilfe der Bezeichnung

$$N_\Delta := \sum_{\sigma \in \Delta} N_\sigma$$

wie folgt beschreiben:

12.6 Satz Zu jedem N -Fächer Δ existiert kanonisch eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow N_\Delta \rightarrow N \rightarrow \pi_1(X_\Delta) \rightarrow 0 .$$

Beweis Es sei zunächst Δ der Seitenfächer eines Kegels σ , i.e., $X_\Delta = X_\sigma$. Dann ist eine exakte Sequenz mit $\mathbb{T} = \mathbb{T}_N$

$$(12.6.1) \quad 0 \rightarrow N_\sigma \rightarrow N = \pi_1(\mathbb{T}) \rightarrow \pi_1(X_\sigma) \rightarrow 0$$

zu etablieren. Wir haben mit 7.6 folgende Abbildungen

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{T}_N & \xrightarrow{\iota} & X_\sigma & \xrightarrow{r} & \mathbb{B}_\sigma & \xrightarrow{\omega} & \mathbb{T}(\sigma) := \mathbb{T}_{N/N_\sigma} = \text{Hom}(\sigma^\perp \cap M, \mathbb{C}^*) \\ (x: M \rightarrow \mathbb{C}) & \mapsto & x|_{\sigma^\vee \cap M} & \xrightarrow{(12.4.1)} & (x_\sigma \cdot x)|_{\sigma^\vee \cap M} & = & x|_{\sigma^\perp \cap M} . \end{array}$$

Für die zugehörigen Fundamentalgruppen erhalten wir das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_1(\mathbb{T}) & \rightarrow & \pi_1(X_\sigma) & \xrightarrow{\cong} & \pi_1(\mathbb{B}_\sigma) & \xrightarrow{\cong} & \pi_1(\mathbb{T}(\sigma)) \\ \parallel & & & & & & \parallel \\ N & & \longrightarrow & & & & N/N_\sigma \quad . \end{array}$$

Wenn die untere Abbildung im Diagramm die Restklassenabbildung ist, dann ist (12.6.1) evident. Für $v \in N$ und die zugehörige Klasse $\bar{v} \in N/N_\sigma$ zeigen wir daher für alle $t \in [0, 1]$

$$(\omega \circ r \circ \iota)(\lambda_v \varepsilon(t)) = \lambda_{\bar{v}} \varepsilon(t) .$$

Ist dazu $u \in \sigma^\perp \cap M$, so gilt

$$(\omega \circ r \circ \iota)(\lambda_v \varepsilon(t))(u) = (\lambda_v \varepsilon(t))(u) = \varepsilon(t)^{\langle v, u \rangle} = \varepsilon(t)^{\langle \bar{v}, u \rangle} = (\lambda_{\bar{v}} \varepsilon(t))(u) .$$

Für einen allgemeinen Fächer Δ schließen wir durch vollständige Induktion über die Anzahl seiner Kegel. Nach dem bereits Gezeigten dürfen wir annehmen, daß Δ nicht Seitenfächer eines Kegels ist. Es sei $\sigma \in \Delta^{\max}$; dann haben $\Delta' := \Delta \setminus \{\sigma\}$, der Seitenfächer von σ und deren Durchschnitt Δ'' weniger Elemente als Δ . Nun gelten

$$X_\Delta = X_{\Delta'} \cup X_\sigma \quad \text{und} \quad X_{\Delta''} = X_{\Delta'} \cap X_\sigma .$$

Nach Induktionsvoraussetzung können wir folgende beiden Diagramme miteinander identifizieren:

$$\begin{array}{ccc}
 N & & \pi_1(\mathbb{T}) \\
 \searrow & & \searrow \\
 N/N_{\Delta''} & \rightarrow & N/N_{\Delta'} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 N/N_\sigma & & \pi_1(X_\sigma)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 & & \\
 & & \\
 \pi_1(X_{\Delta''}) & \rightarrow & \pi_1(X_{\Delta'}) \\
 \downarrow & & \\
 \pi_1(X_\sigma) & &
 \end{array}$$

Das linke hat wegen $N_\Delta = N_\sigma + N_{\Delta'}$ ersichtlich N/N_Δ als pushout¹⁸⁾, während das rechte nach dem Satz von van Kampen (vgl. [tD, II (5.7)]) den pushout $\pi_1(X_\Delta)$ hat. Damit ist die natürliche Abbildung $N \rightarrow \pi_1(X_\Delta)$ surjektiv und hat N_Δ als Kern. ■

Für die folgende Beschreibung der Torsion verwenden wir die in 15.11 charakterisierte Divorenklassengruppe $\text{Cl Div}_\mathbb{C}^\mathbb{T}(X_\Delta) = \text{Cl Div}_\mathbb{C}(X_\Delta)$. Dabei bezeichnet $\text{Tors } G$ für eine endlich erzeugte abelsche Gruppe G die zugehörige Torsionsuntergruppe

$$\text{Tors } G := \{g \in G; \exists n \in \mathbb{N}_{>0} \text{ mit } ng = 0\} .$$

Entsprechend heißt G „torsionsfrei“, wenn $\text{Tors } G$ die Nullgruppe ist. Eine analoge Begriffsbildung hat man für Moduln über beliebigen Ringen; dabei wird $\mathbb{N}_{>0}$ durch die Menge der Nichtnullteiler ersetzt.

12.7 Korollar *Für jede torische Varietät X_Δ gilt:*

- 1) $\pi_1(X_\Delta) = H_1(X_\Delta; \mathbb{Z})$.
- 2) $\text{Tors } \pi_1(X_\Delta) = \text{Tors } \text{Cl Div}_\mathbb{C}^\mathbb{T}(X_\Delta)$.

¹⁸⁾ Ein kommutatives Diagramm von Gruppen

$$\begin{array}{ccc}
 G_0 & \xrightarrow{\varphi_1} & G_1 \\
 \downarrow \varphi_2 & & \downarrow \psi_1 \\
 G_2 & \xrightarrow{\psi_2} & G
 \end{array}$$

heißt „pushout“, wenn für jedes Paar von Gruppenhomomorphismen $h_j: G_j \rightarrow H$ mit $h_1 \circ \varphi_1 = h_2 \circ \varphi_2$ genau ein Homomorphismus $f: G \rightarrow H$ existiert, der $f \circ \psi_j = h_j$ erfüllt.

3) $\text{corang } \pi_1(X_\Delta)^{19)} = \dim X_\Delta \iff X_\Delta \cong \mathbb{T}$.

4) Falls Δ einen n -dimensionalen Kegel enthält, so ist X_Δ einfach zusammenhängend und damit $\text{Cl Div}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{T}}(X_\Delta)$ torsionsfrei.

Beweis 1) Da $\pi_1(\mathbb{T}) = N$ abelsch ist, gilt dies nach 12.6 auch für $\pi_1(X_\Delta)$. Damit ist $\pi_1(X_\Delta) = H_1(X_\Delta; \mathbb{Z})$.

2) Aus dem universellen Koeffiziententheorem der Kohomologie für $R = \mathbb{Z}$

$$(10.15) \quad 0 \rightarrow \text{Ext}(H_{j-1}(X_\Delta; \mathbb{Z}), G) \rightarrow H^j(X_\Delta; G) \rightarrow \text{Hom}(H_j(X_\Delta; \mathbb{Z}), G) \rightarrow 0$$

für eine beliebige abelsche Gruppe G folgt mit $\text{Ext}(G, \mathbb{Z}) \cong \text{Tors } G$ für endlich erzeugtes G aus der Tatsache, daß für solche G die Gruppe $\text{Hom}(G, \mathbb{Z})$ frei ist, die Gleichung

$$\text{Tors } \pi_1(X_\Delta) = \text{Tors } H^2(X_\Delta).$$

Nach der *Künnethformel* für Koeffizienten in R -Moduln G und G' und topologische Räume T und T'

$$(12.7.1) \quad \begin{aligned} 0 \rightarrow \sum_{i+j=\ell} H_i(T; G) \otimes_R H_j(T'; G') &\rightarrow H_\ell(T \times T'; G \otimes G') \\ &\rightarrow \sum_{i+j=\ell-1} \text{Tor}(H_i(T; G), H_j(T'; G')) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

genügt es im Falle $R = \mathbb{Z} = G = G'$ für die Berechnung der Torsion von $H_1(X_\Delta; \mathbb{Z})$, eventuelle Faktoren \mathbb{C}^* von X_Δ abzuspalten, denn die Homologie von \mathbb{C}^* ist frei. Daher sei X_Δ (bzw Δ) ohne Einschränkung nicht entartet. Für solche Fächer gilt nach 9.17 und 15.11

$$H^2(X_\Delta; \mathbb{Z}) = \text{Cl Div}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{T}}(X_\Delta);$$

daraus folgt für beliebige Fächer

$$\text{Tors } \pi_1(X_\Delta) = \text{Tors Cl Div}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{T}}(X_\Delta).$$

3) Wenn ein Kegel $\sigma \neq \sigma \in \Delta$ existiert, so kann stets einer der erzeugenden primitiven Vektoren von σ als ein Basiselement von N betrachtet werden; er liefert dann die Nullklasse in $\pi_1(X_\Delta)$. Nach 12.6 gilt damit

$$\text{corang } \pi_1(X_\Delta) \leq n - 1.$$

4) Falls Δ einen n -dimensionalen Kegel σ enthält, dann ist $N = N_\sigma$, also nach 12.6 $\pi_1(X_\Delta) = 0$. Aus 2) folgt nun, daß $\text{Cl Div}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{T}}(X_\Delta)$ torsionsfrei ist. ■

Die in 3) angegebene Abschätzung ist scharf:

¹⁹⁾ Der Korang einer endlich erzeugten abelschen Gruppe bezeichne die Minimalzahl von Erzeugenden.

12.8 Beispiel Ist Δ in \mathbb{R}^2 der \mathbb{Z}^2 -Fächer mit den drei Kegeln 0 , $\mathbb{R}_{\geq 0} \cdot (2, 1)$ und $\mathbb{R}_{\geq 0} \cdot (1, 2)$, so hat die Fundamentalgruppe Torsion vom maximal möglichen Korang 1:

$$\pi_1(X_\Delta) \cong \mathbb{Z}^2 / \langle (2, 1), (1, 2) \rangle \cong \mathbb{Z}_3,$$

denn es gilt $\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 3$. ■

Für die Anwendungen der Kohomologie affiner torischer Varietäten ist bisweilen die folgende Beschreibung hilfreich:

12.9 Korollar Zum N -Kegel σ existiert für jedes j ein natürlicher Isomorphismus $H^j(X_\sigma; \mathbb{Z}) \cong \bigwedge^j M(\sigma)$. Insbesondere ist $H^j(X_\sigma; \mathbb{Z})$ eine freie abelsche Gruppe vom Rang $\binom{n - \dim \sigma}{j}$.

Beweis Es sei zunächst $\sigma = \mathfrak{o}$ und damit $X_\sigma = \mathbb{T}$. Dann ist

$$H_1(X_\sigma; \mathbb{Z}) = N = \bigoplus_{j=1}^n \mathbb{Z} \cdot e_j$$

nach 12.5 und 12.7 1). Aus der Künnethformel folgt, daß $H_j(X_\sigma; \mathbb{Z})$ die freie abelsche Gruppe mit der Basis $\{e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_j}; i_1 < \dots < i_j\}$ ist. Aus dem universellen Koeffiziententheorem der Kohomologie ergibt sich, daß die Kohomologie die dazu duale abelsche Gruppe und damit $\bigwedge^j M$ ist. Für allgemeines σ ist $H_1(X_\sigma; \mathbb{Z}) = N/\sigma$ nach 12.5, also kann man analog mit $M(\sigma)$ statt M argumentieren. ■

12.10 Bemerkung Für einen Fächer Δ in V sind folgende Bedingungen äquivalent:

- 1) Δ ist nicht entartet, i.e., $\text{lin } \Delta = V$.
- 1') $\text{lin } \Delta^1 = V$.
- 2) Das Gitter N_Δ hat den Rang n .
- 3) Die Fundamentalgruppe $\pi_1(X_\Delta)$ ist endlich.
- 4) Die erste Bettizahl $b_1(X_\Delta) = \dim_{\mathbb{Q}} H_1(X_\Delta; \mathbb{Q})$ verschwindet.
- 5) $H^1(X_\Delta; \mathbb{Z}) = 0$.

Beweis Die Äquivalenz der Bedingungen 1), 1') und 2) ist evident. Die Gleichwertigkeit von 2) und 3) ist Ausfluß von 12.6, während der restliche Beweis rein algebraisch-topologischer Natur ist: Da $H_1(X_\Delta; \mathbb{Z})$ eine endlich erzeugte abelsche Gruppe ist, ergibt sich die Äquivalenz von 3) und 4) aus 12.7 1). Nach dem Universellen Koeffiziententheorem (10.15) ist $H^1(X_\Delta; \mathbb{Z}) = \text{Hom}(H_1(X_\Delta; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \oplus 0$, woraus „4) \iff 5)“ folgt. ■

Aufgabe 12.2 Es sei Δ der Fächer im \mathbb{R}^3 , der aus den Strahlen $(1, 0, 1)$, $(1, 2, -1)$ und der 0 besteht.

- i) Man gebe die zugehörige torische Varietät X_Δ und deren \mathbb{T} -invariante Primdivisoren an.
- ii) Man berechne die Fundamentalgruppe von X_Δ .

Aufgabe 12.3 Ist die Fundamentalgruppe eine kombinatorische Invariante torischer Varietäten?

13. Eulercharakteristik

Wir gehen in diesem Paragraphen auf die Bedeutung der Eulercharakteristik für die Geometrie torischer Varietäten ein. Dabei werden wir etliche Beispiele für folgendes allgemeine Konzept kennenlernen:

13.1 Definition *Es seien R ein Hauptidealbereich und C_\bullet ein endlich erzeugter graduerter R -Modul. Dazu bezeichne die „Bettizahl“*

$$b_j(C_\bullet) := \dim_{Q(R)} C_j \otimes_R Q(R)$$

den Rang von C_j . Dann heißt

$$e(C_\bullet) := \sum_j (-1)^j b_j(C_\bullet)$$

die Eulercharakteristik von C_\bullet .

In § 10 hatten wir bereits zwei Beispiele kennengelernt: einerseits die holomorphe Eulercharakteristik $\chi(X) = e(H^\bullet(X; \mathcal{O}_X))$ für vollständige torische Varietäten X , andererseits das für uns hier wichtigste Beispiel der (topologischen) Eulercharakteristik für einen topologischen Raum U mit endlich erzeugter rationaler Homologie

$$e(U) = e(H_\bullet(U; \mathbb{Q})) .$$

Ersichtlich ist $e(U)$ eine Homotopieinvariante. Für algebraische Varietäten X ist die Bedingung $\dim_{\mathbb{Q}} H_\bullet(X; \mathbb{Q}) < \infty$ stets erfüllt, da sie sich als Komplement eines abgeschlossenen Unterkomplexes in einem endlichen simplizialen Komplex realisieren lassen (vgl [Gi]).

An ersten Rechenregeln benötigen wir die folgenden:

13.2 Bemerkung 1) Existieren $e(U)$ und $e(U')$, so auch $e(U \times U')$, und es gilt

$$e(U \times U') = e(U) \cdot e(U') .$$

2) Sind $U_1, U_2 \subseteq U$ und existieren alle $e(U_i \cap U_j)$ für $i, j \in \{1, 2\}$, so existiert $e(U_1 \cup U_2)$, und es gilt

$$e(U_1 \cup U_2) + e(U_1 \cap U_2) = e(U_1) + e(U_2) .$$

Beweis Behauptung 1) folgt aus der Künnethformel (12.7.1), die für rationale Koeffizienten folgende einfache Gestalt annimmt:

$$(13.2.1) \quad H_\ell(U \times U'; \mathbb{Q}) \cong \bigoplus_{i+j=\ell} H_i(U; \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} H_j(U'; \mathbb{Q}).$$

Denn es gilt damit

$$(-1)^\ell b_\ell(U \times U') = \sum_{i+j=\ell} (-1)^i b_i(U) (-1)^j b_j(U').$$

Aussage 2) ergibt sich aus der einfachen Tatsache, daß zu einer unendlichen exakten Sequenz endlichdimensionaler \mathbb{Q} -Vektorräume

$$\dots \rightarrow C_{\ell+1} \rightarrow A_\ell \rightarrow B_\ell \rightarrow C_\ell \rightarrow A_{\ell-1} \rightarrow \dots$$

mit nur endlich vielen nicht verschwindenden A_ℓ und B_ℓ gilt (vgl. Aufgabe 13.1)

$$(13.2.2) \quad e(C_\bullet) = e(B_\bullet) - e(A_\bullet).$$

Man wende dies auf die exakte Mayer-Vietoris-Sequenz

$$(13.2.3) \quad \dots \rightarrow H_\ell(U_1 \cap U_2; \mathbb{Q}) \rightarrow H_\ell(U_1; \mathbb{Q}) \oplus H_\ell(U_2; \mathbb{Q}) \rightarrow H_\ell(U_1 \cup U_2; \mathbb{Q}) \rightarrow \dots$$

an. ■

Aufgabe 13.1 Es sei $\dots \rightarrow V_{\ell+1} \rightarrow V_\ell \rightarrow V_{\ell-1} \rightarrow \dots$ eine exakte Sequenz endlichdimensionaler K -Vektorräume mit nur endlich vielen $V_\ell \neq 0$. Man zeige die Gleichung

$$\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} (-1)^\ell \dim V_\ell = 0.$$

13.3 Beispiele 1) $e(\text{Punkt}) = 1$;

2) $e(\mathbb{T}) = 0$ für $\dim \mathbb{T} \geq 1$;

3) $e(X_\sigma) = \begin{cases} 1, & \dim \sigma = n \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

Beweis Behauptung 2) folgt mit 13.2 1) unmittelbar aus $e(\mathbb{C}^*) = e(S^1) = 0$. Für 3) sei $d := \dim \sigma$. Ist $d = n$, so ist X_σ zusammenziehbar und 1) anwendbar; andernfalls ist $e(X_\sigma) = e(Z_\sigma \times \mathbb{T}^{n-d}) = e(\mathbb{T}^{n-d}) = 0$ nach 2). ■

13.4 Satz Für jede torische Varietät X_Δ existiert die Eulercharakteristik $e(X_\Delta)$; sie stimmt mit der Anzahl $f_n(\Delta)$ der n -Kegel von Δ , i.e., mit der Anzahl der Fixpunkte von X_Δ überein.

Beweis Ist Δ der Seitenfächer eines Kegels σ , so wende man 13.3 3) an. Andernfalls sei $\sigma \in \Delta^{\max}$. Dann ist $X_\Delta = X_{\Delta'} \cup X_\sigma$ und $X_{\Delta'} \cap X_\sigma = X_{\Delta' \cap \sigma}$ für den Fächer $\Delta' := \Delta \setminus \{\sigma\}$. Für eine Induktion über die Anzahl der Kegel des betrachteten Fächers

nehmen wir die Behauptung für Δ' , $\Delta' \cap \sigma$ und σ als erwiesen an; aus 13.2 2) folgt die Existenz von $e(X_\Delta)$ und die Beziehung

$$e(X_\Delta) = e(X_\sigma) + e(X_{\Delta'}) - e(X_{\Delta' \cap \sigma}) = f_n(\sigma) + f_n(\Delta') - 0 = f_n(\Delta) . \blacksquare$$

Die Eulercharakteristik kann man aus einer allgemeineren, alle Bettizahlen charakterisierenden Konstruktion gewinnen, nämlich dem „Poincarépolynom“ in der Unbestimmten T

$$P_X := \sum_j b_j(X) T^j \in \mathbb{N}[T]$$

der algebraischen Varietät X : Evident gilt $e(X) = P_X(-1)$. Für unsere Zwecke haben wir auf den Isomorphieklassen algebraischer Varietäten X eindeutig bestimmte *virtuelle Poincarépolynome* $\mathcal{P}_X \in \mathbb{Z}[T]$ mit folgenden Eigenschaften (für $R = \mathbb{Z}$ bzw. \mathbb{Q}) einzuführen:

(VP 1) *Normierung: Ist X glatt und kompakt, so ist $\mathcal{P}_X = P_X$.*

(VP 2) *Additivität: Ist $Y \hookrightarrow X$ eine abgeschlossene Untervarietät, so gilt*

$$\mathcal{P}_X = \mathcal{P}_Y + \mathcal{P}_{X \setminus Y} .$$

Bevor wir auf Existenz und Eindeutigkeit dieser virtuellen Polynome eingehen, seien zunächst zwei Konsequenzen der beiden Axiome formuliert:

(VP 3) *Besitzt X eine endliche Partition in lokal abgeschlossene Untervarietäten Z_i , so gilt $\mathcal{P}_X = \sum_i \mathcal{P}_{Z_i}$.*

(VP 4) *Multiplikativität: Für alle algebraischen Varietäten X und Y gilt*

$$\mathcal{P}_{X \times Y} = \mathcal{P}_X \cdot \mathcal{P}_Y .$$

13.5 Beispiele 1) $\mathcal{P}_{\mathbb{P}^n} = \sum_{j=0}^n T^{2j}$ für alle $n \geq 0$.

2) $\mathcal{P}_{\mathbb{T}} = (T^2 - 1)^{\dim \mathbb{T}}$.

Beweis Zunächst ist

$$b_j(\mathbb{P}^n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq j \leq 2n, j = 0 \bmod 2, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

bekannt, so daß 1) aus (VP 1) folgt. Zu 2) ergibt sich aus (VP 2) zunächst

$$\mathcal{P}_{\mathbb{C}^*} = \mathcal{P}_{\mathbb{P}^1} - \mathcal{P}_{\{0, \infty\}} = \mathcal{P}_{\mathbb{P}^1} - 2 = T^2 - 1 ,$$

so daß der allgemeine Fall aus (VP 4) folgt. \blacksquare

Aus dem letzten Beispiel ergibt sich insbesondere $P_{\mathbb{C}^*} = T + 1$ und $\mathcal{P}_{\mathbb{C}^*} = T^2 - 1$, daß also Poincarépolynom und virtuelles Poincarépolynom selbst für glatte Varietäten verschieden sein können. Außerdem liegt \mathcal{P}_X nicht notwendig in $\mathbb{N}[t]$.

Für torische Varietäten gibt es wegen (VP 3) trivialerweise höchstens einen Kandidaten für \mathcal{P}_X :

13.6 Satz *Ist Δ ein Fächer in \mathbb{R}^n , so gilt mit $f_j := f_j(\Delta)$:*

$$a) \mathcal{P}_{X_\Delta} = \sum_{j=0}^n f_{n-j} \cdot \mathcal{P}_{\mathbb{T}^j} = \sum_{j=0}^n f_{n-j} \cdot (T^2 - 1)^j = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{k=i}^n (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f_{n-k} \right) T^{2i}.$$

b) Für kompaktes glattes X_Δ ist $P_{X_\Delta} = \mathcal{P}_{X_\Delta}$ und damit

$$b_{2i}(X_\Delta) = \sum_{k=i}^n (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f_{n-k} \quad \text{und} \quad b_{2i+1}(X_\Delta) = 0.$$

Beweis a) Für die Bahnenzerlegung $X_\Delta = \bigcup_{\sigma \in \Delta} \mathbb{B}_\sigma$ gemäß (7.2.4) in Tori der Dimension $(n - \dim \sigma)$ gilt nach (VP 3) und 13.5 2)

$$\mathcal{P}_{X_\Delta} = \sum_{\sigma \in \Delta} \mathcal{P}_{\mathbb{B}_\sigma} = \sum_k f_{n-k} (T^2 - 1)^k.$$

Das zweite Gleichheitszeichen in a) erhält man durch eine elementare kombinatorische Umrechnung. — Teil b) ist aufgrund von (VP 1) eine Konsequenz von a). ■

Insbesondere besagt Satz 13.6, daß die Bettizahlen für glatte kompakte torische Varietäten eine kombinatorische Invariante sind. Für *simpliziale* vollständige Fächer zeigen wir das entsprechende Resultat in 13.10.

Beweisen wir die **Eindeutigkeit der virtuellen Poincarépolynome** \mathcal{P}_X auch in der Kategorie der algebraischen Varietäten. Dazu seien \mathcal{P} und \mathcal{Q} auf der Menge der Isomorphieklassen algebraischer Varietäten definierte Abbildungen nach $\mathbb{Z}[t]$, die (VP 1) und (VP 2) erfüllen. Wir verwenden dabei die Existenz einer Kompaktifizierung (Satz von Nagata, vgl. [Ht, S. 168]) sowie die einer Singularitätenauflösung (Satz von Hironaka).

a) Es gilt $\mathcal{P}_X = \mathcal{Q}_X$ für kompakte Varietäten X . Das ist nach (VP 1) trivial für $\dim X = 0$; für eine Induktion über die Dimension wählen wir eine Singularitätenauflösung $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$; dann ist π eine eigentliche birationale Abbildung. Für die Singularitätenmenge $S := \text{Sing}(X)$ und $R := X \setminus S$ gilt mit $\tilde{S} := \pi^{-1}(S)$ und $\tilde{R} := \pi^{-1}(R)$:

$$\dim S \leq \dim \tilde{S} < \dim \tilde{X} = \dim X.$$

Da \tilde{X} kompakt und glatt und $\pi: \tilde{R} \rightarrow R$ ein Isomorphismus ist, folgt aus der Induktionsvoraussetzung

$$\mathcal{P}_R = \mathcal{P}_{\tilde{R}} = \mathcal{P}_{\tilde{X}} - \mathcal{P}_{\tilde{S}} = \mathcal{Q}_{\tilde{X}} - \mathcal{Q}_{\tilde{S}} = \mathcal{Q}_{\tilde{R}} = \mathcal{Q}_R$$

und damit unter Anwendung der Induktionsvoraussetzung für das kompakte S

$$\mathcal{P}_X = \mathcal{P}_R + \mathcal{P}_S = \mathcal{Q}_R + \mathcal{Q}_S = \mathcal{Q}_X .$$

b) Nun sei X nicht mehr kompakt; man wähle eine Kompaktifizierung \overline{X} von X mit niederdimensionalem Komplement A . Dann ist A wiederum kompakt, und nach a) gilt

$$\mathcal{P}_X = \mathcal{P}_{\overline{X}} - \mathcal{P}_A = \mathcal{Q}_{\overline{X}} - \mathcal{Q}_A = \mathcal{Q}_X . \blacksquare$$

Beweis von (VP 3). Wieder führen wir Induktion über $n := \dim X$, wobei der Induktionsanfang mit $n = 0$ trivial ist. In der Kategorie torischer Varietäten seien die Z_i naturgemäß als lokal abgeschlossene torische Untervarietäten gewählt. Wegen der Irreduzibilität torischer X vereinfacht sich der folgende Beweis.

a) Für den Induktionsschritt habe X zunächst irreduzible Zusammenhangskomponenten; nach (VP 2) können wir uns dabei ersichtlich auf den Fall eines zusammenhängenden X beschränken. Aus einer Zerlegung $X = \bigcup Z_i$ folgt $X = \bigcup \overline{Z}_i$ und damit, daß genau ein i mit $\overline{Z}_i = X$ existiert; dies sei etwa $i = 1$. Dann ist Z_1 offen, und die anderen Z_i sind niederdimensional. Die Induktionsvoraussetzung liefert im Verbund mit (VP 2):

$$\mathcal{P}_X = \mathcal{P}_{Z_1} + \mathcal{P}_{\bigcup_{i \geq 2} Z_i} = \mathcal{P}_{Z_1} + \sum_{i \geq 2} \mathcal{P}_{Z_i} = \sum_{i \geq 1} \mathcal{P}_{Z_i} .$$

b) Für allgemeines X sei $X = \bigcup_j X_j$ die Zerlegung in irreduzible Komponenten. Dann lassen sich auf $A := \bigcup_{j \neq k} X_j \cap X_k$ die Induktionsvoraussetzung und auf die Vereinigung der $X'_j := X_j \setminus A$ der Teil a) anwenden. Also folgt:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_X &= \mathcal{P}_{\bigcup_i \bigcup_j X'_j \cap Z_i} + \mathcal{P}_{\bigcup_i A \cap Z_i} = \sum_{i,j} \mathcal{P}_{X'_j \cap Z_i} + \sum_i \mathcal{P}_{A \cap Z_i} \\ &= \sum_i \left(\sum_j \mathcal{P}_{X'_j \cap Z_i} + \mathcal{P}_{A \cap Z_i} \right) = \sum_i \mathcal{P}_{Z_i} . \blacksquare \end{aligned}$$

Beweis von (VP 4) aus (VP 1) – (VP 3). Wir führen Induktion über $\dim X + \dim Y$ durch. Für den Induktionsschritt seien X bzw. Y Zariski-offen und dicht in torischen Varietäten X' bzw. Y' (im torischen Fall zusätzlich invariant). Mit $A := X' \setminus X$ und $B := Y' \setminus Y$ gelten nach (VP 3) die Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{X' \times Y'} &= \mathcal{P}_{X \times Y} + \mathcal{P}_{A \times Y} + \mathcal{P}_{X \times B} + \mathcal{P}_{A \times B} \\ \mathcal{P}_{X'} \mathcal{P}_{Y'} &= \mathcal{P}_X \mathcal{P}_Y + \mathcal{P}_A \mathcal{P}_Y + \mathcal{P}_X \mathcal{P}_B + \mathcal{P}_A \mathcal{P}_B . \end{aligned}$$

Weil A und B niederdimensional sind, folgt daher aus der Induktionsvoraussetzung

$$\mathcal{P}_{X \times Y} = \mathcal{P}_X \mathcal{P}_Y \iff \mathcal{P}_{X' \times Y'} = \mathcal{P}_{X'} \mathcal{P}_{Y'} .$$

Sind X und Y glatt, so wähle man nach 8.6 Kompaktifizierungen X' und Y' , die man nach 11.11 als glatt voraussetzen darf. Aus der Künnethformel (13.2.1) folgt mit (VP 1) die rechte und damit die linke Seite. Für allgemeines X und Y wende man die linke Seite auf X_{reg} und Y_{reg} an. Im torischen Fall sind A und B endliche Vereinigungen abgeschlossener torischer Untervarietäten, so daß man X' aus X in endlich vielen Schritten aufbauen muß, analog für Y . ■

Als einfache Konsequenz erhalten wir folgende Verallgemeinerung von (VP 4):

13.7 Bemerkung Ist $X \rightarrow Z$ eine algebraische Faserung, die in der Zariskitopologie lokal trivial mit Faser Y ist, so gilt

$$\mathcal{P}_X = \mathcal{P}_Y \cdot \mathcal{P}_Z .$$

Beweis Es existiert eine Partition $Z = \bigcup Z_i$ in lokal abgeschlossene Untervarietäten, über denen die Faserung trivial ist. Nach (VP 3) und (VP 4) gilt

$$\mathcal{P}_X = \sum_i \mathcal{P}_Y \cdot \mathcal{P}_{Z_i} = \mathcal{P}_Y \cdot \mathcal{P}_Z . \blacksquare$$

Nach dem universellen Koeffiziententheorem (10.15.1) mit Koeffizienten $R = \mathbb{Q} = G$ gilt für die Eulercharakteristik die kohomologische Darstellung:

$$e(X) = e(H^\bullet(X, \mathbb{Q})) .$$

Für manche geometrischen Zusammenhänge ist es interessant, statt der üblichen Kohomologie $H^\bullet(X, \mathbb{Q})$ die zur Homologie $H_\bullet^{\text{cld}}(X; \mathbb{Q})$ duale Kohomologie mit kompakten Trägern $H_c^\bullet(X; \mathbb{Q})$ zu verwenden²⁰⁾, welche zur Eulercharakteristik mit kompakten Trägern

$$e_c(X) = e(H_c^\bullet(X; \mathbb{Q})) = \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i \dim H_c^i(X, \mathbb{Q})$$

führt. Sie läßt sich aus dem virtuellen Poincarépolynom \mathcal{P}_X ablesen:

13.8 Bemerkung Für jede algebraische Varietät X gilt $e_c(X) = \mathcal{P}_X(-1)$.

Beweis Für jedes Paar (X, U) , wobei U Zariski-offen in der algebraischen Varietät X ist, gilt in Analogie zu (VP 2) mit $A := X \setminus U$

$$(13.8.1) \quad e_c(X) = e_c(U) + e_c(A) ,$$

wie aus der langen exakten Kohomologiesequenz mit rationalen Koeffizienten

$$(13.8.2) \quad \dots \rightarrow H_c^{i-1}(A) \rightarrow H_c^i(U) \rightarrow H_c^i(X) \rightarrow H_c^i(A) \rightarrow H_c^{i+1}(U) \rightarrow \dots$$

²⁰⁾ Für kompaktes X stimmt diese mit der üblichen Kohomologie überein.

mit Hilfe von (13.2.2) folgt. Dies ist die Additivität der Eulercharakteristik für kompakte Träger.

Beschränken wir uns nun auf niederdimensionale A in X , so können wir Induktion über $n := \dim X$ durchführen. Nach (VP 1) gilt die Behauptung für glattes kompaktes X und damit insbesondere für $n = 0$. Im Induktionsschritt haben wir wegen der Additivität von \mathcal{P}_X :

$$\mathcal{P}_X(-1) = e_c(X) \iff \mathcal{P}_U(-1) = e_c(U).$$

Damit gilt die Behauptung zunächst für X_{reg} , weil dazu eine glatte Kompaktifizierung \bar{X} existiert, für welche die Aussage bereits bewiesen ist. Für allgemeines X gilt sie dann aber ebenfalls, weil sie für X_{reg} zutrifft. ■

Das folgende Ergebnis zeigt, daß auch die übliche Eulercharakteristik additiv ist:

13.9 Satz Für jede algebraische Varietät X gilt

$$(13.9.1) \quad e(X) = e_c(X).$$

Beweis a) Ist X glatt und rein n -dimensional, so folgt (13.9.1) aus der zu (9.20.1) analogen Poincarédualität (vgl. [Br, V.9.3]) für R -Moduln G

$$(13.9.2) \quad \mathcal{P}_{2n-j}^c(X; G): H_c^j(X; G) \cong H_{2n-j}(X; G),$$

für $G = \mathbb{Q}$ die Gleichung

$$(-1)^j b_c^j(X) = (-1)^j b_{2n-j}(X) = (-1)^{2n-j} b_{2n-j}(X) = (-1)^{2n-j} b^{2n-j}(X).$$

b) Die Beziehung $e_c(*) = e(*)$ ist äquivalent zur Additivität der Eulercharakteristik:

$$\text{Für } A \hookrightarrow X \text{ gilt } e(X) - e(A) = e(X \setminus A).$$

Denn einerseits ist $e_c(*)$ nach (13.8.1) additiv. Andererseits verwende man die Additivität von $e(*)$ für den singulären Ort inklusive niederdimensionaler Komponenten der betrachteten Varietät; da dessen Komplement X_{reg} nach a) die gesuchte Formel erfüllt, läßt sich unmittelbar eine Induktion über $\dim X$ durchführen. — Wie der Beweis zeigt, gilt die Additivität bereits dann für alle abgeschlossenen A in X , wenn sie für ein A gilt, das $S(X)$ und die niederdimensionalen irreduziblen Komponenten von X enthält.

c) Es genügt, (13.9.1) für die Klasse affiner algebraischer Varietäten zu zeigen. Ist nämlich $X = U \cup V$ mit $U, V \subsetneq X$, so folgen stets aus den exakten Mayer-Vietoris Sequenzen nach (13.2.2) Gleichungen

$$(13.9.3) \quad \begin{aligned} e(U \cup V) &= e(U) + e(V) - e(U \cap V) \\ e_c(U \cup V) &= e_c(U) + e_c(V) - e_c(U \cap V), \end{aligned}$$

wobei die zweite Formel eine Konsequenz der exakten Mayer-Vietoris-Sequenz (vgl. [Br, II.13 (2)])

$$\dots \rightarrow H_c^j(U \cap V; \mathbb{Q}) \rightarrow H_c^j(U; \mathbb{Q}) \oplus H_c^j(V; \mathbb{Q}) \rightarrow H_c^j(U \cup V; \mathbb{Q}) \rightarrow \dots$$

ist. Für affines V sei nun U und damit auch $U \cap V$ durch p affine Karten überdeckbar. Dann ergibt sich (13.9.1) in voller Allgemeinheit aus der affinen Aussage vermöge einer Induktion über p .

d) Nun sei die affine Varietät $X \hookrightarrow \mathbb{C}^m$ so eingebettet, daß für einen linearen Unterraum $L \hookrightarrow \mathbb{C}^m$ die Vereinigung Y von $S(X)$ mit allen niederdimensionalen Komponenten von X die Form $L \cap X$ hat. Man erhält ein solches L aus einer beliebigen Einbettung $v: X \hookrightarrow \mathbb{C}^p$, indem man ein reguläres $f: \mathbb{C}^p \rightarrow \mathbb{C}^r$ mit $Y = V(\mathbb{C}^p; f)$ wählt und mit der Einbettung

$$X \xrightarrow{v} \mathbb{C}^p \xrightarrow{(id, f)} \mathbb{C}^{p+r}$$

$L := \mathbb{C}^p \times 0$ setzt. Für kleines ε hat der Schnitt W von X mit einer ε -Umgebung von L in \mathbb{C}^m die Menge Y als starken Deformationsretrakt. Also ist $e(W) = e(Y)^{21}$, und daher folgt aus (13.9.3) für $X = W \cup (X \setminus Y)$

$$e(W \setminus Y) = e(X \setminus Y) - e(X) + e(W) = e(X \setminus Y) - e(X) + e(Y).$$

Also ist die nach b) zu zeigende Additivität der Eulercharakteristik von X bezüglich Y zur Bedingung $e(W \setminus Y) = 0$ äquivalent. Nun bezeichne $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ eine Singularitätenauflösung. Nach [AG, 9.12] ist π auch topologisch eigentlich; ferner induziert π einen Isomorphismus $\pi^{-1}(W) \setminus \pi^{-1}(Y) \cong W \setminus Y$. Daher setzt sich die Retraktion r von W auf den starken Deformationsretrakt Y zu einer Retraktion der Urbilder $\pi^{-1}(W) \rightarrow \pi^{-1}(Y)$ fort. Weil auf der Mannigfaltigkeit $\pi^{-1}(W)$ die Additivität gemäß a) zutrifft, folgt schließlich

$$e(W \setminus Y) = e(\pi^{-1}(W) \setminus \pi^{-1}(Y)) = 0. \quad \blacksquare$$

Nun zur **Existenz der virtuellen Poincarépolynome**. Im torischen Fall ist dies wiederum vergleichsweise einfach. Wir benutzen den einzig möglichen Kandidaten in 13.6 a) als Definition für \mathcal{P}_{X_Δ} . Dann sind die Axiome (VP 1) und (VP 2) zu verifizieren. Angesichts der Zerlegung in Satz 7.5 ist dabei (VP 2) evident. Der Nachweis von $P_{X_\Delta} = \mathcal{P}_{X_\Delta}$ für vollständiges reguläres Δ wird im Falle schälbarer Fächer Δ , damit insbesondere für den projektiven Fall, in 18.5 ausgeführt. Der kompakte glatte Fall ist ein Spezialfall von Satz 22.5.

Für die Konstruktion im Falle allgemeiner Varietäten, den wir allerdings im vorliegenden Text nicht mehr verwenden werden, haben wir größere Anleihen aus der Literatur zu machen haben. Die Kohomologie im Rest dieses Paragraphen sei dabei stets mit rationalen Koeffizienten verstanden. Auf $H_c^\bullet(X)$ existiert eine aufsteigende Gewichtsfiltrierung²²⁾ W (in Analogie zur gemischten Hodgestruktur, vgl. [De] für eine schöne Darstellung), so daß die assoziierte Graduierung

$$\text{gr}_W^j(H_c^i(X)) = W_j(H_c^i(X))/W_{j-1}(H_c^i(X))$$

²¹⁾ Zwar ist W keine algebraische, sondern eine analytische Varietät, aber die Euler-Charakteristik zu W existiert wegen $H_\bullet(W; \mathbb{Z}) \cong H_\bullet(Y; \mathbb{Z})$ mit gleichen Eigenschaften wie zu Y .

²²⁾ Eine aufsteigende Filtrierung W auf einem R -Modul G ist eine Inklusionskette

$$\dots \subset W_{j-1}G \subset W_jG \subset W_{j+1}G \subset \dots$$

folgende Eigenschaften hat (und nur diese benötigen wir an dieser Stelle):

(W 1) Für glattes kompaktes X ist jedes $H_c^j(X)$ rein vom Gewicht j :

$$(13.9.4) \quad \mathrm{gr}_W^j(H_c^j(X)) = H_c^j(X).$$

(W 2) Die exakte Sequenz (13.8.2) induziert für jedes j eine exakte Sequenz

$$\dots \rightarrow \mathrm{gr}_W^j H_c^{i-1}(A) \rightarrow \mathrm{gr}_W^j H_c^i(U) \rightarrow \mathrm{gr}_W^j(H_c^i(X)) \rightarrow \mathrm{gr}_W^j H_c^i(A) \rightarrow \dots$$

Definiert man für jedes j eine Eulercharakteristik

$$e_c^j(X) := \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i \dim \mathrm{gr}_W^j H_c^i(X),$$

so ist $e_c^j(X)$ nach Konstruktion additiv im Sinne von (13.8.1). Für einen Ansatz

$$\mathcal{P}_X := \sum_j (-1)^j e_c^j(X) T^j = \sum_{i,j} (-1)^{i+j} \dim(\mathrm{gr}_W^j H_c^i(X)) T^j$$

ist ersichtlich (VP 2) erfüllt, da alle Summanden additiv sind. Aber auch (VP 1) trifft zu, wenn (13.9.4) erfüllt ist. Denn dann gilt $e_c^j(X) = (-1)^j \dim H_c^j(X)$, woraus die Behauptung folgt. Weil \mathcal{P}_X durch (VP 1) und (VP 2) eindeutig bestimmt ist, war die angegebene Konstruktion von \mathcal{P}_X gerade die richtige.

Wir wollen nun 13.6 b) auf \mathbb{Q} -glatte, d.h. simpliziale kompakte torische Varietäten verallgemeinern.

13.10 Satz *Ist Δ vollständig und simplizial, so folgt*

$$\mathcal{P}_X = P_X = \sum_{j=0}^n f_j(\Delta) \cdot (T^2 - 1)^{n-j};$$

insbesondere gilt für die Bettizahlen:

$$b_{2i}(X_\Delta) = \sum_{j=i}^n (-1)^{j-i} \binom{j}{i} f_{n-j}(\Delta) \quad \text{und} \quad b_{2i+1}(X_\Delta) = 0.$$

Beweis Es ist zu zeigen, daß (13.9.4) für X_Δ gilt. In 9.21 haben wir gesehen, daß X_Δ eine rationale Homologiemannigfaltigkeit ist. Auf einer solchen stimmen $H^\bullet(X_\Delta)$ und die Schnittkohomologie $IH^\bullet(X_\Delta)$ überein. Von letzterer weiß man aber aus [Sa], daß

von Untermoduln $W_j G$ von G , wie sie in einem Spezialfall in [AG, 8.21] betrachtet wurde. Dazu gehört ein graduierter R -Modul mit den Komponenten $\mathrm{gr}_W^j(G) := W_j G / W_{j-1} G$, vgl. [AtMac, Seite 107 ff].

ihre gemischte Hodgestruktur von reinem Gewicht ist, i.e., (W 1) ist erfüllt. Damit läßt sich der Beweis von 13.6 b) unmittelbar übertragen. ■

Auf eine wesentliche Verallgemeinerung von Satz 13.10 wird im Anhang in Satz 22.5 mit einem grundsätzlich elementareren Beweis eingegangen; er behandelt insbesondere den Fall, daß der Träger des simplizialen Fächers Δ oder dessen Komplement konvex ist.

Aufgabe 13.2 Man berechne die Bettizahlen der torischen Varietäten X_{Δ_P} für folgende Polytope P :

- i) $\dim P = 2$.
- ii) $\dim P = 3$ und P ist ein einfaches Polytop.
- iii) P ist ein n -Simplex.

14. Divisoren

Divisorenklassengruppen gestatten in der Klasse der torischen Varietäten über den Begriff der invarianten Divisoren eine besonders zugängliche Beschreibung. Wir erinnern an die Begriffe von Weil- bzw. Cartierdivisoren und beschreiben dann die zugehörigen Gruppen möglichst geometrisch.

A. Weildivisoren

Ein *Primdivisor* D in einer normalen algebraischen Varietät X ist eine irreduzible eindimensionale Untervarietät, ein *Weildivisor* eine endliche formale ganzzahlige Linearkombination $\sum a_i D_i$ von Primdivisoren. Mit $\text{Div}_W(X)$ wird die (abelsche) Gruppe der Weildivisoren, mit $\text{Div}_H(X)$ die Untergruppe der *Hauptdivisoren* bezeichnet. Dabei heißt ein Weildivisor D Hauptdivisor, wenn $D = \text{div}(f)$ mit $f \in \mathcal{R}(X)$ ist, wobei $\text{div}(f)$ den Divisor der — jeweils in ihren Vielfachheiten gezählten — Null- und Polstellen der rationalen Funktion f bezeichnet.

Nun sei $X = X_\Delta$ eine torische Varietät. Jedem $\rho \in \Delta^1$ entspricht ein Bahnabschluß \mathbb{V}_ρ und damit ein Primdivisor (vgl. das kleine Wörterbuch zu § 7). Zu jedem $u \in M$ gehört ein Hauptdivisor $D_u := \text{div}(\chi^u)$. Für dessen Träger $|D_u|$, i.e., die D_u zugrunde liegende Punktmenge, folgt aus 7.5:

$$(14.1.0) \quad |D_u| \subset \bigcup_{\rho \in \Delta^1} \mathbb{V}_\rho = X \setminus \mathbb{T}.$$

Denn da χ^u in $\mathbb{C}[M]$ invertierbar ist, gilt $\text{div}(\chi^u|_{\mathbb{T}}) = 0$.

14.1 Lemma *Ist $u \in M$ und bezeichnet v_ρ für $\rho \in \Delta^1$ das zugehörige primitive Erzeugende, so gilt*

$$(14.1.1) \quad \text{div}(\chi^u) = \sum_{\rho \in \Delta^1} \langle u, v_\rho \rangle \mathbb{V}_\rho.$$

Beweis Für festes ρ ist für die Vielfachheit (vgl. [AG, 10.9])

$$\text{ord}_{\mathbb{V}_\rho}(\chi^u) = \langle u, v_\rho \rangle$$

zu zeigen; dies brauchen wir nur auf X_ρ durchzuführen, so daß ohne Einschränkung $X = X_\rho$ sei. Es seien nun v_1, \dots, v_n eine Basis von N mit $v_\rho = v_1$ und dualer Basis $u_1, \dots, u_n \in M$. Dann gilt

$$S_\rho = \rho^\vee \cap M = \mathbb{N}u_1 + \mathbb{Z}u_2 + \dots + \mathbb{Z}u_n.$$

Dazu gehört der Isomorphismus

$$(14.1.2) \quad X_\rho \xrightarrow{\cong} \mathbf{C} \times (\mathbf{C}^*)^{n-1}, \quad x \mapsto (x(u_1), \dots, x(u_n)).$$

Der Fußpunkt x_ρ von X_ρ entspricht dabei dem Punkt $(0, 1, \dots, 1) \in \mathbf{C} \times (\mathbf{C}^*)^{n-1}$, vgl. 6.2; seine \mathbb{T} -Bahn $\mathbb{B}_\rho \cong \{0\} \times (\mathbf{C}^*)^{n-1}$ ist ersichtlich abgeschlossen, also gilt $\mathbb{B}_\rho = \mathbb{V}_\rho$. Auf der Seite der Funktionenalgebren erhalten wir zu (14.1.2) einen Isomorphismus

$$\mathbf{C}[S_\rho] \xrightarrow{\cong} \mathbf{C}[T_1, T_2^{\pm 1}, \dots, T_n^{\pm 1}].$$

Die Bestimmung der Vielfachheit von χ^u längs \mathbb{V}_ρ geschieht mit Hilfe des lokalen Ringes

$$x_\rho \mathcal{O}_{\mathbb{V}_\rho} = \{f \in \mathcal{R}(\mathbf{C}^n); \mathbb{D}_f \cap \mathbb{V}_\rho \neq \emptyset\}.$$

Er ist gerade die Lokalisierung $\mathbf{C}[T_1, \dots, T_n]_{(T_1)}$, wobei dem maximalen Ideal $x_\rho \mathfrak{m}_{\mathbb{V}_\rho}$ das von T_1 in $\mathbf{C}[T_1, \dots, T_n]_{(T_1)}$ erzeugte Ideal entspricht. Ist nun $u = \sum_{i=1}^n a_i u_i$ und damit $a_i = \langle u, v_i \rangle$, so ist

$$\text{ord}_{\mathbb{V}_\rho}(\chi^u) = \text{ord}_{\{0\} \times (\mathbf{C}^*)^{n-1}}(T_1^{a_1} \cdot \dots \cdot T_n^{a_n}) = a_1 = \langle u, v_\rho \rangle. \blacksquare$$

Die Gruppe \mathbb{T} operiert als Gruppe von Automorphismen von X auf $\text{Div}_W(X)$ auf folgende Weise:

$$(14.2.1) \quad \mathbb{T} \times \text{Div}_W(X) \rightarrow \text{Div}_W(X), \quad (t, \sum a_Y Y) \mapsto \sum a_{t^{-1} \cdot Y} Y.$$

Damit ist die Gruppe $\text{Div}_W^{\mathbb{T}}(X)$ der unter dieser Wirkung *invarianten* Divisoren wohldefiniert. Sie ist im Vergleich zur Gruppe aller Divisoren bemerkenswert klein:

14.2 Bemerkung

$$\text{Div}_W^{\mathbb{T}}(X) = \bigoplus_{\rho \in \Delta^1} \mathbb{Z} \cdot \mathbb{V}_\rho.$$

Beweis Da jedes \mathbb{V}_ρ invariant ist, enthält die rechte Seite nur invariante Divisoren. Ist umgekehrt $D = \sum a_Y Y \in \text{Div}_W^{\mathbb{T}}(X)$ nicht von dieser Form, so schneidet einer der in D echt auftretenden Primdivisoren — etwa Z — nach (14.1.0) den Torus \mathbb{T} . Damit gilt wegen der Invarianz von D folgende Anzahlabschätzung für die Divisoren tZ mit $t \in \mathbb{T}$:

$$\#\{Y; a_Y \neq 0\} \geq \#\{tZ; t \in \mathbb{T}\};$$

die erste Menge ist nach Definition von D endlich, die zweite jedoch unendlich, da sie wegen $Z \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$ den Torus \mathbb{T} überdeckt. ■

14.3 Korollar *Ist der Fächer Δ nicht entartet, so ist die kanonische Abbildung*

$$M \rightarrow \text{Div}_H^{\mathbb{T}}(X), \quad u \mapsto \text{div } \chi^u$$

injektiv.

Beweis Es ist zu zeigen, daß zu $u_1 \neq u_2$ aus M verschiedene $\text{div } \chi^{u_i}$ gehören, i.e., daß $\sum_{\rho \in \Delta_1} \langle u_i, v_\rho \rangle \mathbb{V}_\rho$ durch u_i bestimmt ist. Das ist jedoch der Fall, da der von den $v_\rho \in \Delta^1$ erzeugte Vektorraum ganz $N_{\mathbb{R}}$ ist. ■

Des weiteren betrachten wir folgende, durch die Multiplikation induzierte Wirkung von \mathbb{T} auf $\mathbb{C}[M]$:²³⁾

$$(14.2.2) \quad \mathbb{T} \times \mathbb{C}[M] \rightarrow \mathbb{C}[M], \quad (t, f) \mapsto t \cdot f := f \circ \mu(t).$$

Sie erfüllt die „Homogenitätsbedingung“

$$(14.2.3) \quad t \cdot \chi^u = \chi^u(t) \chi^u,$$

denn für jedes $x \in \mathbb{T}$ gilt $(t \cdot \chi^u)(x) = \chi^u(tx) = \chi^u(t) \chi^u(x)$.

14.4 Lemma Ist W ein \mathbb{T} -invarianter Untervektorraum von $\mathbb{C}[M]$, so gilt für die Indexmenge $\Gamma(W) := \{u \in M; \chi^u \in W\}$:

$$W = \bigoplus_{u \in \Gamma(W)} \mathbb{C} \cdot \chi^u.$$

Beweis Ersichtlich gilt die Inklusion „ \supset “. Falls sie keine Gleichheit ist, wähle man unter allen f aus dem Komplement eines mit einer Darstellung $f = a_1 \chi^{u_1} + \dots + a_r \chi^{u_r}$ minimaler Länge mit $\chi^{u_j} \in \mathbb{C}[M]$; ersichtlich ist dann $r \geq 2$. Man fixiere ein $t \in \mathbb{T}$, das $\chi^{u_1}(t) \neq \chi^{u_2}(t)$ erfüllt. Dann ist $\chi^{u_1}(t)f - t \cdot f \in W$ nach (14.2.3) eine Linearkombination von $\chi^{u_1}, \dots, \chi^{u_r}$ mit Koeffizienten $a_1(\chi^{u_1}(t) - \chi^{u_1}(t))$ vor χ^{u_1} , also eine Kombination nur von $\chi^{u_2}, \dots, \chi^{u_r}$ mit nicht verschwindendem Koeffizienten vor χ^{u_2} , die damit nicht in $\bigoplus_{u \in I} \mathbb{C} \cdot \chi^u$ liegt. Dies widerspricht der Minimalität von r . ■

Für $u \in M$ und einen Untervektorraum W von $\mathbb{C}[M]$ läßt sich ein *Gewichtsraum*

$$W_{\chi^u} := \{f \in W; t \cdot f = \chi^u(t)f, \quad \forall t \in \mathbb{T}\}$$

zum Gewicht χ^u definieren. Ist W zusätzlich \mathbb{T} -invariant, so liefert die Zerlegung aus 14.4 folgende Gewichtszerlegung:

$$(14.4.1) \quad W = \bigoplus_{u \in \Gamma(W)} W_{\chi^u}.$$

B. Cartierdivisoren

Ein Weildivisor D in X heißt bekanntlich Cartierdivisor, wenn eine offene Überdeckung aus Mengen $U \subset X$ existiert, auf denen $D|_U$ ein Hauptdivisor ist. Damit sind Hauptdivisoren spezielle Cartierdivisoren. Mit $\text{Div}_{\mathbb{C}}(X)$ bzw. $\text{Div}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{T}}(X)$ bezeichnen wir die Untergruppe der *Cartierdivisoren* bzw. *invarianten Cartierdivisoren* von $\text{Div}_{\mathbb{W}}(X)$.

²³⁾ Diese Abweichung von der für nicht abelsche Transformationsgruppen üblichen Definition ist für abelsche Gruppen mathematisch unbedenklich, für die Untersuchung von Gewichtszerlegungen jedoch angenehm.

Für die verschiedenen Divisorentypen erhalten wir Inklusionen

$$(14.5.1) \quad \begin{array}{ccccc} \text{Div}_H^{\mathbb{T}}(X) & \subset & \text{Div}_C^{\mathbb{T}}(X) & \subset & \text{Div}_W^{\mathbb{T}}(X) \\ \cap & & \cap & & \cap \\ \text{Div}_H(X) & \subset & \text{Div}_C(X) & \subset & \text{Div}_W(X) , \end{array}$$

die wir in diesem und im nächsten Paragraphen weiter untersuchen werden.

Für jeden Divisor D in X wird in der Garbe ${}_X\mathcal{R}$ der rationalen Funktionen auf X eine ${}_X\mathcal{O}$ -Untergarbe durch

$$U \mapsto \mathcal{O}_D(U) := \{f \in {}_X\mathcal{R}(U); \text{div}(f) + D|_U \geq 0\}$$

definiert. Nennt man eine ${}_X\mathcal{O}$ -Garbe \mathcal{G} auf X „lokal frei“ vom Rang $m \in \mathbb{N}$, wenn eine offene Überdeckung (U_i) von X mit Isomorphismen $\mathcal{G}|_{U_i} \cong {}_{U_i}\mathcal{O}^m$ existiert, so ist \mathcal{O}_D für einen Cartierdivisor D lokal frei vom Rang 1: Ist D auf $U \subseteq X$ ein Hauptdivisor, dort also von der Form $D|_U = \text{div}(f|_U)$ für ein $f \in {}_X\mathcal{R}(X)$, so induziert

$$(14.5.2) \quad \mu(f): \mathcal{O}_D(U) \rightarrow \mathcal{O}(U), \quad h \mapsto hf$$

ersichtlich einen Garbenisomorphismus auf U , und $\mathcal{O}_D|_U$ ist der von f^{-1} erzeugte ${}_U\mathcal{O}$ -Untermodul von ${}_U\mathcal{R}$, da (14.5.2) sich auf alle offenen Teilmengen von U überträgt.

Wir werden in 15.6 darauf eingehen, daß den Cartierdivisorenklassen gerade die Isomorphieklassen lokaler freier ${}_X\mathcal{O}$ -Moduln vom Rang 1 entsprechen.²⁴⁾

Auf affinen torischen Varietäten sind invariante Cartierdivisoren stets Hauptdivisoren:

14.5 Satz *Für jede affine torische Varietät X_σ gilt $\text{Div}_C^{\mathbb{T}}(X_\sigma) = \text{Div}_H^{\mathbb{T}}(X_\sigma)$: Ist D ein invarianter Cartierdivisor in X_σ , dann existiert ein $u \in M$ mit*

$$D = \text{div}(\chi^u) .$$

Beweis Man wähle eine offene Umgebung $U \subseteq X_\sigma$ des Fußpunktes x_σ , für die ein $f \in {}_X\mathcal{R}(X)$ existiert mit $D|_U = \text{div}(f)|_U$; ohne Einschränkung sei U eine Hauptmenge²⁵⁾ in X . Dann betrachte man $g := \mu(f)^{-1}(1)$ gemäß (14.5.2). Nach 14.6 läßt sich g als endliche Summe $\sum f_i g_i$ mit $f_i \in \mathcal{O}(U)$ und $g_i \in \mathcal{O}_D(X)$ darstellen. Ohne Einschränkung ist mit $gf(x_\sigma) = 1$ etwa $g_1 f(x_\sigma) \neq 0$. Mit D ist auch der Vektorraum $\mathcal{O}_D(X) \subset \mathbb{C}[M]$ bezüglich \mathbb{T} invariant und damit resultiert aus 14.4, daß sogar ein $u \in M$ existiert mit $\chi^u f(x_\sigma) \neq 0$. Also gilt $\text{div}(\chi^{-u}|_W) = \text{div}(f|_W)$ für eine geeignete invariante Umgebung

²⁴⁾ Für einen algebraischen Beweis vgl. [Pk, Th. 16.17]. Es sei nur am Rande vermerkt, daß die Weildivisorenklassen genau den reflexiven ${}_X\mathcal{O}$ -Moduln vom Rang 1 entsprechen, vgl. [Re, 4.18] bzw. [Pk, 15.21].

²⁵⁾ Für eine algebraische Varietät X und $g \in \mathcal{O}(X)$ bezeichnet $X_g := X \setminus V(g)$ die zugehörige offene Hauptmenge.

W von x_σ in U . Da x_σ im Abschluß aller Bahnen von X_σ liegt und somit W alle Bahnen schneidet, folgt für die Primdivisoren Y in X_σ :

$$\text{ord}_Y \chi^{-u} = \text{ord}_Y f = \text{ord}_Y D . \quad \blacksquare$$

Für das dabei verwendete Resultat erinnern wir an folgende Notation für einen Modul L über einem Ring R : Für $f \in R$ bezeichnen

$$S_f := \{f^\ell; \ell \in \mathbb{N}\}, \quad R_f := S_f^{-1}R \quad \text{und} \quad L_f := R_f \otimes_R L .$$

14.6 Lemma *Ist X eine irreduzible affin algebraische Varietät und D ein Cartierdivisor, dann gilt für alle $f \in \mathcal{O}(X)$:*

$$\mathcal{O}_D(X_f) \cong \mathcal{O}(X_f) \otimes_{\mathcal{O}(X)} \mathcal{O}_D(X) .$$

Beweis Für eine X - \mathcal{O} -Garbe \mathcal{G} von rationalen Funktionen auf X gilt (in Analogie zu [AG, 3.23])

$$\mathcal{G}(X_f) \cong (\mathcal{G}(X))_f .$$

Hier folgt speziell

$$\mathcal{O}_D(X_f) \cong (\mathcal{O}_D(X))_f = (\mathcal{O}(X))_f \otimes_{\mathcal{O}(X)} \mathcal{O}_D(X) \cong \mathcal{O}(X_f) \otimes_{\mathcal{O}(X)} \mathcal{O}_D(X) . \quad \blacksquare$$

14.7 Beispiel Stellen wir $X = \mathbb{P}_n$ wie in 4.8 2a) über einen Fächer Δ dar mit

$$v_i = e_i, \quad i \geq 1; \quad v_0 = -\sum e_i; \quad \sigma_i = \text{keg}(v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_n)$$

und bezeichnen mit D_0 den invarianten Weildivisor $V(\mathbb{P}_n; v_0)$. Er ist zwar gemäß 15.7 2) kein Hauptdivisor, nach 14.9 jedoch ein Cartierdivisor. Wir wollen gemäß 14.5 die darstellenden u_{σ_i} auf den Standardkarten $X_{\sigma_i} = \{z \in \mathbb{P}_n; z_i \neq 0\}$ bestimmen: Für $i = 0$ ist $D|_{X_{\sigma_0}} = 0$, also auch $u_{\sigma_0} = 0$. Für $i \geq 1$ und $j \neq i$ ist nach 14.1 das Gleichungssystem

$$\langle u_{\sigma_i}, v_j \rangle = \begin{cases} 1, & j = 0 \\ 0, & j \neq 0 \end{cases}$$

zu lösen; es folgt sofort in der dualen Basis $u_{\sigma_i} = -f_i$. \blacksquare

14.8 Korollar *Ist Δ simplizial und D ein invarianter Weildivisor in X_Δ , so existiert ein $b \in \mathbb{N}_{>0}$, für das bD ein Cartierdivisor ist.*

Beweis Der Divisor D hat die Form $\sum a_\rho \mathbb{V}_\rho$. Für jedes $\sigma \in \Delta$ existiert eine rationale Linearform ℓ_σ aus dem Vektorraum $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M$, die für jede der $\dim \sigma$ Kanten $\rho \in \sigma^1$ den Wert $\ell_\sigma(v_\rho) = a_\rho$ annimmt. Damit existiert ein „Hauptnenner“ $b \in \mathbb{N}_{>0}$, so daß alle $b\ell_\sigma$ sogar in M liegen, also das System $(b\ell_\sigma)_{\sigma \in \Delta}$ einen Cartierdivisor definiert: Auf X_σ gilt

$$bD = \sum_{\rho \in \sigma^1} ba_\rho \mathbb{V}_\rho = \text{div}(\chi^{b\ell_\sigma}) . \quad \blacksquare$$

Damit erhalten wir einen neuen Beweis für ein uns grundsätzlich aus [AG] bekanntes Resultat:

14.9 Bemerkung Ist X_Δ glatt, so gilt

$$\operatorname{Div}_C^\mathbb{T}(X_\Delta) = \operatorname{Div}_W^\mathbb{T}(X_\Delta).$$

Denn Glattheit bedeutet, daß für jedes $\sigma \in \Delta$ die $\rho \in \sigma^1$ eine \mathbb{Z} -Basis von $N \cap \operatorname{lin} \sigma$ bilden, also b im Beweis von 14.8 als 1, d.h. ℓ_σ aus M wählbar ist. ■

Allgemeiner gilt bekanntlich für faktorielle Varietäten

$$\operatorname{Div}_C(X) = \operatorname{Div}_W(X)$$

(vgl. [AG, 10.3, 10.6, 10.16]). Dies bringt uns hier jedoch keine neuen Einsichten, da faktorielle torische Varietäten regulär sind, vgl. 9.20. Wir werden in 15.14 zeigen, daß auf einer torischen Varietät genau dann alle Weildivisoren Cartierdivisoren sind, wenn X_Δ regulär ist. Andererseits entsprechen den simplizialen Fächern nach 9.21 genau die fastfaktoriellen torischen Varietäten. In diesem Fall ist der Unterschied zwischen invarianten Cartier- und Weildivisoren nach 14.9 endlich; im nichtsimplicialen Fall gibt es dagegen „viel mehr“ Weil- als Cartierdivisoren:

14.10 Beispiel Es sei σ ein N -Kegel im \mathbb{R}^3 mit quadratischer Basis. Dann folgt aus 14.2 zunächst $\operatorname{Div}_W^\mathbb{T}(X_\sigma) = \mathbb{Z}^4$, während $\operatorname{Div}_C^\mathbb{T}(X_\sigma) \subset M = \mathbb{Z}^3$ nach 14.5 gilt; gemäß 14.14 darf man übrigens die Inklusion durch ein Gleichheitszeichen ersetzen.

Wir wollen invariante Cartierdivisoren mit Hilfe von Trägerfunktionen untersuchen. Dabei hieß für einen Fächer Δ eine Funktion $h: |\Delta| \rightarrow \mathbb{R}$ *Trägerfunktion*, falls sie auf jedem $\sigma \in \Delta$ Einschränkung eines $u_\sigma \in M$ ist. Offensichtlich genügt es dabei, die Kegel $\sigma \in \Delta^{\max}$ zu betrachten. Die linearen Funktionen u_σ sind dabei mod $M \cap \sigma^\perp$ eindeutig bestimmt. Trägerfunktionen sind auf jedem $\sigma \in \Delta$ linear, insgesamt also stetig, und nehmen auf Gitterpunkten nur ganzzahlige Werte an. Bezeichnen wir für $\rho \in \Delta^1$ den minimalen erzeugenden Gittervektor wieder mit v_ρ , so gilt:

14.11 Lemma *Es sei Δ ein volldimensional erzeugter Fächer. Die Zuordnung*

$$\{h; h \text{ Trägerfunktion auf } \Delta\} \rightarrow \operatorname{Div}_C^\mathbb{T}(X_\Delta), \quad h \mapsto \sum_{\rho \in \Delta^1} -h(v_\rho) \mathbb{V}_\rho$$

ist ein Isomorphismus abelscher Gruppen.

Beweis Für eine Trägerfunktion $h = (-u_\sigma)_{\sigma \in \Delta^{\max}}$ ist der invariante Weildivisor $D := \sum -h(v_\rho) \mathbb{V}_\rho$ auf Grund von 14.1 in der Tat ein Cartierdivisor, denn es gilt für jedes σ

$$D|_{X_\sigma} = \sum_{\rho \in \sigma^1} \langle u_\sigma, v_\rho \rangle \mathbb{V}_\rho = \operatorname{div}(\chi^{u_\sigma}|_{X_\sigma}).$$

Die angegebene Abbildung ist ersichtlich linear und injektiv. Für den Nachweis der Surjektivität sei nun $D = \sum a_\rho \mathbb{V}_\rho \in \operatorname{Div}_C^\mathbb{T}(X_\Delta)$; für jedes $\sigma \in \Delta^{\max}$ fixiere man nach

14.5 ein $u_\sigma \in M$ mit $\operatorname{div}(\chi^{u_\sigma})|_{X_\sigma} = D|_{X_\sigma}$. Wenn durch $h_D|_\sigma := -u_\sigma|_\sigma$ eine Funktion h_D auf $|\Delta|$ definiert wird, ist sie offensichtlich das gesuchte Urbild von D . Dies trifft nun in der Tat zu: Für $\sigma \cap \sigma'$ gilt $\operatorname{div}(\chi^{u_\sigma}|_{X_{\sigma \cap \sigma'}}) = \operatorname{div}(\chi^{u_{\sigma'}}|_{X_{\sigma \cap \sigma'}})$, und damit für jede Kante ρ von $\sigma \cap \sigma'$

$$\langle u_\sigma, v_\rho \rangle = \langle u_{\sigma'}, v_\rho \rangle, \quad \text{i.e., } u_\sigma|_{\sigma \cap \sigma'} = u_{\sigma'}|_{\sigma \cap \sigma'}. \quad \blacksquare$$

Damit gehört zu $D \in \operatorname{Div}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{T}}(X)$ eine wohlbestimmte Trägerfunktion, die wir mit h_D bezeichnen; eine explizite Berechnungsvorschrift von h_D leiten wir in 16.7 her.

14.12 Beispiel Für den Divisor D_0 im \mathbb{P}_n aus Beispiel 14.7 gilt

$$h_{D_0|_{\sigma_i}} = \begin{cases} f_i, & i \neq 0 \\ 0, & i = 0. \end{cases} \quad \blacksquare$$

Wir streben eine weitere Charakterisierung invarianter Cartierdivisoren vermöge der Fächerdaten an (dabei bezeichnet $\mathbb{Z} \cdot \mathbb{C}^*$ die freie abelsche Gruppe mit Erzeugendem \mathbb{C}^*):

14.13 Künnethformel für Divisoren Für eine torische Varietät X induziert die Zuordnung

$$\operatorname{Div}_{\mathbb{W}}^{\mathbb{T}}(X) \cong \operatorname{Div}_{\mathbb{W}}^{\mathbb{T}}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \cdot \mathbb{C}^* \rightarrow \operatorname{Div}_{\mathbb{W}}^{\mathbb{T} \times \mathbb{C}^*}(X \times \mathbb{C}^*), \quad D \mapsto D \otimes \mathbb{C}^* \mapsto D \times \mathbb{C}^*$$

einen Isomorphismus zwischen den jeweiligen Gruppen der Haupt-, Cartier- und Weildivisoren.

Der Beweis ergibt sich für Weildivisoren unmittelbar daraus, daß invariante Weildivisoren in $X \times \mathbb{C}^*$ wegen der komponentenweisen Wirkung von $\mathbb{T} \times \mathbb{C}^*$ von Primdivisoren der Form $D \times \mathbb{C}^*$ erzeugt werden; dabei ist D notwendig \mathbb{T} -invariant. Für Cartier- bzw. Hauptdivisoren folgt daraus ebenfalls die Behauptung. \blacksquare

Für $\tau \prec \sigma$ induziert die Inklusion $\sigma^\perp \subset \tau^\perp$ eine kanonische Projektion

$$M/(M \cap \sigma^\perp) \rightarrow M/(M \cap \tau^\perp);$$

damit erhalten wir:

14.14 Lemma Für jedes $\sigma \in \Delta$ gilt

$$(14.14.1) \quad \operatorname{Div}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{T}}(X_\sigma) \cong M/(M \cap \sigma^\perp);$$

diese Identifikation ist mit der Seitenbeziehung $\tau \prec \sigma$ verträglich.

Beweis Ist $\dim \sigma = n$ und damit $\sigma^\perp = 0$, so ist für die Darstellung $D = \operatorname{div}(\chi^{u_\sigma})$ gemäß 14.5 das Element $u_\sigma \in M$ eindeutig bestimmt, da die Werte $\langle u_\sigma, v_\rho \rangle$ nach 14.1 auf dem Erzeugendensystem $\{v_\rho; \rho \in \sigma^\perp\}$ von N festliegen. Für $\dim \sigma = d < n$ ist in

geeigneten Koordinaten $\sigma = \tilde{\sigma} \times \mathfrak{o}$ und damit $\sigma^\perp = (\tilde{\sigma})^\perp \oplus \mathbb{R}^{n-d}$, woraus mit 14.13 die Isomorphie folgt. Die Verträglichkeit ist unmittelbar zu sehen. ■

Bezeichnen wir die Restklasse von $m \in M$ in $M/(M \cap \sigma^\perp)$ kurz mit \overline{m}_σ , so erhalten wir die gesuchte Darstellung für die invarianten Cartierdivisoren:

14.15 Satz Für die invarianten Cartierdivisoren gilt

$$\begin{aligned} \text{Div}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{T}}(X_\Delta) &\cong \ker \left[\bigoplus_{\sigma \in \Delta^{\max}} M/(M \cap \sigma^\perp) \longrightarrow \bigoplus_{\sigma \neq \sigma' \in \Delta^{\max}} M/(M \cap (\sigma \cap \sigma')^\perp) \right] \\ (\overline{m}_\sigma) &\mapsto \left(\overline{(m_\sigma)}_{\sigma \cap \sigma'} - \overline{(m_{\sigma'})}_{\sigma \cap \sigma'} \right) \end{aligned}$$

Beweis Man verifiziert unmittelbar eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \text{Div}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{T}}(X_\Delta) \rightarrow \bigoplus_{\sigma \in \Delta^{\max}} \text{Div}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{T}}(X_\sigma) \rightarrow \bigoplus_{\sigma \neq \sigma' \in \Delta^{\max}} \text{Div}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{T}}(X_{\sigma \cap \sigma'}) .$$

Aus Lemma 14.14 ergibt sich, daß man die Gruppen $\text{Div}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{T}}(X_\sigma)$ jeweils durch die Restklassengruppen $M/(M \cap \sigma^\perp)$ ersetzen darf, woraus die Behauptung folgt. ■

Aufgabe 14.1 Es sei Δ der Fächer im \mathbb{R}^3 , der aus den Strahlen $(1, 0, 1)$, $(1, 2, -1)$ und der 0 besteht. Man berechne die Divisorenklassengruppe $\text{Cl Div}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{T}}(X_\Delta)$.

Aufgabe 14.2 Für einen nicht entarteten Fächer Δ und $k := k(\Delta)$ beschreibe man zum Homomorphismus

$$\vartheta: \mathbb{Z}^n \cong M \rightarrow \text{Div}_{\mathbb{W}}^{\mathbb{T}}(X_\Delta), \quad m \mapsto \sum_{\rho \in \Delta^1} \langle m, v_\rho \rangle \mathbb{V}_\rho$$

den induzierten Homomorphismus

$$\mathbb{X}(\vartheta): \text{Hom}(\mathbb{Z}^k, \mathbb{C}^*) \cong (\mathbb{C}^*)^k \rightarrow (\mathbb{C}^*)^n \cong \text{Hom}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{C}^*)$$

explizit und zeige, daß er surjektiv ist.

Aufgabe 14.3 Es sei x_0 ein Fixpunkt in der torischen Varietät X_Δ .

- i) Man zeige, daß x_0 auf mindestens n invarianten Primdivisoren liegt.
- ii) Wann gibt es genau n solcher Primdivisoren?

Aufgabe 14.4 Es sei D ein invarianter Weildivisor in einer affinen torischen Varietät X_σ . Man zeige, daß ein $f \in \mathcal{O}(X_\sigma)$ existiert, dessen Ordnung längs D genau 1 ist.

15. Geradenbündel

In diesem Abschnitt vertiefen wir die Untersuchung der Cartierdivisoren mit Hilfe der Theorie der Geradenbündel. Insbesondere zeigen wir, daß Divisorenklassen stets durch invariante Divisoren repräsentiert werden.

Zunächst stellen wir aus der Literatur einige einfache Tatsachen über die bereits in 10.1 eingeführten Geradenbündel auf einer torischen Varietät X zusammen, vgl. etwa [Ha, II Ex. 5.18], [Kp, § 54 B Supplement], [Ku, § 36]. Uns kommt es hier vor allem auf eine Beschreibung über lokale Koordinaten in X an. Dazu seien

- 1) $(U_i)_{i \in I}$ eine Zariski-offene Überdeckung der torischen Varietät X und $U_{ij} := U_i \cap U_j$;
- 2) $g_{ij} \in \mathcal{O}^*(U_{ij})$ für jedes Paar $(i, j) \in I^2$ eine invertierbare reguläre Funktion, genannt „Übergangsfunktion“.

Für diese gelte die *Kozykelbedingung*

$$(15.0.1) \quad \text{Für alle Indizes } i, j, k \in I \text{ ist } g_{ij} \cdot g_{jk} = g_{ik} .$$

Vermerken wir, daß daraus insbesondere $g_{ij} = 1/g_{ji}$ folgt. Auf Grund der Bedingung (15.0.1) lassen sich je zwei Elemente der Menge $\{U_i \times \mathbb{C}; i \in I\}$ vermöge der Abbildung $\text{id}_{U_{ij}} \times g_{ji}$ wie folgt längs $U_{ij} \times \mathbb{C}$ verheften:

$$\begin{array}{ccc} \text{id}_{U_{ij}} \times g_{ji} & : & U_{ij} \times \mathbb{C} \rightarrow U_{ij} \times \mathbb{C} \\ & & \cap \qquad \qquad \cap \\ & & U_i \times \mathbb{C} \qquad U_j \times \mathbb{C} \quad . \end{array}$$

Die dabei entstehende algebraische Varietät \mathcal{L} oder (\mathcal{L}, g_{ij}) heiße das *Geradenbündel auf X mit den Übergangsfunktionen g_{ij}* . Zum Totalraum \mathcal{L} gehört ersichtlich eine kanonische Projektion $\pi: \mathcal{L} \rightarrow X$; ihre Fasern $\pi^{-1}(x)$ tragen die Struktur einer komplexen Geraden, auf denen die komplexe Zahl $g_{ij}(x)$ für $x \in U_{ij}$ durch Multiplikation einen Automorphismus induziert. Die kanonisch entstehenden Isomorphismen $\varphi_i: \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{C}$ heißen auch „lokale Trivialisierungen“.

15.1 Beispiele 1) Sind alle $g_{ij} = 1$, so heißt (\mathcal{L}, g_{ij}) das triviale Geradenbündel $X \times \mathbb{C}$.

2) Das tautologische²⁶⁾ Bündel auf $X = \mathbb{P}_n$ ist gegeben durch

$$\mathcal{L} := \left\{ ([z], v) \in \mathbb{P}_n \times \mathbb{C}^{n+1}; v \in \mathbb{C} \cdot z \right\} \xrightarrow{\pi = \text{pr}_1} \mathbb{P}_n .$$

²⁶⁾ Interpretiert man den Fußpunkt als eine Gerade, so bringt die Faser darüber eigentlich keine zusätzliche Information.

Unter einem *Homomorphismus von Geradenbündeln* $\varphi: (\mathcal{L}, g_{ij}) \rightarrow (\mathcal{L}', g'_{ij})$ über X verstehen wir einen fasertreuen (i.e., $\varphi \circ \pi' = \pi$) Morphismus algebraischer Varietäten $\varphi: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'$, der faserweise linear ist. Damit ist auch der Begriff des Isomorphismus von Geradenbündeln über X wohldefiniert.

Man überzeugt sich leicht davon, daß die Isomorphieklasse eines Geradenbündels (\mathcal{L}, g_{ij}) nicht von der gewählten Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ abhängt: Ist $(V_j)_{j \in J}$ eine Verfeinerung und definiert man Übergangsfunktionen h_{kl} durch Einschränkung aus geeigneten g_{ij} , so erhält man ein isomorphes Geradenbündel. Damit läßt sich leicht folgende Bemerkung nachweisen:

15.2 Bemerkung Zwei Geradenbündel (\mathcal{L}, g_{ij}) und (\mathcal{L}', g'_{ij}) zur gleichen Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von X sind genau dann isomorph, wenn reguläre Funktionen $g_i \in \mathcal{O}^*(U_i)$ zu $i \in I$ existieren mit

$$g_{ij} = g_i g'_{ij} g_j^{-1} \quad \text{für alle } i, j \in I. \blacksquare$$

Die Menge der Isomorphieklassen von Geradenbündeln auf X läßt sich mit Hilfe des Tensorprodukts zu einer abelschen Gruppe machen: Sind (\mathcal{L}, g_{ij}) und (\mathcal{L}', g'_{ij}) Geradenbündel zur gleichen Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von X , so heißt das vom System von Übergangsfunktionen

$$g_{ij}^{\otimes} := g_{ij} g'_{ij}$$

definierte Geradenbündel $(\mathcal{L}, g_{ij}) \otimes (\mathcal{L}', g'_{ij}) = \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}'$ das Tensorprodukt und das vom System von Übergangsfunktionen

$$(g_{ij}^{-1})_{i,j \in I}$$

definierte Geradenbündel $(\mathcal{L}, g_{ij})^{-1} = \mathcal{L}^{-1}$ das inverse Geradenbündel. Man verifiziert leicht, daß bezüglich des Tensorproduktes $X \times \mathbb{C}$ das neutrale und $\mathcal{L}^{-1} = \text{Hom}(\mathcal{L}, X \times \mathbb{C})$ das zu \mathcal{L} inverse Element ist.

15.3 Definition Die Menge der Isomorphieklassen von Geradenbündeln \mathcal{L} über X , versehen mit dem Tensorprodukt als algebraischer Operation, heißt *Picardgruppe* $\text{Pic}(X)$ von X .

Als „Schnitt“ eines Morphismus $\psi: Y \rightarrow Z$ bezeichnet man ein Rechtsinverses, also einen Morphismus $s: Z \rightarrow Y$ mit $\psi \circ s = \text{id}_Z$. Ist ψ ein Morphismus algebraischer Varietäten und s eine rationale Abbildung, so sprechen wir von einem „rationalen“ Schnitt.

15.4 Beispiele 1) Die Schnitte im trivialen Geradenbündel auf X sind gerade die regulären Funktionen auf X , wobei die „Schnittfläche“ der Graph der zugehörigen Funktion ist.

2) Über die affine Standardkarte $U_0 = \mathbb{P}_n \setminus V(z_0)$ des \mathbb{P}_n bestimmen wir einen rationalen Schnitt s im tautologischen Bündel \mathcal{L} auf \mathbb{P}_n durch

$$s: U_0 \rightarrow \mathcal{L}, \quad [z] \mapsto ([z], (1, \frac{z_1}{z_0}, \dots, \frac{z_n}{z_0})) .$$

Für ein Geradenbündel $\pi: (\mathcal{L}, g_{ij}) \rightarrow X$ werde mit

$$\Gamma(X; (\mathcal{L}, g_{ij}))$$

die Menge der globalen regulären Schnitte im Geradenbündel \mathcal{L} bezeichnet. Sie trägt kanonisch die Struktur eines ${}_X\mathcal{O}(X)$ -Moduls: Mit Hilfe der lokalen Trivialisierungen $U_i \times \mathbf{C}$ läßt sich ein (regulärer) Schnitt s als ein System $(s_i)_{i \in I}$ regulärer Funktionen $s_i \in \mathcal{O}(U_i)$ mit der Verträglichkeitsbedingung $s_i = g_{ij}s_j$ für alle i, j charakterisieren. Damit lassen sich Summen regulärer Schnitte und skalare Multiplikation mit regulären Funktionen auf X faserweise definieren.

Fixieren wir nun eine lokale Trivialisierung über einer Karte U_i , so ist der Vektorraum $\Gamma(U_i, \mathcal{L}) \cong {}_X\mathcal{O}(U_i)$ als Untereralgebra von ${}_X\mathcal{R}(X)$ interpretierbar. Die Prägarbe

$$U \mapsto \Gamma(U, \mathcal{L}), \quad U \subseteq X$$

ist ersichtlich eine Garbe ${}_X\mathcal{O}_{\mathcal{L}}$, die durch die Wahl der lokalen Trivialisierung zu einer Untergarbe von ${}_X\mathcal{R}$ isomorph wird.

15.5 Bemerkung Die Garbe ${}_X\mathcal{O}_{\mathcal{L}}$ ist eine lokalfreie Garbe vom Rang 1. ■

Ist umgekehrt \mathcal{G} eine lokalfreie Garbe vom Rang 1 auf X — solche Garben werden auch „invertierbar“ genannt, so gehört zu ihr kanonisch eine Isomorphieklasse von Geradenbündeln: Es seien (U_i) eine offene Überdeckung von X und $\mathcal{G}|_{U_i} \cong U_i\mathcal{O}$. Dann existieren Garbenisomorphismen $\varphi_{ij}: U_j\mathcal{O}|_{U_{ij}} \rightarrow U_i\mathcal{O}|_{U_{ij}}$; sie sind von der Form $\varphi_{ij} = (\text{id}_{U_{ij}}, g_{ij})$ mit $g_{ij} \in \mathcal{O}(U_{ij})$. Ersichtlich erfüllt das System (g_{ij}) die Kozykelbedingung und definiert damit ein Geradenbündel über X .

Auch in der Menge der Isomorphieklassen invertierbarer Garben läßt sich mit Hilfe des halmweise definierbaren Tensorproduktes eine Gruppenstruktur einführen. Damit gilt ([Ku, 36.9]):

15.6 Bemerkung Die Picardgruppe $\text{Pic}(X)$ ist isomorph zur Gruppe der Isomorphieklassen invertierbarer Garben auf X . ■

Wir werden daher zwischen invertierbaren Garben und Geradenbündeln meist nicht unterscheiden. Außerdem werden wir der Einfachheit halber die Äquivalenzklassen meist mit dem gleichen Symbol bezeichnen wie ihre Repräsentanten.

Wir wollen diese Überlegungen für die Untersuchung von Divisoren fruchtbar machen. Wie üblich betrachten wir zu den Divisorengruppen auch die zugehörigen Klassengruppen. Aus dem Diagramm (14.5.1) ergibt sich als einfache Konsequenz ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \text{Div}_{\mathbf{C}}^{\mathbb{T}}(X)/\text{Div}_H^{\mathbb{T}}(X) & \subset & \text{Div}_{\mathbf{W}}^{\mathbb{T}}(X)/\text{Div}_H^{\mathbb{T}}(X) \\ \cap & & \cap \\ \text{Div}_{\mathbf{C}}(X)/\text{Div}_H(X) & \subset & \text{Div}_{\mathbf{W}}(X)/\text{Div}_H(X) . \end{array}$$

Wir zeigen in 15.11, daß die senkrechten Inklusionen in Wahrheit Gleichheiten sind, was die Untersuchung der Restklassengruppen auf endlich erzeugte Gruppen reduziert. Dabei bezeichnen wir mit $\text{Cl Div}_W(X) := \text{Div}_W(X)/\text{Div}_H(X)$ die Gruppe der Weildivisorenklassen. In Anspielung auf die Chowgruppe tritt in der Literatur dafür auch die Bezeichnung $A_{n-1}(X)$ mit $n := \dim_{\mathbb{C}} X$ auf, worauf wir in § 17 zurückkommen werden.

Unter Verwendung der Bezeichnung R^* für die Einheitengruppe eines Integritätsbereiches R erhält man für die Weildivisorengruppe die exakte Sequenz

$$(15.7.1) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}(X)^* \rightarrow \mathcal{R}(X)^* \rightarrow \text{Div}_W(X) \rightarrow \text{Cl Div}_W X \rightarrow 0.$$

Denn für $f \in \mathcal{R}(X)^*$ ist $\text{div } f$ genau dann der Nulldivisor, wenn f regulär und ohne Nullstelle ist.

Wir erinnern an folgende

15.7 Beispiele 1) $\text{Cl Div}_W(X_\sigma) = 0$ ist dazu äquivalent, daß X_σ regulär ist.

2) $\text{Cl Div}_W(\mathbb{P}_n) = \mathbb{Z} \cdot [H]$, wobei H eine beliebige Hyperebene im \mathbb{P}_n ist.

3) Für eine irreduzible Hyperfläche $Y \hookrightarrow \mathbb{P}_n$ vom Grad d ist $\text{Cl Div}_W(\mathbb{P}_n \setminus Y) \cong \mathbb{Z}/(d)$.

Beweis 1) Ist X_σ glatt, so liefert 14.5

$$0 = \text{Cl Div}_{\mathbb{C}}(X_\sigma) = \text{Cl Div}_W(X_\sigma).$$

Gilt umgekehrt $\text{Cl Div}_W(X_\sigma) = 0$, so ergibt [AG,10.32], daß $\mathcal{O}(X_\sigma)$ und damit X_σ faktoriell und folglich nach 9.20 regulär ist. — Zu 2) sei auf [AG, 10.30], zu 3) auf [AG, 10.34] verwiesen. ■

Darüber hinaus erinnern wir an einen Spezialfall des Lokalisierungslemmas ([AG, 10.29]:

15.8 Lokalisierungslemma Für $\rho_1, \dots, \rho_s \in \Delta^1$ sei $U := X_\Delta \setminus \bigcup_j \mathbb{V}_{\rho_j}$. Dann existiert eine exakte Sequenz

$$\bigoplus_{j=1}^s \mathbb{Z} \cdot \mathbb{V}_{\rho_j} \rightarrow \text{Cl Div}_W(X) \rightarrow \text{Cl Div}_W(U) \rightarrow 0. \quad \blacksquare$$

Wir haben bereits in (14.5.2) einen Zusammenhang von Geradenbündeln mit Cartierdivisoren hergestellt. Dieser liefert eine Abbildung

$$\vartheta: \text{Div}_{\mathbb{C}}(X) \rightarrow \text{Pic}(X), \quad D \mapsto \mathcal{O}_D$$

mit den Eigenschaften (vgl. [Ha, II.6.12 – 15]):

- (i) ϑ ist Gruppenhomomorphismus,
- (ii) $\ker \vartheta = \text{Div}_H(X)$,
- (iii) ϑ ist surjektiv.

15.9 Folgerung Der Homomorphismus ϑ induziert einen Isomorphismus

$$\text{Cl Div}_{\mathbb{C}}(X) := \text{Div}_{\mathbb{C}}(X)/\text{Div}_H(X) \cong \text{Pic}(X) . \blacksquare$$

Für rationale Schnitte $s: X \rightarrow \mathcal{L}$ läßt sich ersichtlich die ‘‘Vielfachheit‘‘ $v_Y(s)$ längs einem Primdivisor $Y \hookrightarrow X$ definieren, indem man zu einer Y schneidenden lokalen Karte sowie der zugehörigen Trivialisierung übergeht und die dort definierte Vielfachheit (vgl. [AG, 10.9]) übernimmt. Damit läßt sich der *Divisor eines rationalen Schnittes* s wie folgt definieren:

$$(15.9.1) \quad \text{div}(s) = \sum_{Y \text{ Primdivisor}} v_Y(s) \cdot Y .$$

Die nächste Aufgabe verallgemeinert (14.5.2):

Aufgabe 15.1 Es sei s ein rationaler Schnitt in einem Geradenbündel \mathcal{L} über der normalen algebraischen Varietät X . Man gebe einen kanonischen Isomorphismus $\mathcal{O}_{\text{div}(s)} \cong \mathcal{L}$ an (für 15.10).

15.10 Beispiel Es sei $s: \mathbb{P}_n \rightarrow \mathcal{L}$ der in Beispiel 15.4 2) definierte Schnitt des tautologischen Bündels $\pi: \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{P}_n$:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_0) & \xrightarrow{\varphi_0} & U_0 \times \mathbb{C}, & ([z], \alpha(1, \frac{z_1}{z_0}, \dots, \frac{z_n}{z_0})) & \mapsto & ([z], \alpha) \\ \searrow & & \swarrow & & \searrow & \swarrow \\ & & U_0 & & [z] & \end{array}$$

mit zugehörigem $\varphi_{0*s}: [z] \mapsto 1$. Auf den anderen U_i mit Trivialisierungen

$$\varphi_i: \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{C}, \quad ([z], v) \mapsto \left(\left[\frac{z_0}{z_i}, \dots, \frac{\widehat{z_i}}{z_i}, \dots, \frac{z_n}{z_i} \right], v_i \right)$$

ergibt sich damit $\varphi_{i*s} = \frac{z_i}{z_0}$. Also ist $\text{div}(\varphi_{i*s})|_{U_i} = -V(z_0)$ und somit

$$\text{div}(s) = -V(\mathbb{P}_n; z_0) =: -H.$$

Aus Aufgabe 15.1 ergibt sich damit ein Isomorphismus

$$\mathcal{L} \cong \mathbb{P}_n \mathcal{O}_{-H} =: \mathbb{P}_n \mathcal{O}(-1) .$$

15.11 Satz Es seien Δ ein nicht entarteter Fächer und $X = X_{\Delta}$. Dann existiert ein exaktes kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & M & \rightarrow & \text{Div}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{T}}(X) & \rightarrow & \text{Cl Div}_{\mathbb{C}}(X) & \rightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \cap & & \cap & & \\ 0 & \rightarrow & M & \rightarrow & \text{Div}_{\mathbb{W}}^{\mathbb{T}}(X) & \rightarrow & \text{Cl Div}_{\mathbb{W}}(X) & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Insbesondere gilt

$$\text{Cl Div}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{T}}(X) = \text{Cl Div}_{\mathbb{C}}(X) \subset \text{Cl Div}_{\mathbb{W}}^{\mathbb{T}}(X) = \text{Cl Div}_{\mathbb{W}}(X)$$

und $\text{Rang Cl Div}_{\mathbb{W}}(X) = |\Delta^1| - n$. Falls Δ^n nicht leer ist, so ist $\text{Cl Div}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{T}}(X)$ eine freie abelsche Gruppe.

Beweis Für den Torus $\mathbb{T} = X_{\circ} \subset X$ ist $\text{Cl Div}_{\mathbb{W}}(\mathbb{T}) = 0$ nach Beispiel 15.7. Aus dem Lemma 15.8 ergibt sich eine exakte Sequenz (vgl. auch 14.2)

$$\text{Div}_{\mathbb{W}}^{\mathbb{T}}(X) \cong \bigoplus_{\rho \in \Delta^1} \mathbb{Z} \cdot \mathbb{V}_{\rho} \xrightarrow{\beta} \text{Cl Div}_{\mathbb{W}}(X) \rightarrow \text{Cl Div}_{\mathbb{W}}(\mathbb{T}) = 0.$$

Damit wird zunächst $\text{Cl Div}_{\mathbb{W}}(X)$ von invarianten Divisoren erzeugt. Für die Exaktheit der unteren Sequenz der Behauptung bleibt Kern $\beta = \text{Div}_{\mathbb{H}}^{\mathbb{T}}(X)$ zu bestimmen; weil Δ nicht entartet ist, liefert 14.3 eine Inklusion $M \subset \text{Div}_{\mathbb{H}}^{\mathbb{T}}(X)$. Diese ist eine Gleichheit. Denn für ein $f \in \mathcal{R}(X)$ ist $\text{div } f$ genau dann \mathbb{T} -invariant, wenn $f|_{\mathbb{T}}$ in $\mathbb{C}[M]$ invertierbar ist, also f zu einem Charakter von \mathbb{T} gehört. — Damit folgt auch $\ker(\alpha: \text{Div}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{T}}(X) \rightarrow \text{Cl Div}_{\mathbb{C}}(X)) = M$; es bleibt zu zeigen, daß α surjektiv ist. Jede Klasse $[D] \in \text{Cl Div}_{\mathbb{C}}(X) \subset \text{Cl Div}_{\mathbb{C}}(X)$ läßt sich von einem $\tilde{D} \in \text{Div}_{\mathbb{W}}^{\mathbb{T}}(X)$ repräsentieren; ersichtlich gilt dann $D \in \text{Div}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{T}}(X)$.

Die Rangabschätzung folgt nunmehr mit 14.2 aus $\dim M_{\mathbb{R}} = n$. Schließlich ist $\text{Pic}(X)$ frei, wenn ein $\tau \in \Delta^n$ existiert: Nach 14.15 gilt

$$\text{Div}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{T}}(X) \cong \ker \left[\bigoplus_{\sigma \in \Delta^{\max}} M/M \cap \sigma^{\perp} \longrightarrow \bigoplus_{\sigma \neq \sigma' \in \Delta^{\max}} M/M \cap (\sigma \cap \sigma')^{\perp} \right].$$

Aus $\tau^{\perp} = 0$ folgt $M/M \cap \tau^{\perp} = M$ und damit

$$\text{Div}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{T}}(X) \subset M \oplus \bigoplus_{\tau \neq \sigma \in \Delta^{\max}} M/M \cap \sigma^{\perp}.$$

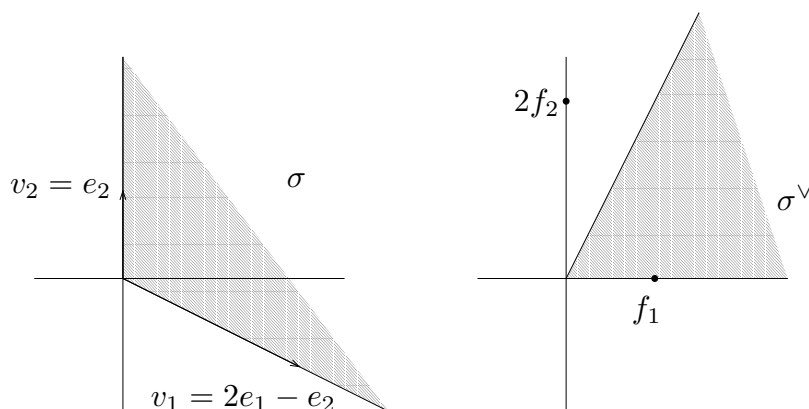
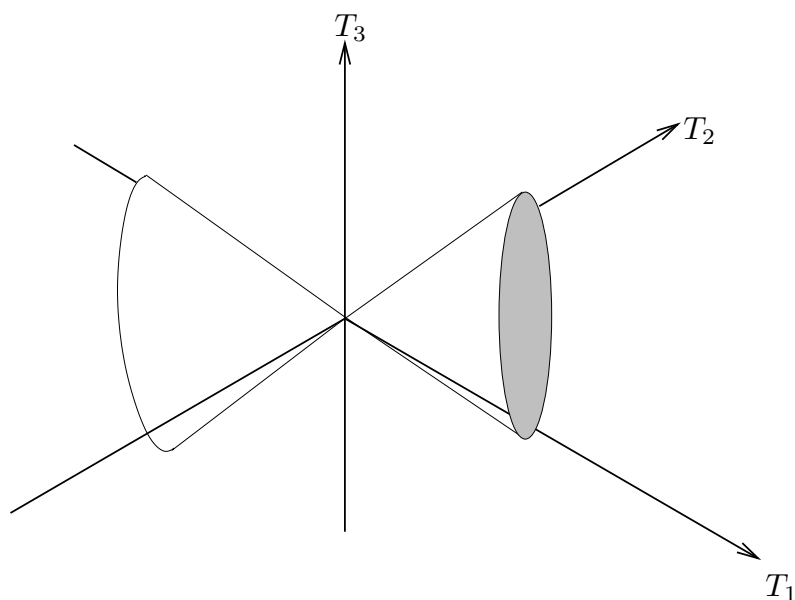
Wegen der bereits etablierten exakten Sequenz

$$0 \rightarrow M \rightarrow \text{Div}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{T}}(X) \rightarrow \text{Pic}(X) \rightarrow 0$$

haben wir mod M zu rechnen. Ersichtlich ist jedes $M \cap \sigma^{\perp}$ ein saturiertes Untergitter von M , also ist $M/M \cap \sigma^{\perp}$ frei und somit auch

$$\text{Pic}(X) \subset \bigoplus_{\tau \neq \sigma \in \Delta^{\max}} M/M \cap \sigma^{\perp}. \quad \blacksquare$$

15.12 Beispiele Es sei $N = \mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2 = V$.

FIGUR 15.1 $\text{keg}(2e_1 - e_2, e_2)$ und $\text{keg}(2e_1 - e_2, e_2)^\vee$.FIGUR 15.2 $V(\mathbb{C}^3; T_1 T_2 - T_3^2)$.

1) Zu $v_1 := 2e_1 - e_2$, $v_2 := e_2$ und $\sigma := \text{keg}(v_1, v_2)$ vgl. Figur 15.1.

Die zugehörige Algebra A_σ ist von der Form $\mathbb{C}[U_1, U_1 U_2, U_1 U_2^2]$; setzen wir

$$T_1 := U_1, \quad T_2 := U_1 U_2^2, \quad T_3 := U_1 U_2,$$

so ist $X_\sigma \cong V(\mathbb{C}^3; T_1 T_2 - T_3^2)$, vgl. Figur 15.2.

Zu den beiden Kantenvektoren v_1, v_2 gehören die beiden invarianten Primdivisoren von X_σ ; da diese gleichzeitig invariante Divisoren von \mathbb{C}^3 sein müssen, kommen nur Koordinatenachsen in Frage, nämlich $V(X_\sigma; T_1)$ und $V(X_\sigma; T_2)$. In der Bezeichnung $\mathbb{V}_i := \mathbb{V}_{\text{keg}(v_i)}$ gilt damit $\text{Div}_{\mathbb{W}}^{\mathbb{T}}(X_\sigma) = \mathbb{Z} \cdot \mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{Z} \cdot \mathbb{V}_2$. Jeder Hauptdivisor läßt sich mit einem $u = (p, q) \in M$ in der Form

$$\text{div } \chi^{(p,q)} = \langle (p, q), v_1 \rangle \mathbb{V}_1 + \langle (p, q), v_2 \rangle \mathbb{V}_2 = (2p - q) \mathbb{V}_1 + q \mathbb{V}_2$$

darstellen. Damit sind zwar $2\mathbb{V}_1, 2\mathbb{V}_2$ und $\mathbb{V}_1 - \mathbb{V}_2$ Hauptdivisoren, nicht aber \mathbb{V}_1 oder \mathbb{V}_2 . Es folgt unmittelbar mit 14.5

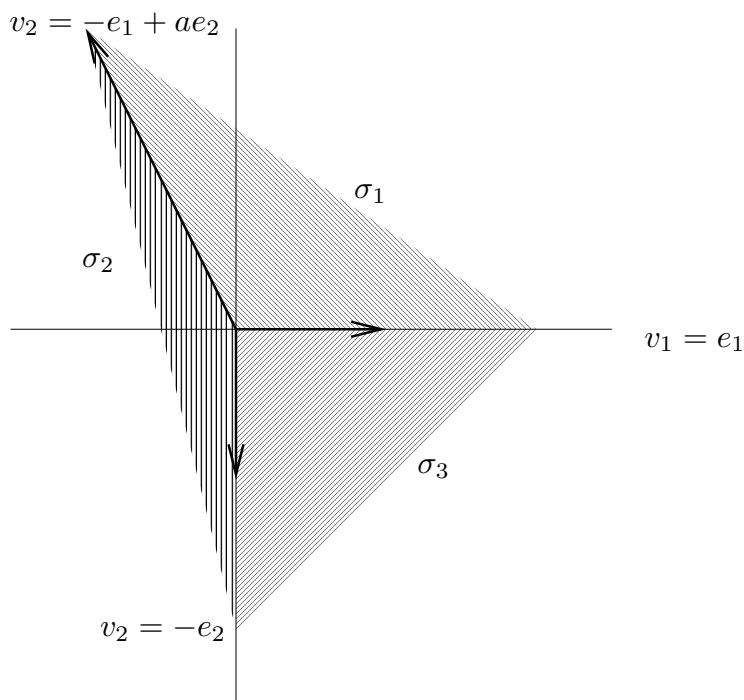
$$0 = \text{Cl Div}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{T}}(X_{\sigma}) \subset \text{Cl Div}_{\mathbb{W}}^{\mathbb{T}}(X_{\sigma}) = \mathbb{Z}/(2).$$

Insbesondere braucht $\text{Cl Div}_{\mathbb{W}}(X_{\Delta})$ im Unterschied zu $\text{Cl Div}_{\mathbb{C}}(X_{\Delta})$ nicht frei zu sein, wenn ein n -Kegel in Δ existiert!

2) Es sei Δ der im \mathbb{R}^2 von

$$v_1 = e_1, \quad v_2 = -e_1 + ae_2 \quad \text{mit } a > 1 \quad \text{und } v_3 = -e_2$$

erzeugte vollständige \mathbb{Z}^2 -Fächer, vgl. Figur 15.3.



FIGUR 15.3 Der Fächer zu Beispiel 15.12 2.

Die Erzeugenden von $M \cong \mathbb{Z} \cdot \text{div } \chi^{(1,0)} \oplus \mathbb{Z} \cdot \text{div } \chi^{(0,1)}$ liefern in der Gruppe $\text{Div}_{\mathbb{W}}^{\mathbb{T}}(X_{\Delta}) = \mathbb{Z} \cdot \mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{Z} \cdot \mathbb{V}_2 \oplus \mathbb{Z} \cdot \mathbb{V}_3$ die Relationen

$$\text{div } \chi^{(1,0)} = \mathbb{V}_1 - \mathbb{V}_2, \quad \text{div } \chi^{(0,1)} = a\mathbb{V}_2 - \mathbb{V}_3.$$

Für die Restklassen mod M bedeutet dies

$$[\mathbb{V}_1] = [\mathbb{V}_2] \quad \text{und} \quad [\mathbb{V}_3] = a[\mathbb{V}_2],$$

also folgt $\text{Cl Div}_W(X_\Delta) = \mathbb{Z}[\mathbb{V}_2]$. Zur Bestimmung der Gruppe $\text{Pic}(X_\Delta)$ sei der Divisor $D := b_1\mathbb{V}_1 + b_2\mathbb{V}_2 + b_3\mathbb{V}_3 \in \text{Div}_W^\mathbb{T}(X_\Delta)$ ein Cartierdivisor; dann muß mit der Bezeichnung $X_j := X_{\text{keg}(v_j, v_{j+1})}$ eine Darstellung

$$D|_{X_1} = \text{div } \chi^{(p,q)} = p\mathbb{V}_1 - (p - aq)\mathbb{V}_2$$

existieren, i.e., $[D]$ liegt in $\mathbb{Z}a \cdot [\mathbb{V}_2]$. Andererseits ist $a\mathbb{V}_2$ ein Cartierdivisor:

$$a\mathbb{V}_2|_{X_1} = \text{div } \chi^{(0,1)}, \quad a\mathbb{V}_2|_{X_2} = \text{div } \chi^{(-a,0)}, \quad a\mathbb{V}_2|_{X_3} = \text{div } \chi^{(0,0)}.$$

Insgesamt folgt

$$\text{Pic}(X_\Delta) = \mathbb{Z}a \cdot [\mathbb{V}_2] \subset \mathbb{Z} \cdot [\mathbb{V}_2] = \text{Cl Div}_W^\mathbb{T}(X_\Delta). \quad \blacksquare$$

15.13 Korollar *Es sei Δ ein Fächer in V , in dem alle nichtsimplizialen maximalen Kegel n -dimensional sind. Dann sind äquivalent:*

- 1) Δ ist simplizial.
- 2) Zu jedem $D \in \text{Div}_W^\mathbb{T}(X)$ existiert ein $a \in \mathbb{N}$ mit $aD \in \text{Div}_C^\mathbb{T}(X)$.
- 3) $\text{Pic}(X) \otimes \mathbb{Q} = \text{Cl Div}_W(X) \otimes \mathbb{Q}$.
- 4) $\text{Rang Pic}(X) = \#(\Delta^1) - n$.

Beweis Die Folgerung 1) \Rightarrow 2) wurde in 14.8 gezeigt; 2) \Rightarrow 3) ist trivial, und 3) \Rightarrow 4) folgt unmittelbar aus 15.11. 4) \Rightarrow 1): Nehmen wir an, es gebe einen nichtsimplizialen Kegel $\sigma \in \Delta^n$. Wir wollen daraus $\text{Rang}(\text{Cl Div}_W(X)/\text{Cl Div}_C(X)) \geq 1$ ableiten. Zunächst ist $\text{Rang}(\text{Cl Div}_W(X_\sigma)) = \#(\sigma^1) - n \geq 1$ nach 15.11. Damit existiert eine Klasse D aus $\text{Cl Div}_W(X_\sigma) \subset \text{Cl Div}_W(X)$, die eine freie zyklische Untergruppe erzeugt. Nach 14.5 ist $\text{Cl Div}_C(X_\sigma) = 0$, also kommen die Klasse D und keines ihrer Vielfachen nicht einmal auf X_σ von einem Cartierdivisor, geschweige denn auf ganz X . \blacksquare

Ähnlich zeigt man die Umkehrung zu 14.9:

15.14 Korollar *Eine torische Varietät ist genau dann regulär, wenn jeder invariante Weildivisor ein Cartierdivisor ist.*

Beweis Es sei $\text{Div}_C^\mathbb{T}(X_\Delta) = \text{Div}_W^\mathbb{T}(X_\Delta)$. Die Regularität von X_Δ braucht nur lokal nachgewiesen zu werden, also für alle X_σ mit $\sigma \in \Delta^{\text{max}}$. Ohne Einschränkung habe σ die Dimension n . Dann gilt

$$0 \stackrel{14.5}{=} \text{Cl Div}_C(X_\sigma) \stackrel{15.11}{=} \text{Cl Div}_W(X_\sigma) \stackrel{9.17}{=} \mathbb{Z}^{k(\sigma)-n} \oplus \bigoplus_{j=2}^n \mathbb{Z}_{\varepsilon_j};$$

also hat σ genau n Kanten, und die diese erzeugenden primitiven Vektoren bilden eine Matrix, deren Elementarteiler ε_j alle den Wert 1 haben. Somit ist σ regulär. \blacksquare

Aufgabe 15.2 Man zeige für torische Varietäten X_1 und X_2 direkt (ohne Rückgriff auf das allgemein in [AG] gezeigte Resultat)

$$\mathrm{ClDiv}_W(X_1) \oplus \mathrm{ClDiv}_W(X_2) \cong \mathrm{ClDiv}_W(X_1 \times X_2).$$

Was gilt für Cartierdivisoren?

Aufgabe 15.3 Man berechne die Weil- und Cartierdivisorenklassengruppen für folgende torische Varietäten:

- i) für die affine Varietät X_σ , zum dreidimensionalen Kegel mit quadratischer Grundfläche σ (vgl. 3.11).
- ii) für die vollständige Varietät X_{Δ_P} zum Würfel P im \mathbb{R}^3 mit Ecken $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$. Dabei sei N das von den Ecken des Würfels erzeugte Untergitter des \mathbb{Z}^3 .

Aufgabe 15.4 In Figur 5.5. wurde eine reguläre Unterteilung des Tetraeders angegeben, deren zugehöriger Fächer Δ nicht polytopisch ist. Man berechne $\mathrm{ClDiv}_C(X_\Delta)$.

Aufgabe 15.5 Es sei $P := \mathrm{konv}((a, b) \in \mathbb{R}^2; a, b \in \{0, \pm 1\})$. Für den vom Polytop $P + e$ in $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}e \cong \mathbb{R}^3$ erzeugten Fächer Δ bestimme man X_Δ und $\mathrm{ClDiv}_W(X_\Delta)$.

Aufgabe 15.6 Es sei $\Delta := \mathfrak{S}(\mathrm{keg}(e_1, e_2, e_3 - e_2), \mathrm{keg}(e_2, e_3 - e_2, e_3 - e_1))$ im \mathbb{R}^3 . Man bestimme X_Δ und seine Divisorenklassengruppen.

Aufgabe 15.7 Es bezeichne Δ den Fächer zum deformierten Würfel im \mathbb{R}^3 aus Figur 5.9. Man berechne $\mathrm{ClDiv}_C(X_\Delta)$ und vergleiche dies mit der Picardgruppe zum Standardwürfel.

16. Projektive torische Varietäten

Mit Hilfe strikt konkaver Trägerfunktionen, die gerade den amplen Divisoren entsprechen, werden die projektiv algebraischen unter den torischen Varietäten charakterisiert. Zur Vermeidung von für uns überflüssigen technischen Komplikationen betrachten wir im ganzen Paragraphen nur „volldimensional erzeugte“ Fächer Δ , was durch die Bedingung

$$(16.0) \quad \Delta^{\max} = \Delta^n$$

charakterisiert wird.

Jedem invarianten Cartierdivisor D in $X = X_\Delta$ hatten wir gemäß 14.11 wie folgt eine Trägerfunktion h_D zugeordnet: Ist $D|_{X_\sigma} = \chi^{-u_\sigma}$ für $\sigma \in \Delta^n$, so ist

$$(16.0.0) \quad h_D = (u_\sigma)_{\sigma \in \Delta^n} \quad \text{und} \quad D = \sum_{\rho \in \Delta^1} -h_D(v_\rho) \mathbb{V}_\rho.$$

Dem entspricht ein konvexes M -Polyeder

$$(16.0.1) \quad P_D := \{u \in M_{\mathbb{R}}; u \geq h_D \text{ auf } |\Delta|\}$$

oder

$$(16.0.2) \quad P_D = \bigcap_{\sigma \in \Delta^n} \{u \in M_{\mathbb{R}}; \langle u - u_\sigma, \sigma \rangle \geq 0\} = \bigcap_{\sigma \in \Delta^n} (\sigma^\vee + u_\sigma).$$

Wir erhalten aus $h_D(v_\rho) = -\text{ord } D|_{\mathbb{V}_\rho}$ wegen der stückweisen Linearität von h_D

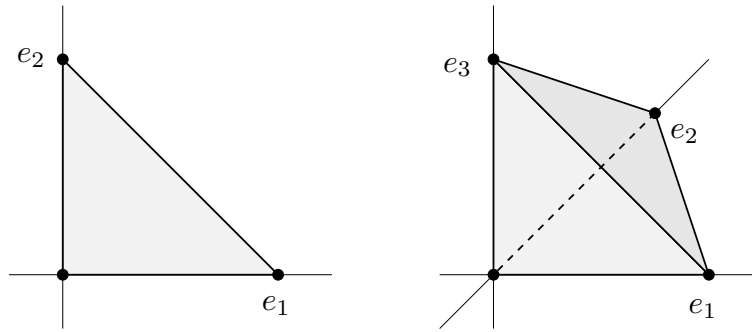
$$(16.0.3) \quad P_D = \{u \in M_{\mathbb{R}}; \langle u, v_\rho \rangle \geq -\text{ord } D|_{\mathbb{V}_\rho}, \forall \rho \in \Delta^1\}.$$

16.1 Beispiele 1) Für $\sigma := \text{keg}(e) \subset \mathbb{R}^1$ und den Divisor $D := \mathbb{V}_\sigma \hookrightarrow X_\sigma$ ist das Polyeder $P_D = [-1, \infty]$ unbeschränkt.

2) Für den Divisor $D_0 \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ aus Beispiel 14.12 gilt

$$P_{D_0} = \{u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n; u_i \geq 0, \sum u_i \leq 1\}.$$

Beweis 1) Evident ist $h_D = -f \in M \cong \mathbb{R}$.



FIGUR 16.1 P_{D_0} zu $D_0 \leftrightarrow \mathbb{P}^n$ für $n = 2, 3$

2) Aus der Beziehung $h_{D_0}|_{\sigma_i} = f_i$ für $i \neq 0$ ergibt sich $\langle f_i, v_j \rangle = \begin{cases} -1, & j = 0 \\ 0, & j \neq 0 \end{cases}$ und damit $f_i \in P_{D_0}$ gemäß (16.0.3). Also liegt auch deren konvexe Hülle in P_{D_0} . Ist umgekehrt $u|_{\sigma_j} \geq h_D|_{\sigma_j}$, so folgt mit $j = 0$ zunächst $u_i = u(e_i) \geq h_D(e_i) = 0$ für $i = 1, \dots, n$; für $j \neq 0$ ergibt sich

$$-u\left(\sum e_i\right) = u(v_0) \geq h_D(v_0) = f_j(v_0) = -1,$$

also $u\left(\sum e_i\right) = \sum u_i \leq 1$. ■

Aufgabe 16.1 Man verifiziere für $D, D' \in \text{Div}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{T}}(X)$ und $a \in \mathbb{N}_{\neq 0}$:

- i) $P_{aD} = aP_D$,
- ii) $P_D + P_{D'} \subset P_{D+D'}$,
- iii) $P_{D+\text{div } \chi^u} = P_D - u$.

16.2 Satz Für einen invarianten Cartierdivisor D gilt:

$$\mathcal{O}_D(X) = \bigoplus_{u \in P_D \cap M} \mathbb{C} \cdot \chi^u.$$

Beweis Aus $|D| \subset X \setminus \mathbb{T}$ folgt, daß jedes $f \in \mathcal{O}_D(X) = \{f \in \mathcal{R}(X); \text{div } f + D \geq 0\}$ auf \mathbb{T} regulär ist, also in $\mathcal{O}(\mathbb{T}) = \bigoplus_{u \in M} \mathbb{C} \cdot \chi^u$ liegt. Setzen wir noch

$$D|_{X_\sigma} =: D_\sigma =: \text{div } \chi^{-u_\sigma},$$

so gilt des weiteren $\mathcal{O}_D(X) = \bigcap_{\sigma \in \Delta^n} \mathcal{O}_{D_\sigma}(X_\sigma)$ und

$$\mathcal{O}_{D_\sigma}(X_\sigma) = \{f \in \mathcal{R}(X); \text{div}(f \cdot \chi^{-u_\sigma})|_{X_\sigma} \geq 0\}.$$

Wählt man für $f \in \mathcal{O}_{D_\sigma}(X_\sigma)$ eine Darstellung $f = \sum_u a_u \chi^u$ gemäß 14.4, so gilt folglich $(u - u_\sigma)|_\sigma \geq 0$, also läßt sich $\mathcal{O}_D(X_\sigma)$ nach (16.0.2) mit $\bigoplus_{u \in M \cap P_{D_\sigma}} \mathbb{C} \cdot \chi^u$ identifizieren. Aus $P_D = \bigcap_{\sigma \in \Delta^n} P_\sigma$ folgt damit die Behauptung. ■

Das folgende Resultat haben wir für vollständige Fächer bereits in Aufgabe 5.14 vorbereitet:

16.3 Satz Ist der Fächer Δ nicht in einem Halbraum von V enthalten und ist $D \in \text{Div}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{T}}(X_{\Delta})$, so ist P_D kompakt und damit ein Polytop. Weiter hat der komplexe Vektorraum $\mathcal{O}_D(X_{\Delta})$ die Dimension $\#(P_D \cap M)$.

Beweis Es sei $D = \sum a_{\rho} \mathbb{V}_{\rho}$. Nach Konstruktion ist P_D Durchschnitt von Halbräumen:

$$P_D = \bigcap_{\rho \in \Delta^1} \{u; \langle u, v_{\rho} \rangle \geq -a_{\rho}\}.$$

Da die Vektoren $v_{\rho} \in \Delta^1$ über $\mathbb{R}_{\geq 0}$ den ganzen Raum \mathbb{R}^n erzeugen, ist dieser Durchschnitt beschränkt und damit kompakt. Die Dimensionsaussage ergibt sich aus 16.2. ■

16.4 Beispiel Es sei $X = \mathbb{P}_2$ mit Gitter $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$. Als darstellenden Fächer Δ wählen wir wieder den von

$$v_1 = e_1, \quad v_2 = e_2, \quad v_3 = -e_1 - e_2$$

erzeugten vollständigen Fächer. Dann ist $\mathcal{O}_{D_0}(\mathbb{P}_2) = \mathcal{O}(-1)(\mathbb{P}_2)$ für $D_0 := -V(\mathbb{P}_2; T_0)$ ein dreidimensionaler, von $\{T_i/T_0; i = 0, 1, 2\}$ erzeugter Vektorraum.

Beweis Gemäß 16.3 haben wir zunächst die Zahl $\#(P_{D_0} \cap M)$ zu bestimmen. Nach Figur 16.1 ist das gerade 3. Für ein explizites Erzeugendensystem verwenden wir 15.10:

$$\mathcal{O}_{D_0}(\mathbb{P}_2) \cong \left\{ f \in \mathbb{C}(\mathbb{P}_2); \text{div } f \geq \text{div } \frac{1}{T_0} \right\}.$$

Ist nun $f = P/Q \in \mathcal{O}_{D_0}(\mathbb{P}_2) \subset \mathbb{C}(\mathbb{P}_2)$ eine teilerfremde Darstellung durch normierte homogene Polynome gleichen Grades, so ist Q wegen der Divisorungleichung Teiler von T_0 , also 1 oder T_0 . Daher kommen höchstens die angegebenen Erzeugenden in Frage. ■

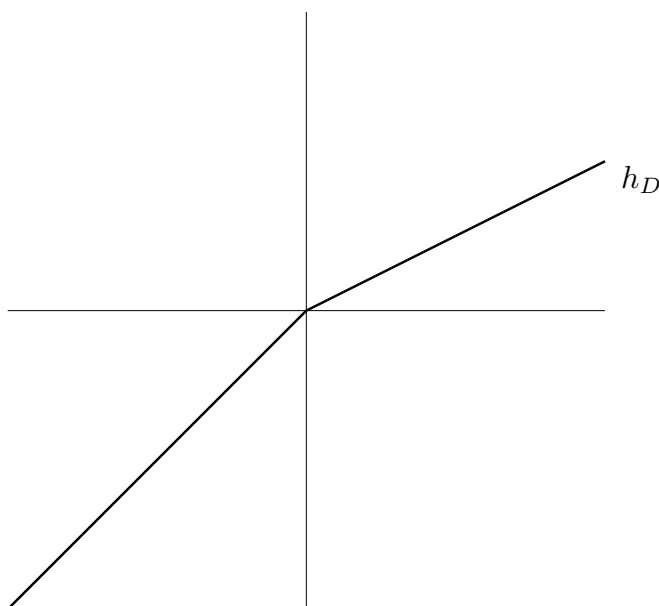
Für die Charakterisierung spezieller Cartierdivisoren kommen wir nun auf die Trägerfunktionen zurück und erinnern an folgende Definition sozusagen „superlinearer“ Funktionen:

16.5 Definition Eine Funktion $h: A \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer konvexen Teilmenge A von V heißt konkav, wenn für alle $t \in [0, 1]$, $v, w \in A$ gilt

$$(16.5.1) \quad h(tv + (1-t)w) \geq th(v) + (1-t)h(w).$$

16.6 Beispiel Für den von $v_1 = e_1$ und $v_2 = -e_1$ aufgespannten Fächer Δ im \mathbb{R}^1 mit $X_{\Delta} = \mathbb{P}_1$ sei $D := a_1 \mathbb{V}_1 + a_2 \mathbb{V}_2$ mit $a_i \in \mathbb{Z}$. Die zugehörige Trägerfunktion

$$h_D: x \mapsto \begin{cases} -a_1 x, & x \geq 0 \\ -a_2 x, & x \leq 0 \end{cases}$$

FIGUR 16.2 Graph von h_D zum Beispiel 16.6

ist genau dann konkav, wenn $a_1 \geq a_2$ ist.

Beweis Bezeichnet $\mu(a): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto a \cdot x$ die Multiplikation mit $a \in \mathbb{R}$, so ist h_D ersichtlich genau dann konkav, wenn dies auf $h_D + \mu(a_1)$ zutrifft; letzteres ist mit $a_1 - a_2 \geq 0$ gleichbedeutend. ■

Allgemeiner können wir uns den Graphen eines konkaven h_D wie in Figur 16.3 zeltförmig vorstellen:

16.7 Konkavitätskriterium In der Darstellung $h = (u_\sigma)_{\sigma \in \Delta^n}$ für eine Trägerfunktion $h: |\Delta| \rightarrow \mathbb{R}$ sind äquivalent:

- 1) $h = \min_{\sigma \in \Delta^n} u_\sigma$;
- 2) $h(v_\rho) \leq u_\sigma(v_\rho)$ für alle $\sigma \in \Delta^n, \rho \in \Delta^1$;
- 3) $h \leq u_\sigma$ für alle $\sigma \in \Delta^n$, d.h., für alle $\sigma \in \Delta^n$ ist $u_\sigma \in P_D$.

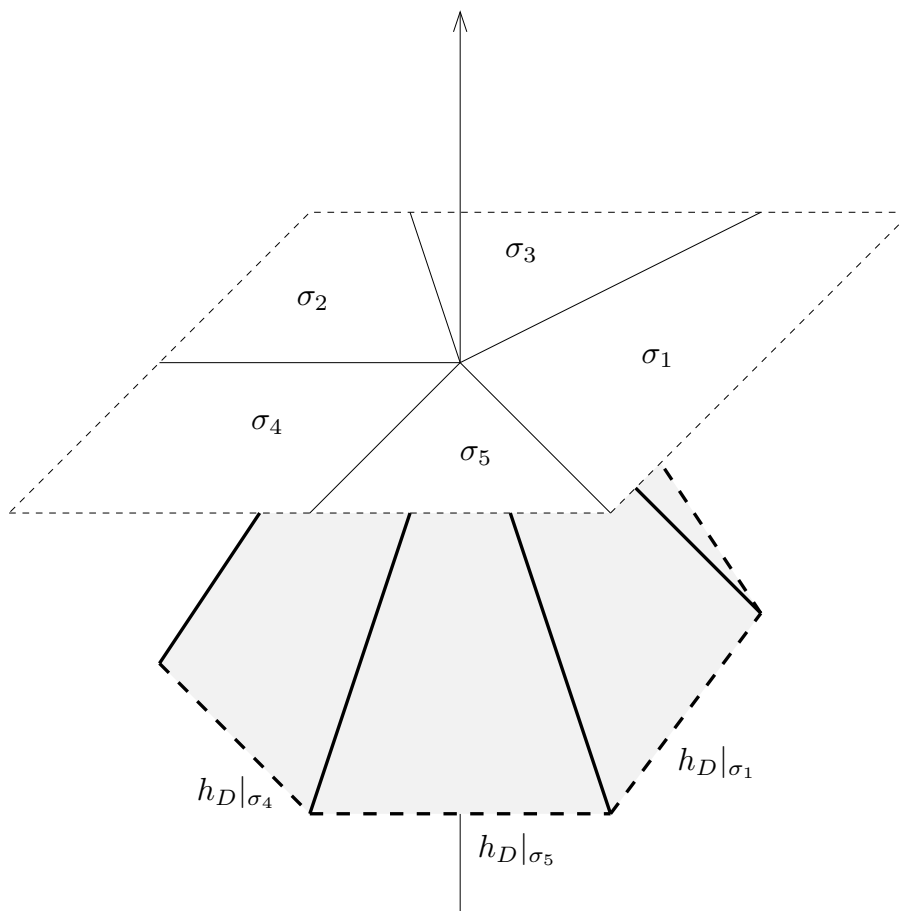
Ist $|\Delta|$ konvex, so sind diese Eigenschaften äquivalent zu:

- 4) h ist konkav, erfüllt also Bedingung (16.5.1).

Beweis Die Behauptungen 1) \Rightarrow 3) \Rightarrow 2) sind trivial. Für die Aussage 2) \Rightarrow 3) seien $\sigma \in \Delta^n$ und $v \in |\Delta|$. Für $v \in |\tau|$ mit $\tau \in \Delta^n$ existiert eine Darstellung $v = \sum_{\rho \in \tau^1} t_\rho v_\rho$ mit $t_\rho \geq 0$. Damit gilt

$$h(v) = u_\tau(v) = \sum_{\rho \in \tau^1} t_\rho u_\tau(v_\rho) = \sum_{\rho \in \tau^1} t_\rho h(v_\rho) \leq \sum_{\rho \in \tau^1} t_\rho u_\sigma(v_\rho) = u_\sigma \left(\sum_{\rho \in \tau^1} t_\rho v_\rho \right) = u_\sigma(v).$$

Schließlich ist 3) \Rightarrow 1) evident, denn es gilt einerseits $h \leq \min u_\sigma$, andererseits aber $h|_\sigma = u_\sigma|_\sigma$.



FIGUR 16.3 Graph eines konkaven h_D .

Der Teil „1) \Rightarrow 4)“ folgt daraus, daß das Minimum konkaver Funktionen konkav ist. Zu „4) \Rightarrow 2)“: Es seien $\sigma \in \Delta^n$ und $\rho \in \Delta^1$. Für $\rho \in \sigma^1$ gilt $h(v_\rho) = u_\sigma(v_\rho)$. Andernfalls wählen wir ein $v \in \sigma^\circ$ und dazu ein $t \in]0, 1[$ mit $tv_\rho + (1 - t)v \in \sigma$. Nach Übergang zur ebenfalls konkaven Funktion $h - u_\sigma$ dürfen wir $u_\sigma = 0$, also $h|_\sigma = 0$ voraussetzen; damit erhalten wir

$$0 = h(tv_\rho + (1 - t)v) \geq th(v_\rho) + (1 - t)h(v) = th(v_\rho) + 0,$$

i.e., $h(v_\rho) \leq 0$, und 2) ist erfüllt. ■

Damit können wir für Trägerfunktionen den Begriff der Konkavität erweitern:

16.8 Definition Eine Trägerfunktion h_D zu einem invarianten Cartierdivisor D heißt konkav, wenn sie die Bedingung $h_D = \min_{u_\sigma \in \Delta^n}$ erfüllt.

16.9 Lemma Ist die Trägerfunktion $h_D = (u_\sigma)_{\sigma \in \Delta^n}$ zu einem invarianten Cartierdivisor D konkav, so liegt der Schnitt χ^{u_σ} in $\mathcal{O}_D(X_\Delta)$ und hat auf X_σ keine Nullstelle.

Beweis Für jedes $\sigma \in \Delta^n$ gilt $u_\sigma \in P_D \cap M$ nach 16.7 3) und damit nach 16.2

$$\chi^{u_\sigma} \in \mathcal{O}_D(X) = \bigoplus_{u \in P_D \cap M} \mathbb{C} \cdot \chi^u.$$

Dem Schnitt χ^{u_σ} entspricht in der Trivialisierung von \mathcal{O}_D mit $\mu(\chi^{-u_\sigma})$ auf X_σ nach (14.5.2) die Funktion 1; er hat also auf X_σ keine Nullstelle. ■

Für eine torische Charakterisierung konkaver h_D benötigen wir zusätzlich folgenden Begriff:

16.10 Definition Ein Geradenbündel \mathcal{L} über X wird „von globalen Schnitten erzeugt“, wenn zu jedem $x \in X$ ein globaler regulärer Schnitt s in \mathcal{L} mit $s(x) \neq 0$ existiert. Entsprechend nennen wir die zugehörige Garbe $\mathcal{O}_\mathcal{L}$ „von globalen Schnitten erzeugt“.

Damit wird $\mathcal{O}_\mathcal{L}$ genau dann von globalen Schnitten erzeugt, wenn für jedes $x \in X$ ein globaler Schnitt $s \in \mathcal{O}_\mathcal{L}(X)$ existiert mit $\mathcal{O}_{\mathcal{L},x} = \mathcal{O}_x \cdot s$. Dabei reichen für ein von globalen Schnitten erzeugtes \mathcal{L} bereits endlich viele Schnitte aus: Ist $s(x) \neq 0$ für ein $x \in X$, so gilt dies in einer ganzen Zariski-offenen Umgebung von x .

16.11 Satz Der Fächer Δ sei volldimensional erzeugt. Ist D ein invarianter Cartierdivisor in X_Δ , so wird \mathcal{O}_D genau dann von globalen Schnitten erzeugt, wenn h_D konkav ist.

Beweis Für $\sigma \in \Delta^n$ sei $D|_{X_\sigma} = \text{div } \chi^{-u_\sigma}$. „ \Leftarrow “ Es sei h_D konkav. Nach 16.9 hat $\chi^{u_\sigma} \in \mathcal{O}_D(X_\Delta)$ auf X_σ keine Nullstelle.

„ \Rightarrow “ Wir verifizieren Kriterium 3) in 16.7, zeigen also $u_\sigma \in P_D$ für jedes $\sigma \in \Delta^n$. Im zugehörigen Fixpunkt x_σ hat nach Voraussetzung wenigstens ein Schnitt aus $\mathcal{O}_D(X) = \bigoplus_{u \in P_D \cap M} \mathbb{C} \cdot \chi^u$ keine Nullstelle; ohne Einschränkung sei er von der Form χ^u für ein $u \in P_D \cap M$. In der Trivialisierung von \mathcal{O}_D auf X_σ mit $\mu(\chi^{-u_\sigma})$ entspricht ihm die Funktion χ^{u-u_σ} mit $\chi^{u-u_\sigma}(x_\sigma) \neq 0$. Damit enthält $\text{div } \chi^{u-u_\sigma}$ für kein $\rho \in \sigma^1$ den Divisor \mathbb{V}_ρ . Also gilt $\langle u - u_\sigma, v_\rho \rangle = 0$ für diese ρ , und damit stimmen u und u_σ auf $\sigma = \text{keg}(\{\rho \in \sigma^1\})$ überein. Aus $\dim \sigma = n$ folgt $u_\sigma = u \in P_D$. ■

Aufgabe 16.2 Für einen invarianten Cartierdivisor D mit kompaktem P_D werde \mathcal{O}_D von globalen Schnitten erzeugt, ferner gelte $S \subset P_D \cap M$. Man zeige, daß $\{\chi^u; u \in S\}$ genau dann \mathcal{O}_D global erzeugt, wenn die Eckpunktmenge P_D^0 in S enthalten ist. Zudem gilt

$$P_D^0 = \{u_\sigma; \sigma \in \Delta^n\}.$$

Es seien nun $\chi^{u_0}, \dots, \chi^{u_r}$ globale Schnitte in \mathcal{O}_D für einen invarianten Cartierdivisor D in der torischen Varietät X_Δ . Bezüglich einer Trivialisierung von \mathcal{O}_D auf einer affinen Karte X_σ wird damit ein Morphismus

$$(16.11.1) \quad \varphi_\sigma: X_\sigma \rightarrow \mathbb{C}^{r+1}, \quad x \mapsto (\chi^{u_0}(x), \dots, \chi^{u_r}(x))$$

definiert; geht man zu einer anderen affinen Karte X_τ über, so unterscheiden sich φ_σ und φ_τ durch Multiplikation mit einem $g_{\sigma\tau} \in \mathcal{O}^*(X_{\sigma\tau})$. Setzen wir nun zusätzlich voraus,

daß \mathcal{O}_D von diesen globalen Schnitten erzeugt wird, so bildet jedes φ_σ nach $(\mathbf{C}^{r+1})^*$ ab, und wir erhalten mit dem selben Symbol bezeichnete Morphismen $\varphi_\sigma: X_\sigma \rightarrow \mathbb{P}_r$. Für $\sigma \in \Delta^n$ und $D|_{X_\sigma} = \text{div } \chi^{-u_\sigma}$ mit einem u_σ von den u_j können wir auch

$$(16.11.2) \quad \varphi_\sigma: X_\sigma \rightarrow \mathbb{P}_r, \quad x \mapsto [\chi^{u_0 - u_\sigma}(x), \dots, 1, \dots, \chi^{u_r - u_\sigma}(x)]$$

schreiben. Die φ_σ setzen sich zu einem globalen Morphismus

$$\varphi: X \rightarrow \mathbb{P}_r, \quad x \mapsto [\chi^{u_0}(x), \dots, \chi^{u_r}(x)]$$

zusammen, weil beim Kartenwechsel die Schnitte mit Funktionen $g_{\sigma\tau} \in \mathcal{O}^*(X_{\sigma \cap \tau})$ multipliziert werden. Durchlaufen die u_j gerade die u_σ für $\sigma \in \Delta^n$ (vgl. Aufgabe 16.2), so verwenden wir die Bezeichnung

$$\varphi_D: X \rightarrow \mathbb{P}_r, \quad x \mapsto [\chi^{u_0}(x), \dots, \chi^{u_r}(x)].$$

Wenn \mathcal{O}_D für volldimensional erzeugtes Δ von globalen Schnitten erzeugt wird, liegt für jedes $\sigma \in \Delta^n$ das zu h_D gehörige u_σ nach 16.11 in $P_D \cap M$. Aus 16.9 folgt

$$(16.11.3) \quad \varphi_D(X_\sigma) \subset \mathbb{P}_r \setminus V(z_\sigma) =: (\mathbb{P}_r)_{z_\sigma} \cong \mathbf{C}^r,$$

wenn man mit z_σ die zu u_σ gehörige homogene Koordinatenfunktion im \mathbb{P}_r bezeichnet.

16.12 Definition Eine Trägerfunktion $h = (u_\sigma)_{\sigma \in \Delta^n}$ auf einem volldimensional erzeugten Fächer Δ heie Δ -streng konkav, wenn $h(v) < u_\sigma(v)$ für alle $v \in |\Delta| \setminus \sigma$ gilt.

16.13 Lemma Der Fächer Δ sei volldimensional erzeugt. Es sei D ein invarianter Cartierdivisor in X_Δ , für den \mathcal{O}_D von globalen Schnitten erzeugt ist. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

- 1) Für alle $\sigma \in \Delta^n$ ist $\varphi_D^{-1}((\mathbb{P}_r)_{z_\sigma}) = X_\sigma$;
- 2) h_D ist Δ -streng konkav.

Beweis Nach (16.11.3) ist in 1) nur die Inklusion „ \subset “ zu untersuchen.

2) \Rightarrow 1) Wir wählen ein $\sigma \in \Delta^n$ und ein $x \in \varphi_D^{-1}((\mathbb{P}_r)_{z_\sigma})$, i.e., $\varphi_D(x) \in (\mathbb{P}_r)_{z_\sigma}$. Dann existiert ein $\sigma' \in \Delta^n$ mit $x \in X_{\sigma'}$. Falls $x \in \mathbb{T}$, so ist $\sigma = \sigma'$ wählbar und damit $x \in X_\sigma$. Andernfalls existiert ein $\rho \in (\sigma')^1$ mit $x \in \mathbb{V}_\rho$. Damit gelte ohne Einschränkung $x = x_\rho$. Nun ist nach (16.11.2)

$$\varphi_D(x_\rho) = [\dots, \chi^{u_\sigma - u_{\sigma'}}(x_\rho), \dots],$$

und es gilt

$$(16.13.1) \quad \chi^{u_\sigma - u_{\sigma'}}(x_\rho) = 0 \iff \langle u_\sigma - u_{\sigma'}, v_\rho \rangle > 0 \iff u_\sigma(v_\rho) > u_{\sigma'}(v_\rho) = h_D(v_\rho);$$

die erste Äquivalenz besagt nämlich gerade, daß \mathbb{V}_ρ in $\text{div } \chi^{u_\sigma - u_{\sigma'}}$ mit positiver Vielfachheit auftritt. Nach Wahl von $x = x_\rho$ ist jedoch $\chi^{u_\sigma - u_{\sigma'}}(x_\rho) \neq 0$ und damit

$u_\sigma(v_\rho) = h_D(v_\rho)$. Aus der vorausgesetzten strengen Konkavität von h_D folgt $v_\rho \in \sigma$, also $\rho \subset \sigma$ und damit $x_\rho \in X_\sigma$.

1) \Rightarrow 2) Zu zeigen ist, daß $u_\sigma(v_\rho) > h(v_\rho)$ falls $v_\rho \notin \sigma$, oder, nach (16.13.1), daß $\chi^{u_\sigma - u_{\sigma'}}(x_\rho) = 0$, falls $v_\rho \in \sigma' \setminus \sigma$ mit $\sigma' \in \Delta^n$. Letzteres ist gleichbedeutend mit $\varphi_D(x_\rho) \notin (\mathbb{P}_r)_{z_\sigma}$. Dies trifft nun zu, weil nach Voraussetzung x_ρ nicht in X_σ liegt. ■

Am interessantesten ist die Situation, wenn der Morphismus φ_D eine (abgeschlossene) Einbettung ist:

16.14 Lemma Die Varietät X_Δ sei vollständig, und D sei ein invarianter Cartierdivisor auf X_Δ . Dann sind äquivalent:

- 1) Die Abbildung φ_D existiert und ist eine Einbettung;
- 2) α) $h_D = (u_\sigma)_{\sigma \in \Delta^n}$ ist Δ -streng konkav;
- β) für alle $\sigma \in \Delta^n$ gilt $S_\sigma = \langle u - u_\sigma; u \in P_D \cap M \rangle$.

Beweis Wir verwenden das Einbettungskriterium aus [AG, Bem. 3.36], nach dem φ_D genau dann eine Einbettung ist, wenn alle $\varphi_D^{-1}((\mathbb{P}_r)_{z_\sigma})$ affin und die zugehörigen Komorphismen

$$\mathcal{O}(\varphi_D^{-1}((\mathbb{P}_r)_{z_\sigma})) \rightarrow \mathcal{O}((\mathbb{P}_r)_{z_\sigma})$$

surjektiv sind.

Für jedes $\sigma \in \Delta^n$ benutzen wir den Komorphismus zu (16.11.3)

$$(\varphi_\sigma)^* : \mathbb{C}\left[\frac{z_0}{z_\sigma}, \dots, \frac{z_r}{z_\sigma}\right] \rightarrow \mathbb{C}[\chi^{u_0 - u_\sigma}, \dots, \chi^{u_r - u_\sigma}] \subset \mathbb{C}[X_\sigma] = \mathbb{C}[S_\sigma].$$

Er ist genau dann surjektiv, wenn S_σ von den $u - u_\sigma$ mit $u \in P_D \cap M$ erzeugt wird.

1) \Rightarrow 2): Es sei $\sigma \in \Delta^n$. Nach dem Einbettungskriterium ist $\varphi_D^{-1}((\mathbb{P}_r)_{z_\sigma})$ eine affine torische Varietät, die X_σ enthält. Weil σ maximal ist, gilt das auch für X_σ , also haben wir eine Mengengleichheit. Damit ist zunächst Bedingung 1) in 16.13 erfüllt, und h_D ist folglich Δ -streng konkav. Aus der Surjektivität von $(\varphi_\sigma)^*$ ergibt sich, daß S_σ von der verlangten Form ist.

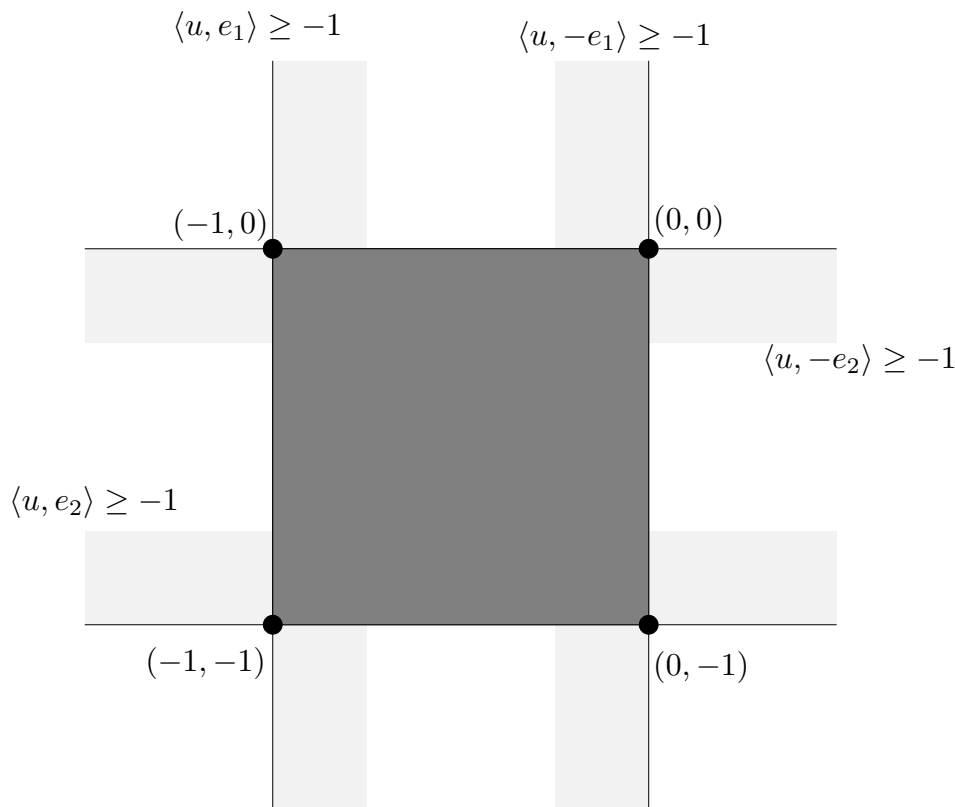
2) \Rightarrow 1): Wiederum aus 16.13 folgt, daß jedes $\varphi_D^{-1}((\mathbb{P}_r)_{z_\sigma}) = X_\sigma$ affin ist. Die Surjektivität von $(\varphi_\sigma)^*$ folgt aus der Voraussetzung über S_σ ; damit sind die Bedingungen des Einbettungskriteriums erfüllt. ■

16.15 Beispiele a) Für $N = \mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$ und den von

$$v_1 = e_1, \quad v_2 = e_2, \quad v_3 = -e_1, \quad v_4 = -e_2$$

erzeugten vollständigen Fächer Δ in \mathbb{R}^2 ist $X_\Delta = \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$. Für $D := \mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2$ mit $\sigma_j := \text{keg}(v_j, v_{j+1})$ und $\mathbb{V}_j := \mathbb{V}_{\sigma_j}$ enthält

$$P_D = \{u; \langle u, e_1 \rangle \geq -1\} \cap \{u; \langle u, e_2 \rangle \geq -1\} \cap \{u; \langle u, -e_1 \rangle \geq 0\} \cap \{u; \langle u, -e_2 \rangle \geq 0\}$$

FIGUR 16.4 Das Polytop P_D zu $D = \mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2$ in $\mathbb{IP}_1 \times \mathbb{IP}_1$

genau vier Gitterpunkte, vgl. Figur 16.4

Die Bedingung 16.14 2) ist erfüllt: Ersichtlich ist h_D Δ -streng konkav. Weiter sei $\sigma_i := \text{keg}(v_i, v_{i+1})$. Dann ist $u_{\sigma_1} = -(1, 1)$ und

$$S_{\sigma_1} = \mathbb{N} \cdot f_1 + \mathbb{N} \cdot f_2 = \mathbb{N} \cdot ((0, -1) - u_{\sigma_1}) + \mathbb{N} \cdot ((-1, 0) - u_{\sigma_1}).$$

Der Graph von h_D ist in Figur 16.5 abgebildet. — Entsprechend behandelt man die anderen Kegel.

Damit läßt sich die Einbettung $\varphi_D: \mathbb{IP}_1 \times \mathbb{IP}_1 \rightarrow \mathbb{IP}_3$ wie folgt beschreiben: In mathematisch positiver Orientierung der Punkte von $P_D \cap M$, beginnend mit 0, ist $\varphi_{\sigma_1}([1, \frac{b}{a}], [1, \frac{d}{c}]) = [1, \frac{a}{b}, \frac{ac}{bd}, \frac{c}{d}]$ und damit

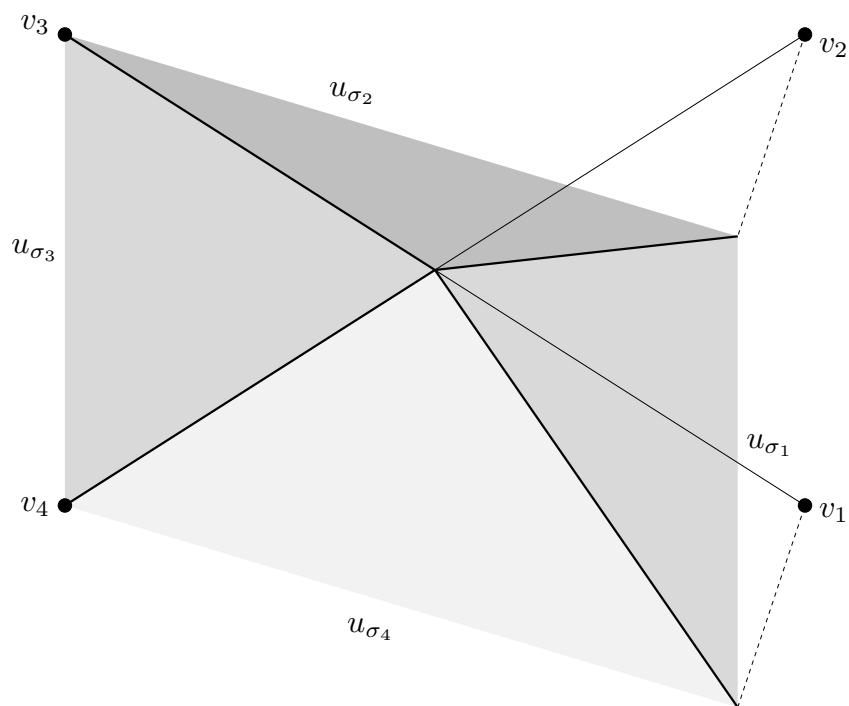
$$\varphi_D([a, b], [c, d]) = [bd, ad, ac, cb] =: [z_0, z_1, z_2, z_3],$$

so daß $\varphi_D(\mathbb{IP}_1 \times \mathbb{IP}_1)$ die singularitätenfreie Quadrik $V(\mathbb{IP}_3; T_0T_2 - T_1T_3)$ ist.

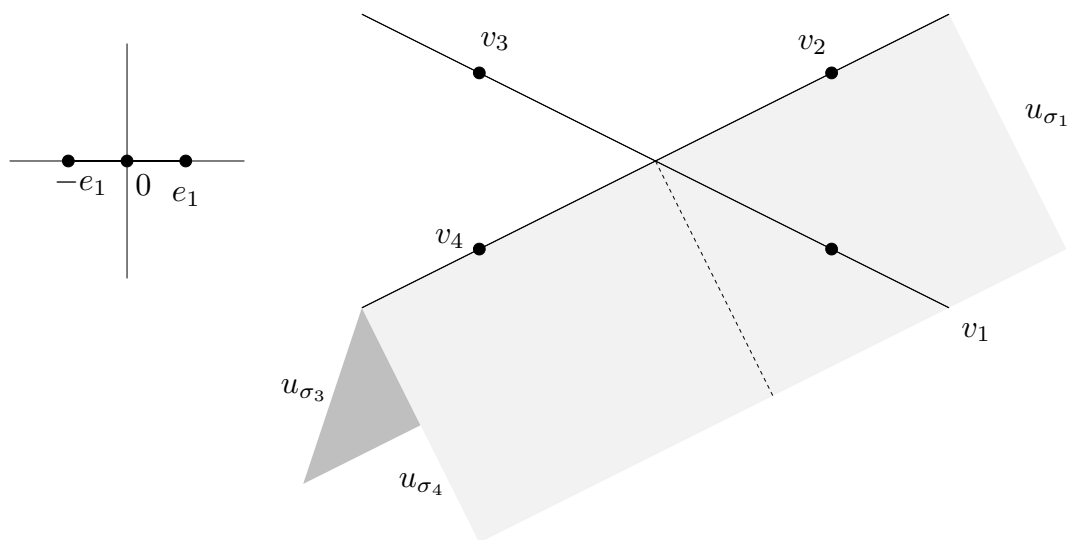
- b) Für $D = \mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_3$ ergibt sich mit ähnlichen Überlegungen $P_D = \{[-1, 1] \times \{0\}\} \subset \mathbb{R}^2$. Dies und der zugehörige Graph von h_D ist in Figur 16.6 dargestellt.

Die Bedingung 16.14 2 β) ist nicht erfüllt: Es ist $u_{\sigma_1} = (-1, 0)$, und S_{σ_1} enthält f_2 , das nicht in $P_D \cap M - u_{\sigma_1}$ liegt. Entsprechend ist $\varphi_D: \mathbb{IP}_1 \times \mathbb{IP}_1 \rightarrow \mathbb{IP}_2$ von der Form

$$([a, b], [c, d]) \mapsto [a^2, ab, b^2],$$



FIGUR 16.5 Graph von $h_{V_1+V_2}$ zu $V_1 \times V_2$ in $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$



FIGUR 16.6 $P_{V_1+V_3}$ und $h_{V_1+V_3}$ zu $V_1 + V_3$ in $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$

also $\varphi_D(\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1) = V(\mathbb{P}_2; T_0T_2 - T_1^2)$ eindimensional. ■

Aufgabe 16.3 Für einen invarianten Cartierdivisor D zeige man:

- 1) $\text{codim}_{M_{\mathbb{R}}} P_D$ ist die Dimension des maximalen linearen Unterraumes des Graphen $\Gamma(h_D)$.

- 2) Ist $h_D = (u_\sigma)_{\sigma \in \Delta^n}$ Δ -streng konkav, so ist $\dim P_D = n$, und die Eckpunkte von P_D sind genau die $u_\sigma \in M$ mit $\sigma \in \Delta^n$.

(Für 16.18.)

Damit können wir zwei neue Klassen von Divisoren einführen:

16.16 Definition Ein invarianter Cartierdivisor D heiÙe

- sehr ample, wenn φ_D eine Einbettung ist;
- ample, wenn ℓD für ein $\ell \in \mathbb{N}$ sehr ample ist.

Mit ℓD ist auch $(\ell + 1)D$ sehr ample: Statt der Abbildung φ_D , die über die Extrempunkte gebildet wird, kann man gleichwertig eine Abbildung betrachten, deren Komponenten aus allen Gitterpunkten in P_D gebildet werden. Daher entsteht $\varphi_{(\ell+1)D}$ aus φ_D im wesentlichen durch Hinzunahme weiterer Komponenten. Nach 16.14 ist D genau dann sehr ample, wenn $h_D = (u_\sigma)_{\sigma \in \Delta^n}$ Δ -streng konkav ist und S_σ für alle $\sigma \in \Delta^n$ von $P_D \cap M - u_\sigma$ erzeugt wird.

16.17 Satz Die Varietät X_Δ sei vollständig und D ein invarianter Cartierdivisor. Dann ist D genau dann ample, wenn h_D Δ -streng konkav ist.

Beweis Aus $h_{\ell D} = \ell h_D$ für $\ell \in \mathbb{N}$ gemäß Aufgabe 16.1 folgt, daß h_D genau dann streng konkav ist, wenn dies für $h_{\ell D}$ zutrifft. Mit 16.14 ergibt sich daraus unmittelbar „ \Rightarrow “.

„ \Leftarrow “ Nach Lemma 16.14 genügt es, eine positive natürliche Zahl ℓ zu finden, mit dem für $h_{\ell D} = (\ell \cdot u_\sigma)_{\sigma \in \Delta^n}$ und alle $\sigma \in \Delta^n$ gilt:

$$(16.17.1) \quad S_\sigma = \langle u - \ell u_\sigma; u \in P_{\ell D} \cap M \rangle .$$

Für festes $\sigma \in \Delta^n$ sei $u' \in S_\sigma$, i.e., $u'|_\sigma \geq 0$. Wir suchen ein ℓ mit $u' \in P_{\ell D} \cap M - \ell u_\sigma$. Zunächst gilt für ein $\ell \in \mathbb{N}_{>0}$ und $a_\rho := -h_D(v_\rho)$:

$$\begin{aligned} u' + \ell u_\sigma \in P_{\ell D} &= \{u \in M_{\mathbb{R}}; \langle u, v_\rho \rangle \geq -\ell a_\rho, \forall \rho \in \Delta^1\} \\ \iff \langle u', v_\rho \rangle + \ell \langle u_\sigma, v_\rho \rangle &\geq -\ell a_\rho, \forall \rho \in \Delta^1 \\ \iff \ell(\langle u_\sigma, v_\rho \rangle + a_\rho) &\geq -\langle u', v_\rho \rangle, \forall \rho \in \Delta^1 . \end{aligned}$$

Für $\rho \subset \sigma$ ist diese Bedingung wegen $u' \in S_\sigma$ und $u_\sigma \in P_D$ für alle ℓ erfüllt; für $\rho \not\subset \sigma$ ist

$$\langle u_\sigma, v_\rho \rangle > h_D(v_\rho) = -a_\rho, \quad \text{also} \quad \langle u_\sigma, v_\rho \rangle + a_\rho > 0$$

und damit die Bedingung für alle großen ℓ erfüllt. Da S_σ endlich erzeugt ist, existiert ein ℓ , das für alle u' die Bedingung erfüllt, sodaÙ für S_σ die Darstellung (16.17.1) gilt. ■

Aufgabe 16.4 Man zeige für einen amplen Divisor D in einer vollständigen torischen Varietät X :

- i) Für $n = \dim X$ ist der Divisor nD sehr ample.
- ii) Ist X regulär, so ist D sehr ample.

In 5.21 hatten wir einem n -dimensionalen M -Polytop P in V^* mit Eckpunktmenge $P^0 = \{u_1, \dots, u_r\}$ einen Fächer Δ_P und damit eine torische Varietät $X_P = X_{\Delta_P}$ zugeordnet. Weiter gehört zu P eine (als Minimum linearer Funktionen konkave) Trägerfunktion

$$(16.18.1) \quad h_P := \min_{u \in P} u = \min_{u \in P^0} u ,$$

wobei die letzte Gleichung leicht zu verifizieren ist: Es sei $u = \sum_j t_j u_j \in P$ mit $t_j \geq 0$, $\sum_j t_j = 1$ und $u_j \in P^0$. Zu gegebenem $v \in V$ sei etwa $u_1(v) = \min_j u_j(v)$. Dann ist ersichtlich $u(v) \geq u_1(v)$ und damit $h_P(v) = u_1(v)$.

Nach 14.11 bestimmt h_P einen invarianten Cartierdivisor D_P mit $h_P = h_{D_P}$.

16.18 Lemma 1) Für ein n -dimensionales M -Polytop P in V^* ist der Divisor D_P ample, und es gilt $P_{D_P} = P$.

2) Ist Δ ein vollständiger Fächer und D ein ample invarianter Cartierdivisor in X_Δ , so ist

$$\Delta_{P_D} = \Delta .$$

Beweis In 5.23 haben wir eine Bijektion

$$P^0 \xrightarrow{1-1} (\Delta_P)^n, \quad u_i \mapsto \sigma_i := \{v \in V; \langle v, u_i \rangle = \min_{u \in P} \langle v, u \rangle\}$$

etabliert.

1) Damit gilt $\sigma_i := \{v \in V; \langle v, u_i \rangle = h(v)\}$, und insbesondere ist $h|_{\sigma_i} = u_i|_{\sigma_i}$, so daß h bezüglich Δ_P (stückweise) linear ist. Da alle u_i paarweise verschieden sind, ist $h = (u_{\sigma_i})_{i=1, \dots, r}$ sogar Δ_P -streng konkav, und D_P ist nach 16.17 ample. Weiter folgt aus Aufgabe 16.3 2)

$$P_{D_P} = \text{konv}(u_1, \dots, u_r) = P .$$

2) Es sei $P_D \subset V^*$ das Polytop zu D . Dann ist die Trägerfunktion $h_D = (u_\sigma)_{\sigma \in \Delta^n}$ zu D nach 16.17 Δ_P -streng konkav, also P_D nach Aufgabe 16.3 1) volldimensional; insbesondere ist Δ_{P_D} vollständig. Zu $\sigma \in \Delta^n$ existiert also ein $\sigma_i \in \Delta_{P_D}^n$ mit $\dim(\sigma \cap \sigma_i) = n$. Es ist $\sigma = \sigma_i$ zu zeigen. Mit $(P_D)^0 = \{u_1, \dots, u_r\}$ sind wie oben die maximalen Kegel von Δ_{P_D} von der Form $\sigma_i := \{v \in V; \langle v, u_i \rangle = \min_{u \in P_D} \langle v, u \rangle\}$. Aus (16.18.1) erhalten wir

$$\sigma_i = \{v \in V; \langle v, u_i \rangle = h_D(v)\} .$$

Aus $u_\sigma|_{\sigma \cap \sigma_i} = h_D|_{\sigma \cap \sigma_i} = u_i|_{\sigma \cap \sigma_i}$ folgt zunächst $u_i = u_\sigma$; weil alle u_i paarweise verschieden sind, liefert dies $\sigma \subset \sigma_i$. Weil h_D sogar Δ_{P_D} -streng konkav ist, sind auch alle u_σ paarweise verschieden, und es folgt $\sigma = \sigma_i$. ■

16.19 Korollar Für eine vollständige Varietät X_Δ sind folgende Bedingungen äquivalent:

1) X_Δ ist projektiv algebraisch.

2) Es gibt eine Δ -streng konkave Trägerfunktion auf Δ .

3) Δ ist polytopisch.

Beweis „1) \Rightarrow 2)“ Wir fixieren eine äquivariante Einbettung $\iota: X \hookrightarrow \mathbb{P}_r$ mit r minimal. Für $H := V(\mathbb{P}_r; z_0)$ ist $\mathbb{P}_r \mathcal{O}_H|_X = {}_X \mathcal{O}_{X \cap H}$, und mit dem Cartierdivisor $D := X \cap H$ in X gilt

$$\mathcal{O}_D(X) = \mathbb{C}[T_j/T_0; j = 0, \dots, r],$$

weil wegen der Minimalität von r die Erzeugenden T_j/T_0 in $\mathcal{R}(X)$ linear unabhängig sind, vgl. auch 16.4. Damit ist φ_D nach Konstruktion gerade ι und D sehr ample, nach 16.14 ist h_D also Δ -streng konkav.

„2) \Rightarrow 1)“ Ist h_D die Trägerfunktion, so ist D nach 16.17 ample, also liefert $\varphi_{\ell D}$ für hinreichend großes ℓ eine Einbettung in einen projektiven Raum.

„2) \Rightarrow 3)“ Bezeichnet D den gemäß 14.11 zur gegebenen Trägerfunktion $h = (u_\sigma)$ gehörigen (amplen) invarianten Cartierdivisor, so ist P_D nach Aufgabe 16.3 ein n -dimensionales Polytop mit Ecken u_σ . Aus 16.18 2) folgt $\Delta = \Delta_{P_D}$.

„3) \Rightarrow 2)“ Ist $\Delta = \Delta_P$, so sei D_P der gemäß 16.18 zu P gehörende ample Divisor mit Trägerfunktion h_{D_P} . Nach 16.17 ist diese Δ -streng konkav. ■

Da jeder zweidimensionale vollständige Fächer polytopisch ist, folgt damit:

16.20 Korollar Für $n \leq 2$ sind die Bedingungen „vollständig“ und „projektiv algebraisch“ an X_Δ äquivalent. ■

Dies gilt ab $n = 3$ nicht mehr, wie folgendes Beispiel in Figur 16.7 für eine glatte vollständige Varietät ohne streng konkave Trägerfunktion illustriert:

16.21 Beispiel Es sei P ein Polytop im $V^* = \mathbb{R}^3$, das (bei geeigneter Wahl der Eckpunkte $i := v_i$) aus einem Tetraeder mit 0 im Innern, Basis 1, 2, 3 und Spitze 4 entsteht, indem die Seitenmitten 5 von $\overline{14}$, 6 von $\overline{24}$ und 7 von $\overline{34}$ sowie die Kanten $\overline{16}$, $\overline{27}$, $\overline{35}$, $\overline{56}$, $\overline{67}$, $\overline{75}$ hinzugefügt werden, vgl. Figur 5.5.

Angenommen, für den von P erzeugten Fächer Δ existiert eine Δ -streng konkave Trägerfunktion h . Dann folgt aus $v_1 + v_6 = v_2 + v_5$ mit $\sigma := \text{keg}(v_1, v_5, v_6)$:

$$h(v_1) + h(v_6) = h(v_1 + v_6) = h(v_2 + v_5) = u_\sigma(v_2 + v_5) = u_\sigma(v_2) + u_\sigma(v_5) > h(v_2) + h(v_5).$$

Analog findet man

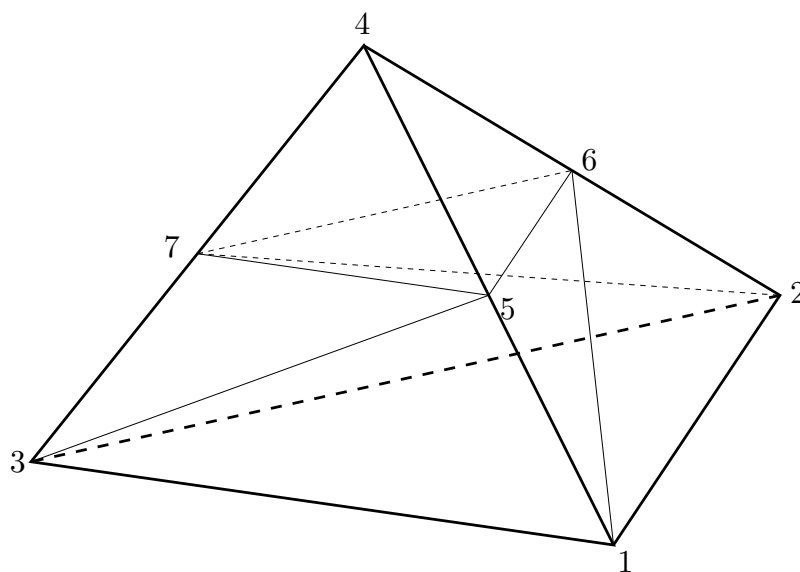
$$h(v_3) + h(v_5) > h(v_1) + h(v_7)$$

$$h(v_2) + h(v_7) > h(v_3) + h(v_6).$$

Eine Addition der drei Ungleichungen ergibt einen Widerspruch. ■

Aufgabe 16.5 Ist Δ vollständig und höchstens zweidimensional, so ist jeder ample invariante Cartierdivisor in X_Δ sehr ample.

Aufgabe 16.6 Es sei $\varphi: X \rightarrow \mathbb{P}_3$ eine über den vier Koordinatenebenen verzweigte zweiblättrige Überlagerung. Dann ist der Verzweigungsdivisor in X ample, aber nicht sehr ample.



FIGUR 16.7 Regulärer Fächer ohne streng konkave Trägerfunktion

Kleines Wörterbuch § 16

$\#(P_D \cap M)$	$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_D(X_\Delta)$
h_D ist konkav	\mathcal{O}_D ist von globalen Schnitten erzeugt
Δ ist polytopisch	X_Δ ist projektiv algebraisch
h_D ist Δ -streng konkav	D ist ample
h_D Δ -streng konkav, $S_\sigma = P_D \cap M - u_\sigma$	D ist sehr ample

Kapitel V

Chowgruppen und Kohomologie

In diesem Kapitel werden wir die Divisorenklassengruppen und insbesondere die Schnitttheorie vom Flächenfall auf simpliziale Fächer, d.h. auf torische Varietäten übertragen, die höchstens Quotientensingularitäten haben. Damit kommen wir zu den Chowgruppen bzw. Chowringen, die anschließend im Satz von Jurkiewicz-Danilov kohomologisch interpretiert werden. Es schließen sich Hinweise auf die effektive Berechnung der *ganzahligen* Homologie mit abgeschlossenen Trägern an.

17. Chowgruppen

Für einen *Cartierdivisor* D auf einer algebraischen Varietät X und eine irreduzible Untervarietät V von X läßt sich ein Schnittzykel $D \cdot V$ als *Weildivisor* auf V leicht definieren, wenn $D \cap V$ nur glatte Punkte von X enthält und D und V sich *transversal schneiden* (i.e., alle Durchschnitte $T_x D \cap T_x V$ von Tangentialräumen in $T_x X$ die theoretisch minimal mögliche Dimension annehmen); dann gestattet $D \cdot V$ eine rein mengentheoretische Beschreibung. Liegen in $D \cap V$ Singularitäten von X , so kommen Vorfaktoren hinzu; ist der Durchschnitt nichttransversal, so hilft nur der Übergang zu den jeweiligen rationalen Äquivalenzklassen. — Mit Hilfe der Schnitttheorie beweisen wir ein Kriterium für ample Divisoren (Nakai-Moishezon); weiter geben wir geometrische Erzeugende für die Chowgruppe an und beschreiben den Chowring.

A. Schnittzykel $D \cdot V$

a) Es sei $D \in \text{Div}_C(X)$ ein Cartierdivisor, und es bezeichne $[D] = \sum a_i D_i$ mit Primdivisoren D_i den assoziierten Weildivisor; weiter sei $V \hookrightarrow X$ eine irreduzible Untervarietät. Wir fordern, daß V von D „eigentlich geschnitten“ wird, also V nicht im Träger $|D| = \bigcup_{a_i \neq 0} D_i$ von D enthalten ist. In diesem Falle definiert man folgenden Schnittzykel

$$D \cdot V := [D|_V] :$$

Sind $f_j \in \mathcal{R}(U_j)$ lokale Gleichungen für D auf der offenen Überdeckung $(U_j)_{j \in J}$ von X , so ist der Cartierdivisor $D|_V$ auf V durch die lokalen Gleichungen $f_j|_V \in \mathcal{R}(U_j \cap V)$ gegeben.

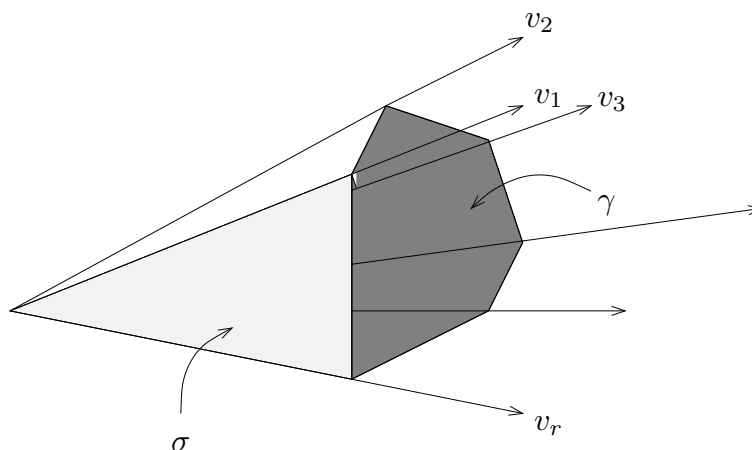
Im torischen Fall läßt sich der Schnittzykel invarianter D und \mathbb{V}_σ — invariante irreduzible abgeschlossene Untervarietäten sind nach 7.7 von der Form \mathbb{V}_σ mit $\sigma \in \Delta$ — auch für nicht simpliziales Δ wie folgt beschreiben: Ist

$$(17.1.0) \quad D = \sum_{\rho \in \Delta^1} a_\rho \mathbb{V}_\rho \in \text{Div}_C^{\mathbb{T}}(X_\Delta),$$

so bedeutet $\mathbb{V}_\sigma \not\subset |D|$, daß $D|_{\mathbb{V}_\sigma}$ ein invarianter Cartierdivisor auf \mathbb{V}_σ ist. Da \mathbb{V}_σ eine torische Varietät zum Fächer Δ/σ bezüglich des Gitters $N/\sigma = N/(N \cap \text{lin } \sigma)$ ist (vgl. 7.14), existiert eine Darstellung

$$(17.1.1) \quad D \cdot \mathbb{V}_\sigma = \sum_{\sigma \prec_1 \gamma} b_\gamma \mathbb{V}_\gamma,$$

deren Vielfachheiten b_γ zu bestimmen sind. Mit $K(\gamma \setminus \sigma)$ bezeichnen wir dazu die Menge aller Kanten aus $\gamma^1 \setminus \sigma^1$. Das Gitter N_γ/N_σ ist eindimensional; ist e_γ ein Erzeugendes (oder ein Repräsentant davon), so hat v_ρ für $\rho \in K(\gamma \setminus \sigma)$ die Gestalt $v_\rho = s_\rho e_\gamma$ mit $s_\rho \in \mathbb{Z}$. Wir wählen e_γ so, daß alle s_ρ positiv sind.



FIGUR 17.1 $\sigma \prec_1 \gamma$

17.1 Lemma Für jedes $\rho \in K(\gamma \setminus \sigma)$ gilt $b_\gamma = a_\rho/s_\rho$ in (17.1.1).

Beweis Zum Cartierdivisor D gehört eine Trägerfunktion h_D mit folgender Eigenschaft: Ist $\sigma \prec_1 \gamma$ und $h_D|_\gamma =: u(\gamma) \in M/M(\gamma)$, so gilt

$$\langle u(\gamma), v_\rho \rangle = -a_\rho \quad \text{für} \quad \rho \in \gamma^1$$

und damit $D = \text{div } \chi^{-u(\gamma)}$ auf X_γ . Weiter ist $u(\gamma)|_\sigma = 0$, also $u(\gamma) \in M(\sigma)/M(\gamma)$, denn andernfalls existierte eine Kante $\rho \in \sigma^1$ mit $u(\gamma)(v_\rho) = -a_\rho \neq 0$, d.h. mit $\mathbb{V}_\rho \subset |D|$; aus $\mathbb{V}_\sigma \subset \mathbb{V}_\rho$ resultiert ein Widerspruch zur Voraussetzung $\mathbb{V}_\sigma \not\subset |D|$. Nun ist $\mathbb{V}_\sigma = \bigcup_{\sigma \prec \tau} \mathbb{B}_\tau$ nach 7.7 und $\chi^{-u(\gamma)}$ eine rationale Funktion auf \mathbb{B}_γ ; weiterhin ist $\mathbb{V}_\gamma = \overline{\mathbb{B}}_{\text{keg}(e_\gamma)}$ mit dem primitiven Vektor e_γ gemäß der Konstruktion in 7.14. Also folgt einerseits

$$b_\gamma = \langle -u(\gamma), e_\gamma \rangle.$$

Andererseits gilt für $\rho \in K(\gamma \setminus \sigma)$ wegen $u(\gamma) \in M(\sigma)/M(\gamma) \subset M/M(\gamma)$:

$$a_\rho = \langle -u(\gamma), v_\rho \rangle = \langle -u(\gamma), s_\rho e_\gamma \rangle = s_\rho \langle -u(\gamma), e_\gamma \rangle = s_\rho b_\gamma. \blacksquare$$

Setzen wir nun der Einfachheit halber voraus, daß Δ in Teil a) *simplicial* ist.

17.2 Beispiel Ist der Primdivisor $D_\rho := \mathbb{V}_\rho$ für ein $\rho \in \Delta^1$ ein Cartierdivisor, schneiden sich D_ρ und \mathbb{V}_σ eigentlich und ist $\gamma := \text{keg}(\sigma, \rho)$ ein regulärer Kegel, so ist der Schnitt transversal, und es gilt

$$D_\rho \cdot \mathbb{V}_\sigma = \begin{cases} D_\rho \cap \mathbb{V}_\sigma = \mathbb{V}_\gamma, & \text{falls } \gamma \in \Delta \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis Zunächst sei γ nur simplicial. Aus $\mathbb{V}_\sigma = \bigcup_{\sigma \prec \tau} \mathbb{B}_\tau$ und $D_\rho = \bigcup_{\rho \prec \tau} \mathbb{B}_\tau$ folgt ersichtlich, daß die Bedingung „ $\mathbb{V}_\sigma \not\subset |D_\rho|$ “ zu „ $\rho \not\prec \sigma$ “ äquivalent ist. Somit erhalten wir

$$(17.2.1) \quad D_\rho \cap \mathbb{V}_\sigma = \bigcup_{\gamma \prec \tau} \mathbb{B}_\tau = \begin{cases} \mathbb{V}_\gamma, & \text{falls } \gamma \in \Delta \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für den Nachweis der „Transversalitätsbedingung“, daß alle a_ρ den Wert 1 haben, seien ohne Einschränkung $\Delta = \mathfrak{S}(\gamma)$, ferner sei γ regulär und volldimensional; wir setzen $\sigma = \text{keg}(e_1, \dots, e_{n-1})$ und $\rho = \text{keg}(e_n)$. Dann ist

$$\mathbb{V}_\gamma = \{(0, \dots, 0)\} \subset X_\gamma = \mathbb{C}^n$$

und $D_\rho \cap \mathbb{V}_\sigma \cong (\mathbb{C}^{n-1} \times 0) \cap (0 \times \mathbb{C})$. Weil X_Δ glatt ist, gilt $N_\gamma = N_\sigma \oplus \mathbb{Z}v_{\rho(\gamma)}$, wobei wir mit $\rho(\gamma)$ das einzige Element von $K(\gamma \setminus \sigma)$ bezeichnen. Damit ist $s_{\rho(\gamma)} = 1$, also $b_\gamma = 1$ gemäß 17.1. Somit folgt die behauptete Formel für $D_\rho \cdot \mathbb{V}_\sigma$. ■

17.3 Beispiel Ist der Primdivisor D_ρ für ein $\rho \in \Delta^1$ ein Cartierdivisor und schneiden sich D_ρ und \mathbb{V}_σ eigentlich, so gilt mit $\gamma := \text{keg}(\sigma, \rho)$ und den Multiplizitäten m_σ und m_γ

$$(17.3.1) \quad D_\rho \cdot \mathbb{V}_\sigma = \begin{cases} \frac{m_\sigma}{m_\gamma} \mathbb{V}_\gamma, & \text{falls } \gamma \in \Delta \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis Nach (17.2.1) genügt es, die Vielfachheit von \mathbb{V}_γ in $D_\rho \cdot \mathbb{V}_\sigma$ zu bestimmen. Es seien w_1, \dots, w_r primitive Kantenvektoren mit $\sigma = \text{keg}(w_1, \dots, w_r)$, ferner gelte $N_\gamma = N_\sigma \oplus \mathbb{Z}e_\gamma$. Wir setzen in den Bezeichnungen von 17.1 $v := v_\rho$ und $s := s_\rho$, so daß $v \equiv se_\gamma \pmod{N_\sigma}$ gilt. Damit ist

$$m_\gamma = [N_\gamma : \text{lin}(w_v, \dots, w_r, v)] = [(N_\sigma \oplus \mathbb{Z}e_\gamma) : (\text{lin}(w_1, \dots, w_r) \oplus \mathbb{Z}se_\gamma)] = m_\sigma \cdot s. \blacksquare$$

17.4 Bemerkung Im allgemeinen ist im simplicialen Fächer Δ nicht D_ρ selbst ein Cartierdivisor, sondern nur ein geeignetes ganzzahliges Vielfaches aD_ρ , vgl. 14.8. Wenn sich D_ρ und \mathbb{V}_σ eigentlich schneiden, kann man aber immer noch durch

$$D_\rho \cdot \mathbb{V}_\sigma := \frac{1}{a}(aD_\rho) \cdot \mathbb{V}_\sigma$$

einen Schnittzyklus einführen, wobei man allerdings *rationale* statt ganzzahliger Koeffizienten zuzulassen hat. Wir werden die technischen Einzelheiten zu dieser naheliegenden Verallgemeinerung nicht ausführen.

Durch Induktion ergibt sich damit aus (17.3.1) unmittelbar folgende Aussage: Für paarweise verschiedene Primdivisoren D_1, \dots, D_r zu primitiven Kantenvektoren v_1, \dots, v_r aus dem simplizialen Fächer Δ ist (mit Wert 0 für $\text{keg}(v_1, \dots, v_r) \notin \Delta$)

$$(17.3.2) \quad \mathbb{V}_{\text{keg}(v_1, \dots, v_r)} = \bigcap_{j=1}^r D_j \quad \text{und} \quad D_1 \cdot \dots \cdot D_r = \frac{1}{m_{\text{keg}(v_1, \dots, v_r)}} \mathbb{V}_{\text{keg}(v_1, \dots, v_r)} .$$

b) Wir lassen nunmehr für einen Cartierdivisor D und irreduzibles $V \hookrightarrow X$ zu, daß sich D und V *nicht eigentlich* schneiden. Es bezeichne $\text{Ch}_j(X)$ für eine n -dimensionale algebraische Varietät X die j -te *Chowgruppe* und

$$\text{Ch}_\bullet(X) := \bigoplus_{j=0}^n \text{Ch}_j(X) .$$

Die Gruppe $\text{Ch}_j(X)$ ist nach Definition die von den irreduziblen j -dimensionalen Untervarietäten erzeugte freie abelsche Gruppe $Z_j(X)$ modulo der Untergruppe, die von Zykeln der Form $\text{div}(f)$, f rationale Funktion auf einer $(j + 1)$ -dimensionalen Untervarietät von X , erzeugt wird. Wir nennen zwei Zykeln *rational äquivalent* und schreiben $Z_1 \sim Z_2$, wenn sie die gleiche Klasse in der Chowgruppe repräsentieren.

17.5 Beispiele 1) $\text{Ch}_n(X) = \mathbb{Z} \cdot X$.

2) $\text{Ch}_{n-1}(X) = \text{Cl Div}_W^{\mathbb{T}}(X)$.

3) $\text{Ch}_j(\mathbb{C}^n) = \begin{cases} 0, & j \neq n \\ \mathbb{Z}, & j = n . \end{cases}$

Beweis 1) folgt daraus, daß X irreduzibel ist. 2) ergibt sich unmittelbar aus der Konstruktion. Aussage 3) ist evident für $n = 0$. Der allgemeine Fall ist eine Konsequenz aus folgendem Satz [Fu, 1.9], wenn man ihn auf die konstante Abbildung $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \{0\}$ anwendet:

Ein Morphismus algebraischer Varietäten $f: Y \rightarrow X$ heiße *affines Bündel vom Rang ℓ* , wenn $f^{-1}(U_i) \cong U_i \times \mathbb{C}^\ell$ für eine offene Überdeckung (U_i) von X gilt.

17.6 Satz *Ist $f: Y \rightarrow X$ ein affines Bündel vom Rang ℓ , dann ist der pull-back*

$$f^*: \text{Ch}_j(X) \rightarrow \text{Ch}_{j+\ell}(Y), \quad [V] \mapsto [f^{-1}(V)]$$

ein surjektiver Homomorphismus. ■

Man definiert eine Schnittklasse $D \cdot V \in \text{Ch}_{\dim V - 1}(V)$ für einen Cartierdivisor D auf X und irreduzibles $v: V \hookrightarrow X$ wie folgt: Die durch „analytische Einschränkung“ entstandene invertierbare Garbe

$$v^*_X \mathcal{O}_D := \left(({}_X \mathcal{O} / {}_V \mathcal{I}) \otimes_{{}_X \mathcal{O}} {}_X \mathcal{O}_D \right) \Big|_V$$

auf V ist von der Form ${}_V\mathcal{O}_E$ mit einem Geradenbündel E auf V , vgl. 15.9. Die Klasse $[E]$ des zugehörigen Divisors definiert man nun als das Schnittprodukt

$$D \cdot V := [E] \in \text{Ch}_{\dim V - 1}(V).$$

Falls sich V und D eigentlich schneiden, gilt $E = D|_V$, und wir erhalten (bis auf die Klassenbildung; wir bezeichnen Schnittzykel und ihre Klassen bisweilen mit dem gleichen Symbol) die bisherige Definition. Für einen Hauptdivisor $\text{div}(f)$ gilt ersichtlich $\text{div}(f) \cdot V \sim 0$, also hängt die Klasse $D \cdot V$ nur von der Klasse von D in $\text{Ch}_{\dim X - 1}(X)$ ab.

Spezialisieren wir das nun wieder auf eine torische Varietät $X = X_\Delta$. Dabei läßt sich der Schnitt von Zykeln *in beliebiger Lage* wie folgt auf den Fall eigentlicher Schnitte zurückführen:

Ist $\mathbb{V}_\sigma \subset |D|$ mit einem Cartierdivisor $D = \sum a_\rho \mathbb{V}_\rho$ und $u(\sigma) \in M/M(\sigma)$ mit $D|_{X_\sigma} = \text{div} \chi^{-u(\sigma)}$, so wähle man ein $u \in M$, das $u(\sigma)$ repräsentiert. Dann schneidet \mathbb{V}_σ den zu D äquivalenten Divisor

$$(17.5.2) \quad D' := D + \text{div} \chi^u = \sum_{\rho \in \Delta^1} (a_\rho + \langle u, v_\rho \rangle) \mathbb{V}_\rho$$

eigentlich. Denn andernfalls gäbe es eine Kante $\rho \in \Delta^1$ mit $\mathbb{V}_\sigma \subset \mathbb{V}_\rho \subset |D'|$, also ergäbe sich $a_\rho + \langle u, v_\rho \rangle \neq 0$ für den Vektor $v_\rho \in \rho \prec \sigma$, was $a_\rho = \langle -u(\sigma), v_\rho \rangle = \langle -u, v_\rho \rangle$ für $\rho \prec \sigma$ widerspricht. Halten wir fest:

$$a_\rho + \langle u, v_\rho \rangle = 0 \quad \text{für} \quad \rho \prec \sigma.$$

Für simpliziales Δ resultiert daher aus (17.3.1) und 17.4 mit den zu γ gehörigen $\rho(\gamma)$

$$(17.5.3) \quad D \cdot \mathbb{V}_\sigma \sim D' \cdot \mathbb{V}_\sigma = \sum_{\sigma \prec_1 \gamma} (a_{\rho(\gamma)} + \langle u, v_{\rho(\gamma)} \rangle) \frac{m_\sigma}{m_\gamma} \mathbb{V}_\gamma.$$

B. Die Schnittzahlen $(D \cdot C)$

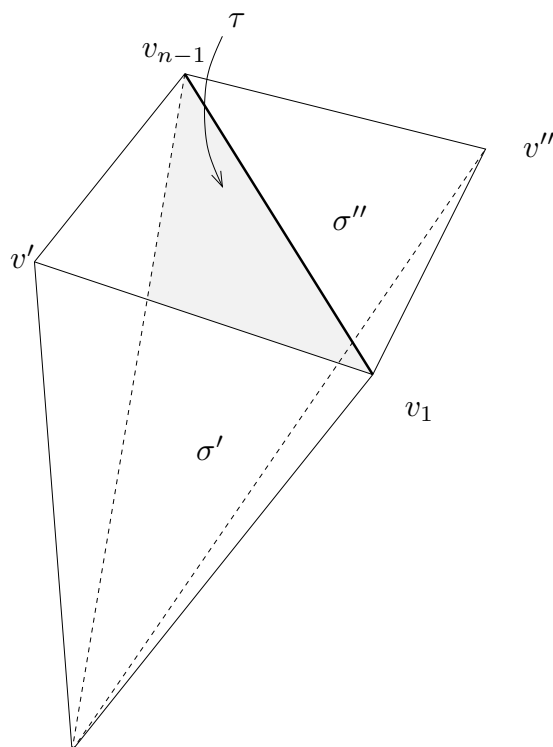
Es sei D wieder ein invarianter Cartierdivisor auf $X = X_\Delta$, ferner sei $C \hookrightarrow X$ eine irreduzible invariante kompakte Kurve (die nach 7.15 zu \mathbb{P}_1 äquivariant isomorph ist).

17.7 Definition Für eine Darstellung $D \cdot C = [\sum a_j x_j]$ mit $x_j \in C$ heißt

$$(D \cdot C) := \text{deg}[D \cdot C] = \sum a_j$$

die Schnittzahl von D mit C .

Sie ist wohldefiniert, denn der Divisor $\sum a_j x_j$ in C ist bis auf einen Hauptdivisor eindeutig; rationale Funktionen auf \mathbb{P}_1 haben aber gleich viele Pol- wie Nullstellen.



FIGUR 17.2 Zu Lemma 17.8

Zur Vorbereitung einer Charakterisierung ample Divisoren betrachten wir folgende Situation: Es sei $\tau = \text{keg}(v_1, \dots, v_{n-1}) \in \Delta^{n-1}$ eine Facette zweier verschiedener regulärer n -Kegel $\sigma' = \text{keg}(v_1, \dots, v_{n-1}, v')$ und $\sigma'' = \text{keg}(v_1, \dots, v_{n-1}, v'')$; ersichtlich ist τ deren Durchschnitt, und dadurch sind sie bei gegebenem τ eindeutig bestimmt. Es sei $\mathbb{V}_i = \mathbb{V}_{\text{keg}(v_i)}$.

Wir erhalten insbesondere eine Verallgemeinerung von Aufgabe 8.2:

17.8 Lemma a) Zu σ' und σ'' existieren eindeutig bestimmte $a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{Z}$ mit

$$v' + v'' = \sum_{i=1}^{n-1} a_i v_i .$$

b) Für jedes $1 \leq j \leq n - 1$ gibt es $c'_j, c''_j \in \mathbb{Z}$ mit $\mathbb{V}_j \cdot \mathbb{V}_\tau = c'_j \mathbb{V}_{\sigma'} + c''_j \mathbb{V}_{\sigma''}$ und

$$-a_j = c'_j + c''_j = (\mathbb{V}_j \cdot \mathbb{V}_\tau) = (D_j^2 \cdot D_1 \cdot \dots \cdot D_{j-1} \cdot D_{j+1} \cdot \dots \cdot D_{n-1}) .$$

Beweis a) Da σ' und σ'' regulär sind, existieren eindeutige Darstellungen mit ganzzahligen Koeffizienten

$$v' = \sum_{i=1}^{n-1} a_i v_i + a'' v'' \quad \text{und} \quad v'' = \sum_{i=1}^{n-1} a'_i v_i + a' v' ,$$

und damit gilt

$$v' + \sum (-a_i) v_i = a'' v'' = \sum (a'_i a'') v_i + (a' a'') v' .$$

Also ist entweder $a' = a'' = -1$, und dann ist die Behauptung evident, oder $a' = a'' = 1$, also $v' - v'' \in \text{lin } \tau \cong \mathbb{R}^{n-1}$. Dies widerspricht jedoch der Tatsache, daß v' und $-v''$ bezüglich $\text{lin } \tau$ im gleichen offenen Halbraum von V liegen.

b) Zunächst erhalten wir aus (17.3.2)

$$\mathbb{V}_\tau = \bigcap_{i=1}^{n-1} \mathbb{V}_i = D_1 \cdot \dots \cdot D_{n-1} .$$

Wählen wir $(v_1, \dots, v_{n-1}, v')$ als Basis von N und schreiben \mathbb{V}_j auf dem glatten X_τ in der Form $\mathbb{V}_j|_{X_\tau} = \text{div } \chi^{-u_j(\tau)}$ mit $u_j(\tau) \in M/M(\tau)$. Es sei $u_j \in M$ ein Repräsentant von $u_j(\tau)$ mit $\langle u_j, v_i \rangle = -\delta_{ij}$ für $1 \leq i \leq n-1$. Nun ist \mathbb{V}_τ nicht in $|D'_j|$ mit dem Divisor $D'_j := \mathbb{V}_j + \text{div } \chi^{u_j}$ enthalten, vgl. (17.5.2); also liefert (17.5.3) für die regulären σ' und σ''

$$\mathbb{V}_j \cdot \mathbb{V}_\tau \sim D'_j \cdot \mathbb{V}_\tau = \langle u_j, v' \rangle \mathbb{V}_{\sigma'} + \langle u_j, v'' \rangle \mathbb{V}_{\sigma''} =: c'_j \mathbb{V}_{\sigma'} + c''_j \mathbb{V}_{\sigma''} .$$

Nach a) gilt $v'' = \sum_{i=1}^{n-1} a_i v_i - v'$; Anwendung von u_j liefert $c''_j = -a_j - c'_j$. ■

Als Anwendung zeigen wir den Satz (eine Version für allgemeinere algebraische Varietäten findet man etwa in [Ha, App. A, Th. 5.1])

17.9 Nakai-Moishezon-Kriterium *Es sei $X = X_\Delta$ eine glatte kompakte torische Varietät der Dimension n und $D \in \text{Div}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{T}}(X)$. Dann ist D genau dann ample, wenn die Schnittzahl $(D \cdot \mathbb{V}_\tau)$ für alle $\tau \in \Delta^{n-1}$ positiv ist.*

Beweis Nach 16.17 läßt sich die Bedingung „ D ist ample“ durch „Die Trägerfunktion h_D ist Δ -streng konkav“ ersetzen. Drücken wir daher zunächst die Schnittzahlbedingung des Kriteriums unter Verwendung der Trägerfunktion aus: Für jedes $\gamma \in \Delta$ fixieren wir eine Darstellung

$$h_D = u_\gamma \in M/M(\gamma) \quad \text{auf } \gamma \cap N .$$

Stellen wir D in der Form

$$D = \sum_{\rho \in \Delta^1} (-h_D(v_\rho)) \mathbb{V}_\rho$$

dar und fixieren eine Facette $\tau = (v_1, \dots, v_{n-1})$ von Δ . Da Δ vollständig ist, existieren dazu eindeutig n -Kegel $\sigma' = \text{keg}(\tau, v')$ und $\sigma'' = \text{keg}(\tau, v'')$, für die gemäß Lemma 17.8 b) gilt:

$$(\mathbb{V}_\rho \cdot \mathbb{V}_\tau) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \rho = \text{keg}(v') \text{ oder } \text{keg}(v'') \\ -a_i & \text{falls } \rho = \text{keg}(v_i) \\ 0 & \text{falls } \rho \notin (\sigma')^1 \cup (\sigma'')^1 . \end{cases}$$

Daraus folgt unter Verwendung der Linearität von $u_{\sigma'}$:

$$\begin{aligned} (D \cdot \mathbb{V}_\tau) &= -h_D(v') + \sum_{i=1}^{n-1} a_i h_D(v_i) - h_D(v'') \\ &= \langle u_{\sigma'}, -v' \rangle + \sum a_i \langle u_{\sigma'}, v_i \rangle - \langle u_{\sigma''}, v'' \rangle \\ &\stackrel{17.8}{=} \langle u_{\sigma'}, v'' - \sum a_i v_i \rangle + \sum a_i \langle u_{\sigma'}, v_i \rangle - \langle u_{\sigma''}, v'' \rangle \\ &= \langle u_{\sigma'}, v'' \rangle - \langle u_{\sigma''}, v'' \rangle. \end{aligned}$$

Daher ist für $\tau \in \Delta^{n-1}$ die Bedingung $(D \cdot \mathbb{V}_\tau) > 0$ äquivalent zu: Für die beiden maximalen Kegel σ' und σ'' mit gemeinsamer Facette τ gilt

$$(17.9.1) \quad \langle u_{\sigma''}, v'' \rangle = h_D(v'') < \langle u_{\sigma'}, v'' \rangle.$$

Wegen $h_D|_\tau = u_{\sigma'}|_\tau$ und der stückweisen Linearität ist das wiederum gleichwertig zu

$$(17.9.2) \quad h_D|_{\sigma'' \setminus \tau} < u_{\sigma'}|_{\sigma'' \setminus \tau}.$$

Bedingung (17.9.2) ist wiederum genau dann für alle τ erfüllt, wenn h_D Δ -streng konkav ist (und damit D nach 16.17 ample ist), also für jeden maximalen Kegel σ auf dessen Komplement $h_D < u_\sigma$ gilt: Die Notwendigkeit der Bedingung für die Konkavität ist evident. Es gelte umgekehrt Bedingung (17.9.2) für jedes $\tau \in \Delta^{n-1}$. Durch Übergang zu einem Ebenenschnitt läßt sich der Beweis auf den Fall $n = 2$ reduzieren. Ist ohne Einschränkung v ein Punkt der linken Halbebene H^- ,

$$\sigma' = \text{keg}(v_1, e_2) \subset H^+, \quad \sigma'' = \text{keg}(e_2, v_3) \subset H^-, \quad \dots, \quad \sigma^{(j)}$$

eine aneinanderstoßende Kette von Kegeln aus Δ^2 mit $v \in \sigma^{(j)}$ und zugehörigen Charakteren $u', u'', \dots, u^{(j)} \in M$, so gilt zunächst $u'' < u'$ im Innern von H^- nach (17.9.2); insbesondere trifft dies in v zu. Induktiv erhält man damit die Behauptung. ■

C. Erzeugende für $\text{Ch}_\bullet(X_\Delta)$

Aus dem Lokalisierungslemma 15.8 folgt, daß die Gruppe $\text{Ch}_{n-1}(X)$ von den Klassen $[\mathbb{V}_\rho]$ mit $\rho \in \Delta^1$ erzeugt wird. Dieser Sachverhalt läßt sich verallgemeinern; doch sind zunächst einige Vorbereitungen erforderlich:

17.10 Lokalisierungslemma *Für eine (abgeschlossene) Untervarietät $v: Y \hookrightarrow X$ der algebraischen Varietät X bezeichne $j: U \rightarrow X$ die Inklusion von $U := X \setminus Y$. Dazu gehört für jedes ℓ eine exakte Sequenz:*

$$(17.10.1) \quad \text{Ch}_\ell(Y) \xrightarrow{i_*} \text{Ch}_\ell(X) \xrightarrow{j^*} \text{Ch}_\ell(U) \rightarrow 0.$$

Beweis Zunächst gilt dies ersichtlich für die analoge Sequenz

$$Z_\ell(Y) \xrightarrow{i_*} Z_\ell(X) \xrightarrow{j^*} Z_\ell(U) \rightarrow 0,$$

die durch $Z \mapsto Z$ und $V \mapsto V \cap U$ induziert wird. Damit folgt die Surjektivität von j^* in (17.10.1). Ist nun $\alpha \in Z_\ell(X)$ mit $j^*\alpha \sim 0$, so existiert eine Darstellung $j^*\alpha = \sum \operatorname{div}(r_k)$ mit $r_k \in \mathcal{R}(W_k)$ für geeignetes $W_k \hookrightarrow U$ der Dimension $\ell + 1$. Ohne Einschränkung können wir annehmen, daß jedes r_k eine rationale Funktion auf dem Abschluß \overline{W}_k in X ist. Also gilt $j^*(\alpha - \sum \operatorname{div}(r_k)) = 0$ in $Z_\ell(U)$. Daher ist $\alpha - \sum \operatorname{div}(r_k) = v_*(\beta)$ für ein $\beta \in Z_\ell(Y)$, woraus leicht die Behauptung folgt. ■

17.11 Korollar *Ist U eine offene Untervarietät von \mathbb{C}^n , so gilt*

$$\operatorname{Ch}_k(U) = \begin{cases} 0, & k \neq n \\ \mathbb{Z}, & k = n. \end{cases}$$

Beweis Wählen wir in der exakten Sequenz (17.10.1) $X = \mathbb{C}^n$ und $Y = \mathbb{C}^n \setminus U$, so verschwindet nach 17.5 für $k \neq n$ der Term $\operatorname{Ch}_k(\mathbb{C}^n)$ und damit auch $\operatorname{Ch}_k(U)$. ■

17.12 Satz *Die Gruppe $\operatorname{Ch}_k(X_\Delta)$ wird durch die Klassen $[\mathbb{V}_\sigma]$ mit $\sigma \in \Delta^{n-k}$ erzeugt.*

Beweis Wir wenden Lemma 17.13 auf die durch

$$(17.12.1) \quad X_k := \bigcup_{\sigma \in \Delta^{n-k}} \mathbb{V}_\sigma = \bigcup_{\sigma \in \Delta^{\geq n-k}} \mathbb{B}_\sigma$$

gegebene invariante aufsteigende Filtrierung von X_Δ durch abgeschlossene Unterräume an, für die $X_k \setminus X_{k-1} = \bigcup_{\sigma \in \Delta^{n-k}} \mathbb{B}_\sigma$ gilt. ■

17.13 Lemma *Die algebraische Varietät X besitze eine aufsteigende Filtrierung*

$$\emptyset = X_{-1} \subset \dots \subset X_n = X$$

aus abgeschlossenen Untervarietäten X_k , für die alle $X_k \setminus X_{k-1}$ eine (möglicherweise leere) disjunkte Vereinigung offener Untervarietäten U_{kj} von \mathbb{C}^k sind. Dann wird die Gruppe $\operatorname{Ch}_\bullet(X)$ durch die Klassen $[\overline{U}_{kj}]$ erzeugt.

Beweis Wir fixieren i ; für $k < i$ ist $\dim X_k \leq k$ und damit $\operatorname{Ch}_i(X_k) = 0$. Daher zeigen wir durch Induktion über $k \geq i$, daß $\operatorname{Ch}_i(X_k)$ von Klassen $[\overline{U}_{\ell j}]$ mit $\ell \leq k$ erzeugt wird. Für $k = i$ erhalten wir aus 17.10 die exakte Sequenz

$$0 = \operatorname{Ch}_k(X_{k-1}) \rightarrow \operatorname{Ch}_k(X_k) \rightarrow \bigoplus_j \operatorname{Ch}_k(U_{kj}) \rightarrow 0.$$

Dabei faktorisiert jedes $\operatorname{Ch}_k(X_k) \rightarrow \operatorname{Ch}_k(U_{kj})$ über $\operatorname{Ch}_k(\overline{U}_{kj})$. Für den Induktionsschritt „ $k \Rightarrow k + 1$ “ verwenden wir zusätzlich 17.11 und erhalten die exakte Sequenz

$$\operatorname{Ch}_i(X_k) \rightarrow \operatorname{Ch}_i(X_{k+1}) \rightarrow \bigoplus_j \operatorname{Ch}_i(U_{k+1,j}) = 0,$$

woraus mit der Induktionsvoraussetzung für $\operatorname{Ch}_i(X_k)$ die Behauptung folgt. ■

Neben den Erzeugenden von $\text{Ch}_k(X_\Delta)$ lassen sich auch deren Relationen beschreiben. Dazu bezeichne $\text{Rat}_k^\mathbb{T}(X_\Delta)$ die von

$$\{\text{div}(\chi^u) \hookrightarrow \mathbb{V}_\tau; u \in M(\tau), \tau \in \Delta^{n-(k+1)}\}$$

erzeugte Untergruppe von $Z_k(X_\Delta)$; die Erzeugenden haben eine Darstellung

$$\text{div}(\chi^u) = \sum_{\tau \prec_1 \sigma \in \Delta^{n-k}} \langle u, v_{\tau\sigma} \rangle \mathbb{V}_\sigma,$$

wobei die primitiven Vektoren $v_{\tau\sigma} \in \sigma \cap N$ so gewählt seien, daß $\mathbb{Z} \cdot v_{\tau\sigma} \oplus N_\tau = N_\sigma$ gilt. Damit läßt sich das für $k = n - 1$ in 15.11 gezeigte Resultat verallgemeinern (vgl. [FuSf, 1.1]):

17.14 Satz *Für jedes k und jede torische Varietät X_Δ gilt*

$$\text{Ch}_k(X_\Delta) \cong Z_k^\mathbb{T}(X_\Delta) / \text{Rat}_k^\mathbb{T}(X_\Delta) . \blacksquare$$

D. Der Chowring $\text{Ch}^\bullet(X_\Delta)$

Neben der (homologisch zu interpretierenden) Chowgruppe $\text{Ch}_\bullet(X)$ führt man einen kohomologischen Chowring $\text{Ch}^\bullet(X)$ ein. Dies ist im allgemeinen sehr diffizil; es gibt mehrere Kandidaten dafür, die sich jeweils durch unterschiedliche Vorzüge auszeichnen (vgl. etwa [Fu₂, § 17.3], [FuMPH]). Anders ist es, wenn X R -regulär ist für $R = \mathbb{Z}$ oder \mathbb{Q} ; wir werden daher hier nur diesen Fall betrachten, wobei wir jeweils R als Koeffizientenbereich verwenden werden. Für $R = \mathbb{Q}$ bedeutet dies, daß X eine rationale Homologiemannigfaltigkeit ist.

Für $\text{Ch}_\bullet(X; R) := \text{Ch}_\bullet(X) \otimes_{\mathbb{Z}} R$ definieren wir die Chowkohomologie

$$\text{Ch}^j(X; R) := \text{Ch}_{n-j}(X; R) .$$

Dann trägt der *Chowring* $\text{Ch}^\bullet(X; R) := \bigoplus_k \text{Ch}^j(X; R)$ die Struktur eines kommutativen graduierten Ringes: Schneiden sich zwei Untervarietäten $Y, Z \hookrightarrow X$ *eigentlich*, d.h. gilt $\text{codim } C = \text{codim } Y + \text{codim } Z$ für jede Komponente C von $Y \cap Z$, so ist der Schnittzykel $Y \cdot Z$ die Summe dieser Komponenten mit geeigneten Multiplizitäten, die bei transversalem Schnitt 1 sind. Im allgemeinen ist der Schnittzyklus jedoch nur bis auf rationale Äquivalenz bestimmt.

Wir wollen die Produkte im torischen Fall $X = X_\Delta$ genauer beschreiben; dabei profitieren wir davon, daß Δ für $R = \mathbb{Q}$ nach 9.21 simplizial ist. Gemäß 17.12 genügt es, Produkte der Form $\mathbb{V}_\sigma \cdot \mathbb{V}_\tau$ zu betrachten. Nach (17.3.2) ist \mathbb{V}_σ bis auf einen Faktor ein Produkt von Primdivisoren D_ρ .

Zunächst nehmen wir an, daß sich σ und τ eigentlich schneiden, also gilt:

$$\dim \text{keg}(\sigma, \tau) = \dim \sigma + \dim \tau .$$

17.15 Bemerkung 1) Ist $\gamma := \text{keg}(\sigma, \tau) \in \Delta$, so gilt

$$\frac{\mathbb{V}_\sigma}{m_\sigma} \cdot \frac{\mathbb{V}_\tau}{m_\tau} = \frac{\mathbb{V}_\gamma}{m_\gamma} \in Z_{\dim \gamma}(X; \mathbb{Q}).$$

2) Ist $\gamma \notin \Delta$, so ist $\mathbb{V}_\sigma \cdot \mathbb{V}_\tau = 0$.

Beweis Da X_Δ eine rationale Homologiemannigfaltigkeit ist, sind geeignete Vielfache der Primdivisoren D_ρ nach 14.8 Cartierdivisoren, woraus nach (17.3.1) und (17.3.2) induktiv folgt:

$$\mathbb{V}_\sigma \cdot \mathbb{V}_\tau = \frac{m_\sigma \cdot m_\tau}{m_\gamma} \mathbb{V}_\gamma.$$

Ebenso ergibt sich 2). ■

Durch Rückführung auf 1) und 2) lassen sich mit den Überlegungen zu (17.5.3) alle Schnittprodukte in $\text{Ch}^\bullet(X; R)$ ausrechnen; dabei verwendet man, daß für simpliziale Varietäten jeder invariante Weildivisor rational gesehen als Cartierdivisor behandelt werden kann, vgl. 14.8.

Wir schließen mit einer Bemerkung über die Untersuchung torischer Varietäten X mit beliebigen Singularitäten. Eine Standardtechnik besteht darin, Probleme auf ein singularitätenfreies Modell zurückzuspielen, dort zu lösen und das Ergebnis für X zu interpretieren. Ist ganz allgemein $f: X' \rightarrow X$ ein eigentlicher Morphismus algebraischer Varietäten, so wird ein Homomorphismus „push-forward“ mit Hilfe des Abbildungsgrades durch

$$f_*: \text{Ch}_\ell(X') \rightarrow \text{Ch}_\ell(X), \quad [V] \mapsto \begin{cases} \deg(V/f(V)) \cdot [f(V)], & \dim f(V) = \dim V = \ell \\ 0, & \dim f(V) < \dim V = \ell \end{cases}$$

beschrieben, vgl. [Fu₂, 1.4]. Dabei wird der Abbildungsgrad $\deg(V/f(V))$ durch den Körpergrad der Erweiterung $[\mathcal{R}(V) : \mathcal{R}(f(V))]$ definiert. Für torische Varietäten ist die Situation vergleichsweise einfach: Zum Fächer Δ existiert nach 11.8 und 11.11 eine Auflösung durch eine Unterteilung Δ' . Dann ist die induzierte Abbildung $f: X_{\Delta'} \rightarrow X_\Delta$ nach 8.3 eigentlich und birational. Es sei $\sigma' \in \Delta'$; dieses liegt in genau einem $\sigma \in \Delta$ minimaler Dimension.

1) Ist $\dim \sigma' = \dim \sigma$, so ist die von f induzierte Abbildung $f: \mathbb{V}_{\sigma'} \rightarrow \mathbb{V}_\sigma$ birational und surjektiv, also eigentlich und vom Grad 1, so daß gilt:

$$f_*([\mathbb{V}_{\sigma'}]) = [\mathbb{V}_\sigma].$$

2) Ist $\dim \sigma' < \dim \sigma$, so ist $\dim f(\mathbb{V}_{\sigma'}) < \dim \mathbb{V}_{\sigma'}$ und damit $f_*([\mathbb{V}_{\sigma'}]) = 0$.

§ 17 Anhang: Ein Satz über Chowgruppen von Quotienten

In § 18 betrachten wir folgende Situation: Es bezeichne G eine endliche Gruppe, X eine normale affine G -Varietät und gemäß [AG, 11.18] $\pi: X \rightarrow X/G$ den kanonischen Morphismus auf den (geometrischen) Quotienten.

17.16 Satz *Der induzierte Homomorphismus $\pi^*: \text{Ch}_\bullet(X/G; \mathbb{Q}) \rightarrow \text{Ch}_\bullet(X; \mathbb{Q})^G$ in den Vektorraum der G -invarianten Klassen ist bijektiv.*

Beweis Zunächst konstruiert man einen surjektiven Homomorphismus

$$\pi^*: Z_\bullet(X/G; \mathbb{Q}) \rightarrow Z_\bullet(X; \mathbb{Q})^G :$$

Ist die Untervarietät $Z \hookrightarrow X/G$ von der Dimension i und irreduzibel, so ist die Untervarietät $Y := \pi^{-1}(Z) \hookrightarrow X$ von gleicher Dimension und G -invariant; die G -Wirkung vertauscht ihre irreduziblen Komponenten Y_1, \dots, Y_r . Mit dem sogenannten „Stabilisator“ $I_G(Y) := \{g \in G; g|_Y = \text{id}_Y\}$ von Y in G setzt man in $Z_k(X; \mathbb{Q})$

$$\pi^*(Z) := \sum_{j=1}^r \#(I_G(Y_j)) \cdot Y_j .$$

Für alle $g \in G$ gilt $I_G(gY) = gI_G(Y)g^{-1}$ und damit $g \cdot \pi^*(Z) = \pi^*(Z)$. Die Abbildung ist surjektiv: Ein $C = \sum_Y a_Y Y \in Z_\bullet(X; \mathbb{Q})$ ist genau dann invariant, wenn $a_Y = a_{gY}$ für alle $g \in G$ gilt; daher sei $C \in Z_\bullet(X; \mathbb{Q})^G$ ohne Einschränkung von der Form $C = \sum_{g \in G/I_G(Y)} gY$ für ein irreduzibles $Y \hookrightarrow X$. Aus $\pi^{-1}(\pi(x)) = G \cdot x$ für $x \in X$ folgt

$$G \cdot Y = \bigcup_{y \in Y} G \cdot y = \bigcup_{y \in Y} \pi^{-1}(\pi(y)) = \pi^{-1}(\pi(Y))$$

und damit $C = (1/\#(I_G(Y)))\pi^*(\pi(Y))$.

Diese Konstruktion bildet Hauptdivisoren in Hauptdivisoren ab und induziert daher den gesuchten Homomorphismus der Chowgruppen: Es sei V eine $(i + 1)$ -dimensionale Varietät in X/G , in der Z durch eine rationale Funktion h dargestellt wird. Auf Grund der Verzweigungsordnung von π über Z gilt dann $\text{ord}_{Y_j} \pi^*(h) = \#(I_G(Y_j)) \cdot \text{ord}_Z h$ auf $\pi^{-1}(V)$ (vgl. [Fu₂, 1.7; insbesondere 1.7.6]) und damit

$$(17.16.1) \quad \text{div}(\pi^*(h)) = \pi^*(\text{div } h) ,$$

woraus die Behauptung auf dem Zykelniveau folgt.

Es bleibt die Injektivität für die Chowgruppen zu zeigen. Dazu repräsentiere C eine Klasse in $\text{Ch}_\bullet(X/G; \mathbb{Q})$ aus dem Kern von π^* . Dies bedeutet, daß es eine Obervarietät W der Dimension $(i + 1)$ von $\pi^{-1}(C)$ in X und eine rationale Funktion $h \in \mathcal{R}(W)$ mit $\pi^*(C) = \text{div } h$ gibt. Weil π endlich und damit eigentlich ist, dürfen wir W gemäß [AG, 9.11] als G -invariant voraussetzen. Mit $\pi^*(C)$ ist also auch $\text{div}(h)$ unter G invariant, d.h. für alle $g \in G$ stimmen $\text{div } h$ und $\text{div } h^g$ überein. Die G -invariante Funktion $f := \prod_{g \in G} h^g \in \mathcal{R}(W)$ läßt sich auf Grund der Beziehung $\mathcal{O}(W/G) = \mathcal{O}(W)^G$ in der Form $f = \pi^*(k)$ für ein $k \in \mathcal{R}(W/G)$ schreiben. Nun gilt

$$\#(G) \cdot \pi^*(C) = \text{div } f = \text{div } \pi^*(k) \stackrel{(17.16.1)}{=} \pi^*(\text{div } k) ,$$

also ist $\#(G) \cdot C = 0$ in $\text{Ch}_i(X/G, \mathbb{Q})$ und damit auch $C = 0$. ■

18. Der Satz von Jurkiewicz-Danilov

Für eine *kompakte* torische Varietät $X = X_\Delta$ der Dimension n wird zunächst im glatten Fall mit Hilfe invarianter Untervarietäten \mathbb{V}_σ eine geometrische *Basis* für die Chowgruppe $\text{Ch}_\bullet(X)$ und die ganzzahlige Homologie $H_\bullet(X; \mathbb{Z})$ konstruiert; dieses Verfahren wird sich für simpliziales X auf $\text{Ch}_\bullet(X; \mathbb{Q})$ und $H_\bullet(X; \mathbb{Q})$ übertragen lassen. Da wir für die Chowgruppen nach 17.12 schon wissen, daß es ein solches *Erzeugendensystem* gibt, haben wir aus diesen Erzeugenden eine geeignete Auswahl zu treffen und dann deren lineare Unabhängigkeit zu zeigen. Nach 13.4 brauchen wir dazu mindestens $m := \#\Delta^n$ Elemente; reicht umgekehrt diese Anzahl aus, dann ist notwendig $H_\bullet(X; R)$ für $R = \mathbb{Z}$ oder \mathbb{Q} frei, und die ungeraddimensionale Homologie verschwindet.

Es sei also Δ ein vollständiger Fächer. Wir fixieren eine Ordnung $(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$ auf Δ^n . Für jedes i mit $1 \leq i \leq m$ interessiert uns nun besonders die Seite (mit $\sigma_{ij} := \sigma_i \cap \sigma_j$)

$$(18.1.1) \quad \tau_i := \bigcap_{j \geq i, \dim \sigma_{ij} \geq n-1} \sigma_j$$

von σ_i , welche also der Schnitt aller $\sigma_j \in \Delta^n$ mit $j \geq i$ ist, die σ_i wenigstens in einer Facette schneiden.

Diese Konstruktion ist besonders leicht zu überschauen, wenn Δ zusätzlich *simplizial* ist, was gleichzeitig der für uns wichtigste Spezialfall ist: Für jeden dieser Kegel σ_i ist jede seiner Facetten $\sigma_i \cap \sigma_j$ dadurch charakterisiert, daß sie genau einen primitiven Kantenvektor v_j von σ_i nicht enthält. Daher gilt dann für Durchschnitte von r paarweise verschiedenen Facetten von σ_i :

$$(18.1.2) \quad \gamma := \bigcap_{j=1}^r \sigma_i \cap \sigma_{\ell_j} = \text{konv} \{v_\ell \in \sigma_i; \ell \neq \ell_1, \dots, \ell_r\}.$$

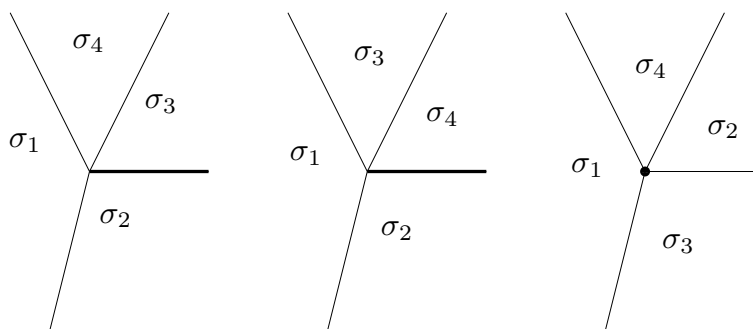
Also ist im simplizialen Falle die Anzahl der bei der Bildung des Durchschnittes γ erforderlichen Facetten einfach die Kodimension von γ .

Ersichtlich gilt stets $\tau_m = \sigma_m$. Weil Δ vollständig ist, ergibt sich $\tau_1 = \{0\}$ als Durchschnitt aller Facetten von σ_1 . Wir werden im folgenden nur Ordnungen $(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$ von Δ^n verwenden, für die jedes τ_i folgende Bedingung erfüllt:

$$(18.1.3) \quad \text{Gilt } \tau_i \prec \sigma_j, \text{ so folgt } i \leq j.$$

18.1 Definition Für einen vollständigen Fächer Δ heie eine Anordnung $(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$ von Δ^n eine Schälung, wenn sie der Bedingung (18.1.3) genügt. Wir nennen Δ schälbar, wenn auf Δ eine Schälung existiert.

Bedingung (18.1.3) ist trivialerweise für τ_1 und τ_m erfüllt; sie gilt auch für τ_{m-1} , da jede Facette eines Kegels in höchstens zwei Kegeln enthalten ist. Daß die Bedingung nicht immer für alle restlichen Kegel τ_j zutrifft, läßt sich mit verschiedenen Ordnungen für einen zweidimensionalen Fächer demonstrieren; nur die dritte Ordnung verletzt Bedingung (18.1.3) (die Kegel τ_2 sind jeweils durch fette Darstellung hervorgehoben):



FIGUR 18.1 Schlungen im Zweidimensionalen?

Bedingung (18.1.3) hilft, Δ in „Intervalle“ zu partitionieren:

18.2 Lemma Ist der Fächer Δ geschält, so gilt:

- 1) Zu jedem Kegel γ in Δ gehört eindeutig ein Index $j = j(\gamma)$ mit

$$\tau_j \prec \gamma \prec \sigma_j .$$

Er ist das kleinste j mit der Eigenschaft „ $\gamma \prec \sigma_j$ “.

- 2) Aus $\gamma \prec \gamma'$ folgt $j(\gamma) \leq j(\gamma')$.

Beweis Behauptung 2) folgt aus (18.1.3) und 1) wegen

$$\tau_{j(\gamma)} \prec \gamma \prec \gamma' \prec \sigma_{j(\gamma')} .$$

Zu 1) zeigen wir zunächst die Eindeutigkeit: Gilt auch noch $\tau_i \prec \gamma \prec \sigma_i$, so folgt $i \leq j$ mit (18.1.3) aus $\tau_i \prec \sigma_j$; aus Symmetriegründen gilt sogar die Gleichheit. Für den Existenzbeweis wähle man das minimale j mit $\gamma \prec \sigma_j$. Ist $\gamma \neq \sigma_j$, so stelle man γ gemäß 1.20 als Durchschnitt von Facetten von σ_j dar. Diese sind jeweils der Durchschnitt von σ_j mit einem anderen maximalen Kegel, der einen höheren Index hat, weil j minimal gewählt war. Insbesondere ist τ_j in γ enthalten. ■

Für $R = \mathbb{Z}$ oder \mathbb{Q} hat man eine kanonische, den Grad verdoppelnde Abbildung der Chowgruppe $\text{Ch}_\bullet(X; R)$ nach $H_\bullet(X; R)$. Dies ist evident für die (abgeschlossenen)

Untervarietäten von X^{27}); daß sich diese Abbildung auf rationale Äquivalenzklassen durchdrückt, wird etwa in [Fu₂, Prop. 19.1.1] gezeigt. Wir nennen Δ bzw. X_Δ R -regulär, wenn sie regulär bzw. (für \mathbb{Q}) simplizial sind. Deuten wir mit $[\mathbb{V}_\sigma]$ die Klasse von \mathbb{V}_σ in $\text{Ch}_{\text{codim } \sigma}(X; R)$ bzw. $H_{2 \text{codim } \sigma}(X; R)$ an, so gilt:

18.3 Theorem *Ist die kompakte torische Varietät X_Δ R -regulär und ist Δ schälbar, dann sind die R -Moduln $\text{Ch}_\bullet(X_\Delta; R)$ und $H_\bullet(X_\Delta; R)$ isomorphe freie R -Moduln mit Basis $([\mathbb{V}_{\tau_1}], \dots, [\mathbb{V}_{\tau_m}])$.*

Beweis Wir verwenden folgende Partition von X_Δ in Mengen Y_i mit $1 \leq i \leq m$, deren Beschreibung sich aus 7.7 ergibt:

$$Y_i := \bigcup_{\tau_i \prec \gamma \prec \sigma_i} \mathbb{B}_\gamma = \mathbb{V}_{\tau_i} \cap X_{\sigma_i},$$

also gilt $\overline{Y}_i = \mathbb{V}_{\tau_i}$, und wir definieren dazu für jedes i die Menge

$$Z_i := Y_i \cup \dots \cup Y_m.$$

Mit Hilfe des Lemmas

18.4 Lemma 1) *Jedes Z_i ist Zariski-abgeschlossen in $Z_1 = X_\Delta$, und $Z_i \setminus Z_{i+1} = Y_i$.*

2) *Ist X_Δ R -regulär, so verschwindet die ungeraddimensionale Homologie mit abgeschlossenen Trägern von Y_i , und es gilt*

$$\text{Ch}_j(Y_i; R) \cong H_{2j}^{\text{cl}}(Y_i; R) \cong \begin{cases} R \cdot Y_i, & j = n - \dim(\tau_i) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

läßt sich durch fallende Induktion über i zeigen:

Die kanonische Abbildung $\text{Ch}_\bullet(Z_i; R) \rightarrow H_\bullet(Z_i; R)$ ist ein Isomorphismus von R -Moduln mit Basis $([\mathbb{V}_{\tau_i}], \dots, [\mathbb{V}_{\tau_m}])$.

Der Fall $i = m$ ist trivial, denn $Y_m = Z_m$ ist einpunktig. Für den Schritt „ $i + 1 \implies i$ “ verwenden wir zu $p \in \mathbb{N}$ folgendes kommutative Diagramm mit Koeffizienten in R , das sich für $Y_i = Z_i \setminus Z_{i+1}$ aus dem Lokalisierungslemma 17.10 und der exakten Homologiesequenz ergibt:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Ch}_p(Z_{i+1}) & \rightarrow & \text{Ch}_p(Z_i) & \rightarrow & \text{Ch}_p(Y_i) & \rightarrow & 0 \\ \downarrow \cong & & \downarrow \vartheta_p & & \downarrow \cong & & \downarrow \\ 0 = H_{2p+1}^{\text{cl}}(Y_i) & \rightarrow & H_{2p}(Z_{i+1}) & \rightarrow & H_{2p}(Z_i) & \rightarrow & H_{2p}^{\text{cl}}(Y_i) \rightarrow H_{2p-1}(Z_{i+1}) \end{array} .$$

Dabei ist die erste vertikale Abbildung nach Induktionsvoraussetzung ein Isomorphismus, die dritte nach Lemma 18.4, aus dem sich auch $H_{2p+1}^{\text{cl}}(Y_i) = 0$ ergibt. Aus einer

²⁷⁾ $H_{2 \dim \mathbb{V}_\sigma}(\mathbb{V}_\sigma; R)$ hat die Form $R \cdot \mathbb{V}_\sigma$; mit $\iota : \mathbb{V}_\sigma \hookrightarrow X$ gilt

$$[\mathbb{V}_\sigma] = \iota_*(\mathbb{V}_\sigma) \in H_{2 \dim \mathbb{V}_\sigma}(X; R).$$

geeigneten Fassung des Fünferlemmas folgt damit, daß ϑ_p ein Isomorphismus ist. Als einzige neue Klasse kommt nach Lemma 18.4 im Induktionsschritt

$$[Y_i] \in \text{Ch}_{n-\dim(\tau_i)}(Y_i) \cong H_{2(n-\dim(\tau_i))}(Y_i)$$

hinzu, das in Z_i durch $\bar{Y}_i = \mathbb{V}_{\tau_i}$ repräsentiert wird. ■

Beweis von Lemma 18.4 Nach 18.2 1) bilden die Y_i eine Partition von X_Δ , und es gilt $Z_1 = X_\Delta$. Der Abschluß einer Bahn \mathbb{B}_γ ist nach 7.7 2) die Vereinigung aller Bahnen \mathbb{B}_ε mit $\gamma \prec \varepsilon$. Aus 18.2 2) folgt damit unmittelbar, daß jedes

$$Z_i = \bigcup_{j=i}^m \bigcup_{\tau_j \prec \gamma \prec \sigma_j} \mathbb{B}_\gamma$$

abgeschlossen ist, also gilt 1). Des weiteren ist $Y_i = \mathbb{V}_{\tau_i} \cap X_{\sigma_i}$ eine affiner offener Teil der torischen Varietät \mathbb{V}_{τ_i} , der einem maximalen Kegel zum Gitter N/τ_i entspricht; dieser hat die Dimension $t := \text{codim } \tau_i$. Ist dieser Kegel regulär, so ist Y_i isomorph zu \mathbb{C}^t , vgl. 3.6 2), so daß die Homologieaussage folgt; für die Chowgruppen vgl. 17.11. Im simplizialen Fall hat Y_i die Gestalt \mathbb{C}^t/G mit einer endlichen Gruppe G , vgl. 9.5. Dann gelten

$$(18.4.1) \quad \text{Ch}_\bullet(\mathbb{C}^t/G; \mathbb{Q}) = \text{Ch}_\bullet(\mathbb{C}^t; \mathbb{Q})^G \quad \text{und} \quad H_\bullet^{\text{cld}}(\mathbb{C}^t/G; \mathbb{Q}) = H_\bullet^{\text{cld}}(\mathbb{C}^t; \mathbb{Q})^G,$$

vgl. 17.16 und [Br, Th. II.19.1], so daß die Behauptung aus dem regulären Fall folgt. ■

Es ist praktisch, ganz allgemein für einen Fächer Δ einen f -Vektor

$$f(\Delta) := (f_0(\Delta), \dots, f_n(\Delta))$$

einzuführen, wobei $f_j(\Delta)$ die Anzahl der j -Kegel bezeichnet. Dann gilt für polytopische Fächer natürlich $f_j(\Delta^P) = f_{j-1}(P)$.

18.5 Korollar *Ist Δ vollständig, simplizial und schälbar, so folgen $b_{2j+1}(X_\Delta) = 0$,*

$$b_{2j}(X_\Delta) = \sum_{i=j}^n (-1)^{i-j} \binom{i}{j} f_{n-i}(\Delta), \quad f_j(\Delta) = \sum_{\ell=0}^j \binom{n-\ell}{n-j} b_{2n-2\ell}(X_\Delta).$$

Beweis Man fixiere eine Schälung von Δ . Dann gilt $b_{2j} = \dim_{\mathbb{Q}} \text{Ch}_j(X, \mathbb{Q})$ nach 18.3. Zu jedem der $b_{2n-2\ell}$ Erzeugenden τ_i von $\text{Ch}_{n-\ell}(X)$ gibt es genau $\binom{n-\ell}{n-j}$ j -dimensionalen Kegel γ mit $\tau_i \prec \gamma \prec \sigma_i$. Da nach Lemma 18.2 jeder j -dimensionale Kegel in genau einem solchen Intervall auftritt, folgt die Formel für f_j . Die Formel für b_{2j} ergibt sich daraus durch einfaches Umrechnen, vgl. Aufgabe 18.1. ■

Man kann für einen beliebigen vollständigen Fächer Δ rein formal einen h -Vektor $h(\Delta) = (h_0(\Delta), \dots, h_n(\Delta))$ mit Komponenten

$$(18.5.0) \quad h_j(\Delta) := \sum_{i=j}^n (-1)^{i-j} \binom{i}{j} f_{n-i}(\Delta)$$

eingeführen. Damit ergibt sich auch $h_j(P) := h_j(\Delta^P)$, wobei an $f_j(P) = f_{j+1}(\Delta^P)$ erinnert sei.

Aufgabe 18.1 Man zeige $f_j(\Delta) = \sum_{\ell=0}^j \binom{n-\ell}{n-j} h_{n-\ell}(\Delta)$.

Dann liest sich 18.5 für schälbares vollständiges simpliziales Δ als

$$(18.5.1) \quad h_j(\Delta) = b_{2j}(X_\Delta).$$

Diese Identität kann sich nicht für alle Werte von j auf nicht simpliziale Fächer übertragen, da gewisse $h_j(\Delta)$ sogar negative Werte annehmen können: Bezeichnet etwa P den dreidimensionalen Standardkubus, so ist

$$f_0(\Delta_P) = 1, \quad f_1(\Delta_P) = 8, \quad f_2(\Delta_P) = 12, \quad f_3(\Delta_P) = 6$$

und damit

$$h_1(\Delta_P) = \sum_{i=1}^3 (-1)^{i-1} i f_{3-i}(\Delta_P) = -1.$$

Durch eine einfache Rekursion kann man den h -Vektor aus dem f -Vektor berechnen: Man konstruiere ein gleichschenkliges Dreieck (mit nicht bezeichneter Spitze), dessen rechte Seite durch Punkte f_0, \dots, f_n und dessen linke Seite durch $1, \dots, 1$ gegeben sei. Man fülle von oben beginnend das Innere wie im folgenden Beispiel für $n = 4$ durch Differenzbildung „rechts — links“ auf:

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & & & 1 = f_0 \\
 & & & & & 1 & & & & f_1 \\
 & & & & & 1 & & & & f_1 - 1 & & & & & f_2 \\
 & & & & & 1 & & f_1 - 2 & & f_2 - f_1 + 1 & & & & & f_3 \\
 & & & & & 1 & & f_1 - 3 & & f_2 - 2f_1 + 3 & & f_3 - f_2 + f_1 - 1 & & & f_4 \\
 & & & & & h_3 & & h_2 & & h_1 & & & & & h_0
 \end{array}$$

Allgemeiner folgt auf die mit f_n schließende Zeile die mit den Zahlen h_{n-1}, \dots, h_0 .

Für die Bettizahlen von X_P gilt auch bei allgemeinem Polytop P in V^* :

$$(18.5.2) \quad h_0(\Delta_P) = b_0 = 1 = h_n(\Delta_P) = b_{2n} \quad \text{und} \quad h_{n-1}(\Delta_P) = b_{2n-2} = f_1(\Delta_P) - n.$$

Während die Behauptung für $h_n(\Delta_P)$ trivial ist, gilt mit $f_i(\partial P) = f_{i+1}(\Delta_P)$

$$\begin{aligned}
 h_0(\Delta_P) &= \sum_{i=0}^n (-1)^i f_{n-i}(\Delta_P) = - \sum_{i=0}^n (-1)^{i+1} f_{n-(i+1)}(\Delta_P) \\
 &= (-1)^{n+1} \left(\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i f_i(\partial P) - f_{-1}(\partial P) \right) = (-1)^{n+1} (-1)^{n-1} = 1
 \end{aligned}$$

nach dem Eulerschen Polyedersatz [Ew, Th. III.3.1], angewandt auf den sphärischen Komplex ∂P . Die Berechnung von $h_{n-1}(\Delta_P)$ wurde in 9.17 durchgeführt.

Aufgabe 18.2 Für eine kompakte dreidimensionale torische Varietät X_Δ zeige man

$$h_1(\Delta) = b_2(X_\Delta) - b_3(X_\Delta).$$

18.6 Satz Jeder polytopische simpliziale Fächer Δ ist schälbar.

Beweis Man wähle zur zugehörigen projektiven Varietät $X := X_\Delta$ gemäß 16.19 eine Δ -streng konkave Trägerfunktion $h_D = (u_\sigma)_{\sigma \in \Delta^n}$ bzw. einen invarianten amplen Cartierdivisor D . Dann sind die u_σ nach Aufgabe 16.3 die genauen Ecken des Polytops P_D in $M_{\mathbb{R}}$, für das nach 16.2

$$\mathcal{O}_D(X) = \bigoplus_{u \in P_D \cap M} \mathbb{C} \cdot \chi^u$$

gilt. Wir bestimmen nun eine Höhenfunktion auf M , welche die Ecken von P_D trennt: Weil N die Punkte von M trennt, gibt es ein $v \in N$, für das die Zuordnung $\sigma \mapsto \langle u_\sigma, v \rangle$ auf Δ^n injektiv ist. Damit läßt sich Δ^n so anordnen, daß

$$\langle u_{\sigma_1}, v \rangle < \dots < \langle u_{\sigma_m}, v \rangle$$

gilt. Unter dem ordnungsumkehrenden Verbandsisomorphismus

$$\mathfrak{S}(P_D) \rightarrow \Delta, \quad Q \mapsto \sigma_Q = (\text{keg}(P_D - Q))^\vee$$

entspricht jeder Ecke $u_i := u_{\sigma_i}$ gerade der maximale Kegel σ_i , vgl. 5.23. Es bezeichne nun Q_i die zum Kegel τ_i aus (18.1.1) korrespondierende Seite von P_D , also die kleinste Seite, die u_i und alle Kanten $\overline{u_i u_j}$ von P_D mit $j > i$ enthält. Wie bereits zu (18.1.2) vermerkt, enthält Q_i keine weiteren Kanten von P_D , d.h., alle anderen Kanten liegen nach Wahl von v im oberen Halbraum

$$H^+ := \{u \in M_{\mathbb{R}}; \langle u - u_i, v \rangle \geq 0\}.$$

Die Schälbarkeitsbedingung (18.1.3) besagt nun, daß Q_i keine Ecke u_j mit $j < i$ enthält; sie trifft zu, wenn Q_i in H^+ enthalten ist. Wenn das nicht erfüllt ist, betrachte man den Stern

$$\text{Stern}_{Q_i}(u_i) = \bigcup_{u_i \in F \prec Q_i} F^\circ$$

von u_i in Q_i . Für $\varepsilon > 0$ schneidet die Hyperebene $H_{-\varepsilon} := \{u \in M_{\mathbb{R}}; \langle u - u_i, v \rangle = -\varepsilon\}$ alle Seiten F von Q_i transversal, da die Linearform v die Ecken von P_D trennt. Für hinreichend kleines ε ist daher $H_{-\varepsilon} \cap \text{Stern}_{Q_i}(u_i)$ ein nicht leeres Polytop, dessen Ecken gerade die Schnittpunkte von $H_{-\varepsilon}$ mit Kanten in $\text{Stern}_{Q_i}(u_i)$ sind. Also existieren doch Kanten durch u_i in Q_i , die nicht in H^+ liegen, ein Widerspruch! ■

Da polytopische Fächer nach 16.19 zu projektiven Varietäten führen, haben wir mit 18.5 erneut einen Spezialfall von 13.10 bewiesen:

18.7 Korollar *Ist die torische projektiv algebraische Varietät X_Δ eine rationale Homologiemannigfaltigkeit, so gilt*

$$b_{2i}(X_\Delta) = \sum_{j=i}^n (-1)^{j-i} \binom{j}{i} f_{n-j}(\Delta) = h_i(\Delta) \quad \text{und} \quad b_{2i+1}(X_\Delta) = 0. \blacksquare$$

Schälbare Fächer müssen nicht simplizial sein:

Aufgabe 18.3 Man gebe für den vollständigen Fächer $\Delta \subset \mathbb{R}^3$ mit den Kanten

$$v_1 = e_1, \quad v_2 = e_2, \quad v_3 = -(e_1 + e_3), \quad v_4 = -(e_2 + e_3), \quad v_5 = e_3,$$

der zum projektiven Abschluß des Segre-Kegels (vgl. 1.26) gehört, eine Schälung an.

Als nächstes bringen wir eine geometrische Beschreibung der Chowgruppen sowie der Homologie mit Hilfe von Divisorenklassen. Dieses ist am einfachsten in den jeweiligen (im R -regulären Fall äquivalenten) kohomologischen Versionen mit ihrer Ringstruktur zu formulieren. Auf Grund der Poincaré-Dualität existiert für R -reguläres vollständiges schälbares Δ nach 18.3 ein Isomorphismus

$$(18.8.1) \quad \text{Ch}^j(X; R) := \text{Ch}_{n-j}(X; R) \cong H_{2(n-j)}(X; R) \cong H^{2j}(X; R).$$

Dies soll nun zu einem einfachen algebraischen Formalismus erweitert werden, und auch dazu dient die kohomologische Schreibweise: Es seien D_1, \dots, D_k die irreduziblen invarianten Divisoren von X , die den primitiven N -Vektoren v_1, \dots, v_k mit $k := k(\Delta)$ entsprechen. Im Polynomring $R^\bullet := R[D_1, \dots, D_k]$ bezeichnen wir

1) mit I das von den Monomen $D_{i_1} \dots D_{i_\ell}$ für $\text{keg}(v_{i_1}, \dots, v_{i_\ell}) \notin \Delta$,

2) mit J das von den Elementen $\sum_{i=1}^k \langle u, v_i \rangle D_i$ für $u \in M$ (Hauptdivisoren, vgl. (14.1.1))

erzeugte Ideal in R^\bullet . Der Faktorring $R[D_1, \dots, D_k]/I$ heißt in der Literatur auch der *Stanley-Reisner-Ring* von Δ .

18.8 Satz von Jurkiewicz-Danilov *Ist die kompakte torische Varietät $X = X_\Delta$ R -regulär und Δ schälbar²⁸⁾, so gibt es kanonische Ringisomorphismen*

$$R[D_1, \dots, D_k]/(I + J) \cong \text{Ch}^\bullet(X, R) \cong H^\bullet(X, R).$$

Beweis Interpretiert man 18.3 gemäß (18.8.1), so genügt es, $R^\bullet/(I + J) \cong \text{Ch}^\bullet(X)$ zu zeigen. Der kanonische Homomorphismus von R -Algebren

$$(18.8.2) \quad R^\bullet \rightarrow \text{Ch}^\bullet(X) \quad \text{mit} \quad D_{i_1} \dots D_{i_\ell} \mapsto D_{i_1} \cdot \dots \cdot D_{i_\ell}$$

bildet Hauptdivisoren ebenso wie Produkte mit $\text{keg}(v_{i_1}, \dots, v_{i_\ell}) \notin \Delta$ auf die Nullklasse ab, vgl. (17.3.2). Also erhalten wir einen induzierten Homomorphismus

$$(18.8.3) \quad \vartheta: R^\bullet/(I + J) \rightarrow \text{Ch}^\bullet(X).$$

²⁸⁾ Nach [Da] gilt dieser Satz ganz allgemein für kompakte R -reguläre torische Varietäten.

Dieser ist nach 18.3 und (17.3.2) surjektiv. So bleibt nur dessen Injektivität zu zeigen. Dazu verwenden wir die Abbildung

$$p: \Delta \rightarrow R^\bullet / (I+J), \quad \sigma = \text{keg}(v_{i_1}, \dots, v_{i_\ell}) \mapsto p(\sigma) = p(v_1, \dots, v_{i_\ell}) = D_{i_1} \dots D_{i_\ell} + (I+J).$$

Fixieren wir nun eine Schälung auf Δ^n und bestimmen dazu τ_1, \dots, τ_m gemäß (18.1.3). Wenn $(p(\tau_1), \dots, p(\tau_m))$ ein Erzeugendensystem des R -Moduls $R^\bullet / (I+J)$ ist, dann ist ϑ injektiv und damit der Satz gezeigt, weil $(\vartheta p(\tau_1), \dots, \vartheta p(\tau_m))$ in $\text{Ch}^\bullet(X)$ nach Theorem 18.3 eine R -Modulbasis bildet. Wir erhalten den fehlenden Schritt aus einem algebraischen „Moving Lemma“, das im simplizialen Fall die Überlegung des Abschlusses von § 17 A verallgemeinert:

18.9 Lemma *Es seien $\alpha \not\prec \gamma \prec \beta$ Kegel aus dem R -regulären Fächer Δ . Dann existieren Kegel $\gamma_i \in \Delta^{\dim \gamma}$ mit $\alpha \prec \gamma_i \not\prec \beta$ und $r_i \in R$ mit*

$$p(\gamma) = \sum r_i p(\gamma_i) \quad \text{in } R^\bullet / (I+J).$$

Geometrisch bedeutet das Moving Lemma: Ist eine Kette $\mathbb{V}_\beta \subset \mathbb{V}_\gamma \subsetneq \mathbb{V}_\alpha$ irreduzibler invarianter Untervarietäten in X_Δ gegeben, dann existiert ein zu \mathbb{V}_γ R -rational äquivalentes V' mit $\mathbb{V}_\beta \not\subset V' \subset \mathbb{V}_\alpha$.

Zunächst folgt aus 18.9 die Beziehung

$$(18.9.1) \quad R^\bullet / (I+J) \cong \sum_{\gamma \in \Delta} R p(\gamma),$$

wozu nur zu zeigen ist, daß der von $R \cdot \text{Im}(p)$ in $R^\bullet / (I+J)$ erzeugte Untermodul eine R -Unteralgebra (und damit alles) ist, also keine Erzeugenden mit mehrfachen Faktoren benötigt werden: Es genügt offensichtlich zu zeigen, daß sich (der einfacheren Notierung halber) etwa die Klasse von $D_1 \cdot p(v_1, \dots, v_j)$ als Summe von Elementen ohne mehrfache Faktoren darstellen läßt. Dazu wenden wir 18.9 auf

$$\mathfrak{o} \prec \text{keg}(v_1) \prec \text{keg}(v_1, \dots, v_j)$$

an und erhalten eine Darstellung $p(v_1) = \sum_{i=j+1}^k r_i p(v_i)$ und damit durch Einsetzen

$$D_1 \cdot p(v_1, \dots, v_j) = p(v_1) \cdot p(v_1, \dots, v_j) = \sum_{i=j+1}^k r_i p(v_1, \dots, v_j, v_i);$$

nach Fortlassen aller Summanden $p(v_1, \dots, v_j, v_i)$ mit $\text{keg}(v_1, \dots, v_j, v_i) \notin \Delta$ ergibt sich die gewünschte Darstellung.

Ähnlich zeigen wir durch fallende Induktion über $i \leq m$:

$$(18.9.2) \quad \tau_i \prec \gamma \prec \sigma_i \quad \Rightarrow \quad p(\gamma) \in \sum_{j \geq i} R p(\tau_j) \subset R^\bullet / (I+J).$$

Ist $\gamma = \tau_i$, was insbesondere für den Induktionsbeginn $i = m$ erfüllt ist, so ist die Behauptung (18.9.2) trivial. Andernfalls wenden wir das Moving Lemma auf die Kette $\tau_i \prec \gamma \prec \sigma_i$ an und erhalten Kegel γ_ℓ mit $\tau_i \prec \gamma_\ell \not\prec \sigma_i$ und $p(\gamma) = \sum r_\ell p(\gamma_\ell)$. Zu jedem ℓ existiert nach 18.2 genau ein $j \neq i$ mit $\tau_j \prec \gamma_\ell \prec \sigma_j$. Dies impliziert $\tau_i \prec \sigma_j$, nach (18.1.3) also $j > i$. Daher können wir auf γ_ℓ die Induktionsvoraussetzung anwenden und erhalten die Behauptung.

Nach 18.2 liegt jedes $\gamma \in \Delta$ in einem Intervall $\tau_i \prec \sigma_i$, so daß aus (18.9.1) und (18.9.2) schließlich folgt, daß $(p(\tau_1), \dots, p(\tau_m))$ ein Erzeugendensystem von $R^\bullet / (I + J)$ ist:

$$\sum_{\gamma \in \Delta} R p(\gamma) \subset \sum_{i=1}^m R p(\tau_i). \quad \blacksquare \blacksquare$$

Beweis von 18.9 In einer geeigneten Numerierung der v_j können wir annehmen:

$$\alpha = \text{keg}(v_1, \dots, v_p), \quad \gamma = \text{keg}(v_1, \dots, v_\ell), \quad \beta = \text{keg}(v_1, \dots, v_q)$$

mit $p < \ell \leq q \leq n$, und (v_1, \dots, v_n) ist eine R -Basis von $N \otimes_{\mathbb{Z}} R$. Für die Linearform $u \in M$ mit

$$\langle u, v_i \rangle = \begin{cases} 1, & i = \ell \\ 0, & i \neq \ell, \quad 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

ist $D := D_\ell + \sum_{j=n+1}^k \langle u, v_j \rangle D_j$ ein Hauptdivisor, also liegt $D_1 \dots D_{\ell-1} D$ in $(I + J)$, d.h.

$$D_1 \dots D_{\ell-1} D_\ell \sim - \sum_{j=n+1}^k \langle u, v_j \rangle D_1 \dots D_{\ell-1} D_j \quad \text{mod } (I + J).$$

Läßt man aus der rechten Summe noch alle Terme mit $\text{keg}(v_1, \dots, v_{\ell-1}, v_j) \notin \Delta$ fort, so erhält man die gewünschte Darstellung in $R^\bullet / (I + J)$. ■

Wir bringen noch zwei Anwendungen für den h -Vektor aus (18.5.0), die im Zusammenhang mit der McMullen Vermutung relevant werden:

18.10 Dehn-Sommerville-Gleichungen Ist Δ ein simplizialer vollständiger Fächer, so gilt $h_j(\Delta) = h_{n-j}(\Delta)$.

Beweis Für kompakte rationale Homologiemannigfaltigkeiten ist der Poincaréhomomorphismus nach (9.20.1) ein Isomorphismus und damit $b_j(X_\Delta) = b_{2n-j}(X_\Delta)$, woraus mit 18.3 die Behauptung folgt. — Natürlich kann man dieses Resultat auch rein kombinatorisch, also ohne Rückgriff auf die Topologie beweisen, vgl. etwa [Ew, III 3.5 – 3.7]. ■

Überträgt man die Dehn-Sommerville-Gleichungen auf die f -Vektoren, so ergeben sich dafür explizite Beziehungen.

Aufgabe 18.4 Man zeige die Äquivalenz zwischen dem Gleichungssystem für h -Vektoren in 18.10 und dem Gleichungssystem

$$\sum_{i=j}^n (-1)^i \binom{i}{j} f_i(\Delta) = (-1)^n f_j(\Delta) \quad \text{für } j = 0, \dots, n.$$

18.10 überträgt sich nicht auf beliebige projektive torische Varietäten: Für den dreidimensionalen Kubus P haben wir im ersten Teil dieses Paragraphen gesehen, daß $h_2(\Delta_P) = 8 - 3 = 5$, aber $h_1(\Delta_P) = -1$ ist.

18.11 Korollar *Ist Δ ein vollständiger simplicialer Fächer und $X = X_\Delta$ projektiv, so gilt $h_i \leq h_{i+1}$ für $i < n/2$.*

Beweis Nach 18.3 genügt es, $b_j(X) \leq b_{j+2}(X)$ für $j < n$ und $X := X_\Delta$ zu zeigen. Dazu bedient man sich des „Harten Lefschetz Theorems“ (vgl. 23.9) für rationale Koeffizienten auf der rationalen Homologiemannigfaltigkeit X_Δ : Bezeichnet $H \in H_{2n-2}(X; \mathbb{Q})$ die Klasse eines Hyperebenenschnittes von X und $\omega := P_{2n-2}^{-1}(H)$ das Poincarédual, so ist die durch das Cup-Produkt gegebene Multiplikation

$$H^{n-j}(X) \xrightarrow{\mu(\omega^j)} H^{n+j}(X)$$

ein Isomorphismus. Insbesondere sind für $j < n$ die Teilabbildungen

$$H^j(X) \xrightarrow{\mu(\omega)} H^{j+2}(X)$$

injektiv, woraus die Behauptung folgt. ■

19. Homologie mit abgeschlossenen Trägern

Es geht in diesem Abschnitt um die effektive Berechnung der ganzzahligen Homologie torischer Varietäten. Sie basiert auf einer Spektralsequenz, die sich für abgeschlossene Träger wesentlich besser behandeln läßt als für kompakte Träger, was für kompakte Varietäten natürlich keinen Unterschied macht. Wir gehen nur auf den einfachen Fall ein. Dabei setzen wir die Theorie der Spektralsequenzen als bekannt voraus (vgl. etwa [Sp] oder [MCl]). Die Beschreibung der Homologie wird übersichtlicher, wenn man sich auf nicht entartete Varietäten beschränkt. Dieses ist wegen den Künnethformel für abgeschlossene Träger (vgl. [Br, V.13.4])

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \sum_{i+j=\ell} H_i^{\text{cld}}(T; G) \otimes_R H_j^{\text{cld}}(T'; G') &\rightarrow H_\ell^{\text{cld}}(T \times T'; G \otimes G') \\ &\rightarrow \sum_{i+j=\ell-1} \text{Tor}(H_i^{\text{cld}}(T; G), H_j^{\text{cld}}(T'; G')) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

keine Einschränkung: Zerlegt man einen allgemeinen Fächer Δ in der Form $\Delta' \oplus o$ mit nicht entartetem Δ' in einem Untervektorraum von \mathbb{R}^n der Kodimension d , so ist nach 4.5

$$H_\bullet^{\text{cld}}(X_\Delta; R) \cong H_\bullet^{\text{cld}}(X_{\Delta'}; R) \otimes_R H_\bullet^{\text{cld}}((\mathbb{C}^*)^d; R)$$

mit $H_{d+i}^{\text{cld}}((\mathbb{C}^*)^d; R) \cong R^{\binom{d}{i}}$. Daher werden wir im ganzen Paragraphen X als *nicht entartet* voraussetzen.

Die natürliche aufsteigende Filtrierung der torischen Varietät $X = X_\Delta$ durch invariante abgeschlossene Unterräume (vgl. (17.12.1))

$$X_j = \bigcup_{\sigma \in \Delta^{\geq n-j}} \mathbb{B}_\sigma$$

führt für jeden Modul G über einem gegebenen Hauptidealbereich R zu einer konvergenten Spektralsequenz (vgl. [Sp, 9.1.6])

$$E_{u,v}^1(\Delta; G) = H_{u+v}^{\text{cld}}(X_u, X_{u-1}; G) \implies H_{u+v}^{\text{cld}}(X; G).$$

Damit gilt für $j = 1, \dots, \infty$

$$(19.1.1) \quad E_{u,v}^j(\Delta; G) = 0 \text{ außer für } 0 \leq v \leq u \leq n.$$

Je nach Situation schreiben wir einfach $E_{u,v}^j(\Delta)$, $E_{u,v}^j(G)$ oder $E_{u,v}^j$.

Eine konkrete Auswertung dieser „torischen“ Spektralsequenz (die übrigens auch mit kompakten Trägern existiert, vgl. [BaBrFiKp₂], dann aber wesentlich komplizierter wird) soll in vier Schritten versucht werden:

- 1) Man bestimme $E_{u,v}^1(\Delta; \mathbb{Z})$ aus dem Fächer Δ .
- 2) Man bestimme $E_{u,v}^2(\Delta; G)$ aus $E_{u,v}^1(\Delta; \mathbb{Z})$ und G .
- 3) Man bestimme $E_{u,v}^\infty(\Delta; G)$ aus $E_{u,v}^2(\Delta; G)$, möglichst ohne Rückgriff auf die explizite Form der Differentiale $d_{u,v}^r: E_{u,v}^r \rightarrow E_{u-r,v+r-1}^r$.
- 4) Man bestimme $H_{u+v}^{\text{clid}}(X; G)$ aus $E_{u,v}^\infty(\Delta; G)$.

Vor einer Diskussionsdiskussion wollen wir darauf eingehen, daß sich für die häufig besonders interessanten Randterme bereits aus den spärlichen vorliegenden Informationen Aussagen ableiten lassen. Dazu benutzen wir (in einer geeigneten Metrik in V) die Bezeichnung $S_\Delta := S^{n-1} \cap |\Delta|$:

19.1 Satz Für die torische Varietät $X = X_\Delta$ gilt:

$$\begin{aligned} H_0^{\text{clid}}(X; G) &= E_{0,0}^2, & H_1^{\text{clid}}(X; G) &= \tilde{H}^{n-2}(S_\Delta; G), \\ H_{2n}^{\text{clid}}(X; G) &\cong \mathbb{Z}, & H_{2n-1}^{\text{clid}}(X; G) &= 0, \\ H_{2n-2}^{\text{clid}}(X; \mathbb{Z}) &\cong E_{n-1,n-1}^2(\mathbb{Z}), & H_{2n-3}^{\text{clid}}(X; \mathbb{Z}) &\cong E_{n-1,n-2}^2(\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Weiter existieren exakte Sequenzen

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow E_{1,1}^2(G) \rightarrow H_2^{\text{clid}}(X; G) \rightarrow \tilde{H}^{(n-1)-2}(S_\Delta; G) \rightarrow 0 \\ 0 &\rightarrow E_{2,1}^2(G) \rightarrow H_3^{\text{clid}}(X; G) \rightarrow \tilde{H}^{(n-1)-3}(S_\Delta; G) \rightarrow 0 \\ 0 &\rightarrow E_{n-2,n-2}^3(\mathbb{Z}) \rightarrow H_{2n-4}^{\text{clid}}(X; \mathbb{Z}) \rightarrow E_{n-1,n-3}^2(\mathbb{Z}) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Für weitere Aussagen dieses Typs sei auf [BaBrFiKp₃] verwiesen. Wir werden hier nicht die Spektralsequenz direkt interpretieren, sondern erst in 19.31 einen anderen Beweis einer verschärften Aussage bringen. — Aus 19.1 ergibt sich als erste Anwendung wegen $E_{u,0}^2(\Delta; G) \cong \tilde{H}^{n-1-u}(S_\Delta; G)$, da $\tilde{H}^i(S_\Delta; \mathbb{Z})$ für $i = 0, 1$ frei ist ([Jo, 2.4.9]):

19.2 Beispiel Für $n \leq 3$ ist $H_\bullet^{\text{clid}}(X_\Delta; \mathbb{Z})$ bereits durch $E^2(\Delta; \mathbb{Z})$ vollständig bestimmt.

Aufgabe 19.1 Für $n = 4$ bestimme man $H_j^{\text{clid}}(X_\Delta; \mathbb{Z})$ aus $E^2(\Delta; \mathbb{Z})$, wobei man für $j = 4$ voraussetze, daß $E_{3,1}^2(\Delta; \mathbb{Z})$ torsionsfrei ist (vgl. auch 19.26).

Für eine weitergehende explizite Anwendung der torischen Spektralsequenz ist nun eine algebraische Beschreibung grundlegend, die zunächst erläutert werden soll.

Erster Schritt

Wir beginnen mit einer allgemeinen Konstruktion eines Kettenkomplexes zu einem kovarianten Funktor auf dem Fächerraum Δ , die (in kohomologischer Form) auch für den Anhang grundlegend ist. Dazu seien R ein Hauptidealbereich und

$$F: \Delta \rightarrow \text{Kategorie der } R\text{-Moduln}$$

ein kovarianter Funktor. Für die Inklusion $\tau \prec \sigma$ bezeichnen wir den zugehörigen Homomorphismus mit

$$F(\tau \prec \sigma) : F(\sigma) \rightarrow F(\tau).$$

In unserem Text sind die beiden folgenden Beispiele maßgebend: Für $\tau \prec \sigma$ und mit der Bezeichnung $\mathbb{T}(\tau) = \mathbb{T}/\tau$ sei

$$\pi_{\tau,\sigma} : \mathbb{T}(\tau) \rightarrow \mathbb{T}(\sigma)$$

die Projektion. Es sei G ein fester R -Modul.

a) Homologie:

$$H_{\bullet}^{\Delta} : \sigma \mapsto H_{\bullet}(\mathbb{T}(\sigma); G), \quad F(\tau \prec \sigma) := H_{\bullet}(\pi_{\tau,\sigma}) : H_{\bullet}(\mathbb{T}(\tau); G) \rightarrow H_{\bullet}(\mathbb{T}(\sigma); G).$$

b) Äußere Algebra:

$$\Lambda_{\bullet}^{\Delta} : \sigma \mapsto (\Lambda^{\bullet} N/\sigma) \otimes_R G, \quad F(\tau \prec \sigma) := \Lambda^{\bullet}(\pi_{\tau,\sigma}) \otimes 1_G : \Lambda^{\bullet} N/\tau \otimes_R G \rightarrow \Lambda^{\bullet} N/\sigma \otimes_R G.$$

Aus der Konstruktion von 12.9 ergibt sich folgendes, für explizite Rechnungen nützliche Resultat:

19.3 Bemerkung Es gibt eine natürliche Äquivalenz von Funktoren zwischen den kovarianten Funktoren H_{\bullet}^{Δ} und $\Lambda_{\bullet}^{\Delta}$ auf Δ . ■

Für jedes Element der Menge $\{V_{\sigma}; \sigma \in \Delta\}$ mit

$$V_{\sigma} := \text{lin } \sigma$$

sei eine Orientierung fixiert. Wir setzen für $\tau \prec_1 \sigma$

- $\text{or}_{\tau}^{\sigma} := 1$, falls die Orientierung von V_{τ} , gefolgt von einem beliebigen Vektor aus σ° , die Orientierung von V_{σ} liefert;
- andernfalls sei $\text{or}_{\tau}^{\sigma} := -1$.

Zum kovarianten Funktor F auf Δ führen wir auf folgende Weise einen endlich erzeugten Kettenkomplex $(C_i(\Delta; F), \delta_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ein:

19.4 Definition Für $i \geq 0$ seien

$$C_i(\Delta; F) := \bigoplus_{\sigma \in \Delta^{n-i}} F(\sigma)$$

und

$$\delta_i := \sum_{\tau \prec_1 \sigma \in \Delta^{n-i}} \text{or}_{\tau}^{\sigma} F(\tau \prec \sigma) : C_i(\Delta; F) \rightarrow C_{i-1}(\Delta; F).$$

Damit ergibt sich nach [Jo, 2.4.1] für die torische Spektralsequenz folgende algebraische Beschreibung:

19.5 Satz Für jeden R -Modul G sind die Kettenkomplexe $E_{\bullet,\bullet}^1(\Delta)$, $C_{\bullet}(\Delta; H_{\bullet}^{\Delta})$ und $C_{\bullet}(\Delta; \Lambda_{\bullet}^{\Delta})$ isomorph, es gibt also ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} E_{u,v}^1(\Delta) & \cong & C_u(\Delta; H_v^{\Delta}) & \cong & C_u(\Delta; \Lambda_v^{\Delta}) \\ \downarrow d_{u,v}^1 & & \downarrow \delta_u(H_v^{\Delta}) & & \downarrow \delta_u(\Lambda_v^{\Delta}) \\ E_{u-1,v}^1(\Delta) & \cong & C_{u-1}(\Delta; H_v^{\Delta}) & \cong & C_{u-1}(\Delta; \Lambda_v^{\Delta}) \quad \blacksquare \end{array}$$

Zweiter Schritt

Der nächste Schritt ergibt sich damit rein algebraisch aus der Kenntnis des endlichen Kettenkomplexes $(C_{\bullet}(\Delta; \Lambda_{\bullet}^{\Delta}), \delta)$ mit ganzzahligen Koeffizienten:

19.6 Satz Die $E^2(\Delta; G)$ -Terme sind über die Isomorphismen

$$E_{u,v}^2(\Delta) \cong H_u(\Delta; H_v^{\Delta}) \cong H_u(\Delta; \Lambda_v^{\Delta})$$

explizit berechenbar.

Beweis Von Sophie Térouanne wurde 1998 bei einem Praktikum unter Leitung von G. Barthel an der Universität Konstanz ein Maple-Programm zur Bestimmung von $E_{p,q}^2(\mathbb{Z})$ implementiert. Unter Verwendung von Ideen von Matthias Franz hat dies Marion Dieudonné während ihres Praktikums 1999 sicherer und wesentlich schneller gemacht. Damit folgt die Behauptung aus 19.7. ■

Für die Bestimmung von $E_{u,v}^2(G)$ genügt die Berechnung von $E_{u,v}^2(R)$:

19.7 Universelles Koeffiziententheorem Für jedes (u, v) existiert eine spaltende exakte Sequenz

$$0 \rightarrow E_{u,v}^2(R) \otimes_R G \rightarrow E_{u,v}^2(G) \rightarrow \mathrm{Tor}_1^R(E_{u-1,v}^2(R), G) \rightarrow 0.$$

Beweis Nach Definition gilt $E_{u,v}^1(G) \cong E_{u,v}^1 \otimes_R (G)$. Andererseits ist $E_{u,v}^1(R)$ nach 19.5 ein freier R -Modul. Für festes v ist $E_{u,v}^2(G)$ durch die Homologie des Komplexes $E_{*,v}^1(G)$ gegeben. Damit folgt die gesuchte spaltende exakte Sequenz etwa aus [Sp, Th. 5.2.8]. ■

Gerade für niedrige Dimensionen ist folgendes Resultat hilfreich:

19.8 Bemerkung Es ist

- 1) $E_{n,v}^2(\Delta; \mathbb{Z}) = 0$ für $v \leq n - 1$;
- 2) $E_{n,0}^2(\Delta; G) = 0$ für $n \neq 0$.

Aufgabe 19.2 Man zeige:

$$i) E_{n,v}^2(\Delta; R) = \begin{cases} 0 & \text{für } v \leq n-1; \\ R & \text{für } v = n. \end{cases}$$

$$ii) E_{n,0}^2(\Delta; G) = 0 \text{ für } n \neq 0.$$

Man kann übrigens für entartetes Δ nicht erwarten, daß $E_{n,v}^2(G)$ für $i = 1, \dots, n-1$ verschwindet (und hier geht unsere Generalvoraussetzung, daß X nicht entartet sei, entsprechend ein), wie die folgende Aufgabe demonstriert:

Aufgabe 19.3 Es seien $a, b \in \mathbb{N}_{>0}$. Für den vollständigen zweidimensionalen Fächer Δ , der von den Vektoren $(-1, 0)$ und $(1, ia)$ mit $i = -1, \dots, b$ erzeugt wird, zeige man:

$$H_i(X_\Delta; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i = 0, 4 \\ \mathbb{Z}^b \oplus \mathbb{Z}_a & i = 2 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 19.4 Man zeige für einen von $\{o\}$ verschiedenen Fächer Δ :

$$E_{n-1,v}^2(\Delta^{\leq 1}; \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \bigoplus_{\rho \in \Delta^1} \Lambda_v(N/\rho) / \text{Im} \left[\sum_{\rho \in \Delta^1} \pi_{o,\rho}: \Lambda_v(N) \rightarrow \bigoplus_{\rho \in \Delta^1} \Lambda_v(N/\rho) \right] & v \neq 0 \\ \mathbb{Z}^{k(\Delta)-1} & v = 0. \end{cases}$$

Dritter Schritt

Nunmehr ist entscheidend, daß die Spektralsequenz $E^\bullet(\Delta; G)$ weitgehend an der Stelle E^2 „degeneriert“, also $E^{j+1}(\Delta; G) = E^j(\Delta; G)$ für $j \geq 2$ gilt. Dafür ist nach der allgemeinen Konstruktion von Spektralsequenzen $d_{\bullet,\bullet}^j(\Delta; G) = 0$ zu zeigen. Es seien dazu für festes $j \geq 2$ und $u, v \in \mathbb{N}$:

$$a_{u,v}^j := \begin{cases} a(j, v) & \text{falls } v + 2j - 1 \leq u \leq n, \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit den positiven Zahlen

$$a(j, v) := \text{ggT}\{\ell^v(\ell^{j-1} - 1); \ell \in \mathbb{N}_{>0}\}.$$

Dann gilt ([Jo, 2.4.5]):

19.9 Satz Für alle $j \geq 2$ und $u, v \in \mathbb{N}$ ist $a_{u,v}^j d_{u,v}^j(\Delta; G) = 0$. ■

Eine erste Konsequenz ist, daß sich alle Bettizahlen $b_j^{\text{cl}}(X_\Delta; \mathbb{Z})$ aus $E^2(\Delta; \mathbb{Q})$ ablesen lassen (vgl. 19.23), denn es gilt:

19.10 Korollar Für $G = \mathbb{Q}$ (oder allgemeiner einen divisiblen R -Modul G) gilt

$$E_{\bullet,\bullet}^2(\Delta; G) = E_{\bullet,\bullet}^\infty(\Delta; G).$$

Beweis: Keines der $a_{u,v}^j$ verschwindet. Weil G divisibel ist, folgt $d_{u,v}^j(\Delta; G) = 0$ für $j \geq 2$ aus 19.9. Aus $E^{j+1} = H(E^j)$ folgt damit die Behauptung. ■

Alle Anstrengungen sind daher darauf gerichtet, für eine feste Primzahl p die p -Torsion von $H_{\bullet}^{\text{cld}}(X_{\Delta}; \mathbb{Z})$ zu berechnen. Einerseits überträgt sich Korollar 19.10 auf alle p -Gruppen mit $p \geq n/2$, vgl. 19.21. Für die restlichen p erhält man zusätzliche Aussagen aus der folgenden expliziten Beschreibung in [Jo, 2.4.7]:

19.11 Lemma *Für $j \geq 2$ und $v \geq 0$ hat $a(j, v) := \text{ggT}\{\ell^v(\ell^{j-1} - 1); \ell \in \mathbb{N}_{>0}\}$ folgende Primzahlzerlegung:*

- 1) Für $v = 0$ ist $a(j, 0) = 1$.
- 2) Für $v \geq 1$ wird $a(j, v)$ von 2 geteilt.
 - a) Ist j gerade, so ist $a(j, v) = 2$.
 - b) Ist j ungerade und $b \geq 2$, so wird $a(j, v)$ genau dann von 2^b geteilt, wenn $v \geq b$ ist und $j - 1$ von 2^{b-2} geteilt wird.
 - c) $a(j, v)$ wird nur von Primzahlen $\leq j$ geteilt. Genauer: Ist p eine ungerade Primzahl und $b \geq 1$, so wird $a(j, v)$ genau dann von p^b geteilt, wenn $v \geq b$ gilt und $j - 1$ von $p^{b-1}(p - 1)$ geteilt wird. ■

Für $n \leq 3$ gilt 19.10 damit für beliebiges G ; bei $n = 4, 5$ tritt $a(2, 1) = 2$ als Sonderfall auf, für $n = 6, \dots, 9$ kommt die Ausnahmeprimzahl $p = 3$ hinzu etc.; anhand von 19.11 lassen sich dann unter Zusatzvoraussetzungen weitere Torsionsgruppen berechnen.

In einem ersten Ansatz beschäftigen wir uns mit dem systematischen Aufbau von Δ aus den niederdimensionalen Gerüsten, um etwas mehr über das Verschwinden des Differential $d_{u,v}^2(\Delta; G)$ zu erfahren. Nach Lemma 19.11 haben wir unser Augenmerk dabei nur auf die 2-Torsion zu richten.

Für einen Unterfächer Γ eines Fächers Δ existiert eine kanonische Projektion von Komplexen (dabei bezeichne Λ_{\bullet} jeweils den einschlägigen Funktor) mit

$$C_i(\Delta; \Lambda_{\bullet}) = \bigoplus_{\sigma \in \Delta^{n-i}} \Lambda_{\bullet}(\sigma) \quad \twoheadrightarrow \quad C_i(\Gamma; \Lambda_{\bullet}) = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma^{n-i}} \Lambda_{\bullet}(\gamma),$$

wobei $\Lambda_{\bullet}(\sigma)$ auf Null abgebildet wird, wenn σ nicht in Γ liegt. Durch den Kern dieser Projektion wird ein Kettenkomplex

$$C_i(\Delta \setminus \Gamma; \Lambda_{\bullet}) := \bigoplus_{\sigma \in (\Delta \setminus \Gamma)^{n-i}} \Lambda_{\bullet}(\sigma)$$

mit

$$\delta_i := \sum_{\tau \prec_1 \sigma \in (\Delta \setminus \Gamma)^{n-i}} \text{or}_{\tau}^{\sigma} \Lambda_{\bullet}(\tau \prec \sigma) : C_i(\Delta \setminus \Gamma; \Lambda_{\bullet}) \rightarrow C_{i-1}(\Delta \setminus \Gamma; \Lambda_{\bullet})$$

bestimmt. Zu dieser Konstruktion gehört eine exakte Sequenz von Kettenkomplexen

$$0 \rightarrow C_{\bullet}(\Delta \setminus \Gamma; \Lambda_{\bullet}) \rightarrow C_{\bullet}(\Delta; \Lambda_{\bullet}) \rightarrow C_{\bullet}(\Gamma; \Lambda_{\bullet}) \rightarrow 0,$$

welche eine exakte Homologiesequenz

$$\dots \rightarrow H_u(\Delta \setminus \Gamma; \Lambda_\bullet) \rightarrow H_u(\Delta; \Lambda_\bullet) \rightarrow H_u(\Gamma; \Lambda_\bullet) \rightarrow H_{u-1}(\Delta \setminus \Gamma; \Lambda_\bullet) \rightarrow \dots$$

induziert. Wir erinnern an $\Lambda_\bullet = \bigoplus_{v=1}^n \Lambda_v$ mit

$$\Lambda_v(\sigma) = \Lambda^v(N/\sigma) = H_v((S^1)^{\text{codim } \sigma})$$

für $N/\sigma = N/N \cap \text{lin } \sigma$. Nach 19.6 ist $E_{u,v}^2(\Delta) \cong H_u(\Delta; \Lambda_v)$. Führen wir an dieser Stelle als Bezeichnung (die Spektralsequenzeigenschaft bleibt zu rechtfertigen; wir interessieren uns in den Anwendungen ausschließlich für den Fall $\Delta \setminus \Gamma \subset \Delta^\ell$ für ein ℓ , in dem die Filtrierung trivial und damit nichts zu zeigen ist)

$$E_{u,v}^2(\Delta \setminus \Gamma) := H_u(\Delta \setminus \Gamma; \Lambda_v)$$

ein, so erhalten wir für jedes v eine exakte Sequenz

$$(19.12.1) \quad \dots \rightarrow E_{u,v}^2(\Delta \setminus \Gamma) \rightarrow E_{u,v}^2(\Delta) \rightarrow E_{u,v}^2(\Gamma) \rightarrow E_{u-1,v}^2(\Delta \setminus \Gamma) \rightarrow \dots$$

Diese Überlegungen sind ersichtlich auch für allgemeine Koeffizienten G zutreffend.

Betrachten wir nun den Spezialfall $\Gamma := \Delta^{\leq \ell}$, so ist $\Delta \setminus \Gamma = \Delta^{\geq \ell+1}$. Wir erhalten

19.12 Lemma Für einen Fächer Δ und beliebiges G existieren Isomorphismen

$$(19.12.2) \quad E_{u,v}^2(\Delta) \cong E_{u,v}^2(\Delta^{\leq \ell}) \quad \text{für } u \geq n - \ell + 1$$

$$(19.12.3) \quad E_{u,v}^2(\Delta^{\geq \ell+1}) \cong E_{u,v}^2(\Delta) \quad \text{für } u \leq n - \ell - 2$$

und eine exakte Sequenz

$$(19.12.4) \quad 0 \rightarrow E_{n-\ell,v}^2(\Delta) \rightarrow E_{n-\ell,v}^2(\Delta^{\leq \ell}) \rightarrow E_{n-\ell-1,v}^2(\Delta^{\geq \ell+1}) \rightarrow E_{n-\ell-1,v}^2(\Delta) \rightarrow 0.$$

Beweis Aus $(\Delta^{\geq \ell+1})^{n-u} = \emptyset$ für $u \geq n - \ell$ folgt $C_u(\Delta^{\geq \ell+1}; \Lambda_\bullet) = 0$ und damit

$$(19.12.5) \quad E_{u,v}^2(\Delta^{\geq \ell+1}) = 0 \quad \text{für } u \geq n - \ell.$$

Analog ergibt sich $C_u(\Delta^{\leq \ell}; \Lambda_\bullet) = 0$ aus $(\Delta^{\leq \ell})^{n-u} = \emptyset$ für $u \leq n - \ell - 1$ und damit

$$(19.12.6) \quad E_{u,v}^2(\Delta^{\leq \ell}) = 0 \quad \text{für } u \leq n - \ell - 1.$$

Damit genügt es, die exakte Sequenz (19.12.1) anzuwenden. ■

Beim Aufbau eines Fächers Δ über seine Gerüste $\Delta^{\leq \ell}$ geht keine Torsion verloren:

19.13 Bemerkung Es ist

$$\text{Tors } E_{u,v}^2(\Delta^{\leq \ell+1}; R) = \text{Tors } E_{u,v}^2(\Delta^{\leq \ell}; R)$$

außer möglicherweise für $u = n - \ell - 1$, wo aber $E_{n-\ell-1,v}^2(\Delta^{\leq \ell}; R)$ verschwindet. Mit anderen Worten: Ist $E^2(\Delta; R)$ frei, so auch jedes $E^2(\Delta^{\leq \ell}; R)$.

Beweis Wir wenden die exakte Sequenz (19.12.1) auf $\Delta^{\leq \ell} \prec \Delta^{\leq \ell+1}$ an. Sie liest sich als

$$\dots \rightarrow E_{u,v}^2(\Delta^{\ell+1}) \rightarrow E_{u,v}^2(\Delta^{\leq \ell+1}) \rightarrow E_{u,v}^2(\Delta^{\leq \ell}) \rightarrow E_{u-1,v}^2(\Delta^{\ell+1}) \rightarrow \dots$$

Aus Beispiel 19.14 folgt damit zunächst die Behauptung für $u \neq n - \ell - 1, n - \ell$, und mit (19.12.6) ergibt sich eine exakte Restsequenz mit Koeffizienten in R

$$0 \rightarrow E_{n-\ell,v}^2(\Delta^{\ell+1}) \rightarrow E_{n-\ell,v}^2(\Delta^{\leq \ell}) \rightarrow E_{n-\ell-1,v}^2(\Delta^{\ell+1}) \rightarrow E_{n-\ell-1,v}^2(\Delta^{\ell+1}) \rightarrow 0,$$

in der $E_{n-\ell-1,v}^2(\Delta^{\ell+1}; R)$ nach 19.14 frei ist, woraus die Behauptung für $u = n - \ell$ folgt. ■

Für einen regulären Fächer Δ braucht allerdings $E_{u,v}^2(\Delta; \mathbb{Z})$ nicht notwendig frei zu sein, wie man etwa an $E_{n-1,n-1}^2(\Delta^{\leq 1}; \mathbb{Z}) \cong H_{2n-2}^{\text{cl d}}(X_\Delta; \mathbb{Z})$ abliest.

19.14 Beispiel Für Δ gilt

$$E_{u,v}^2(\Delta^\ell; G) \cong \begin{cases} \bigoplus_{\sigma \in \Delta^\ell} H_v((S^1)^{n-\ell}; G), & u = n - \ell \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis Nach Konstruktion gilt für Koeffizienten G

$$C_u(\Delta^\ell; \Lambda_v) \cong \begin{cases} \bigoplus_{\sigma \in \Delta^\ell} \Lambda_v(\sigma) & u = n - \ell \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Insbesondere ist das Differential auf $C_\bullet(\Delta^\ell; \Lambda_\bullet)$ die Nullabbildung, woraus die Behauptung folgt. ■

Aufgabe 19.5 Man zeige für den Nullfächer o :

$$E_{u,v}^2(o; G) = \begin{cases} H_v((S^1)^n; G), & u = n \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit können wir den Übergang zu $E^3(\Delta) = H(E^2(\Delta))$ vorbereiten:

19.15 Korollar Für einen Fächer Δ gelten mit beliebigen Koeffizienten G :

- 1) Ist $u \leq n - \ell - 2$, so ist $d_{u,v}^2(\Delta) = d_{u,v}^2(\Delta^{\geq \ell+1})$.
- 2) $d_{n-\ell-1,v}^2(\Delta) = 0 \iff d_{n-\ell-1,v}^2(\Delta^{\geq \ell+1}) = 0$.
- 3) Für $u \geq n - \ell + 2$ gilt $d_{u,v}^2(\Delta) = d_{u,v}^2(\Delta^{\leq \ell})$.

Beweis Für $u \leq n - \ell - 1$ ergibt sich aus (19.12.1) und (19.12.6) ein exaktes kommutatives Diagramm mit Koeffizienten in G

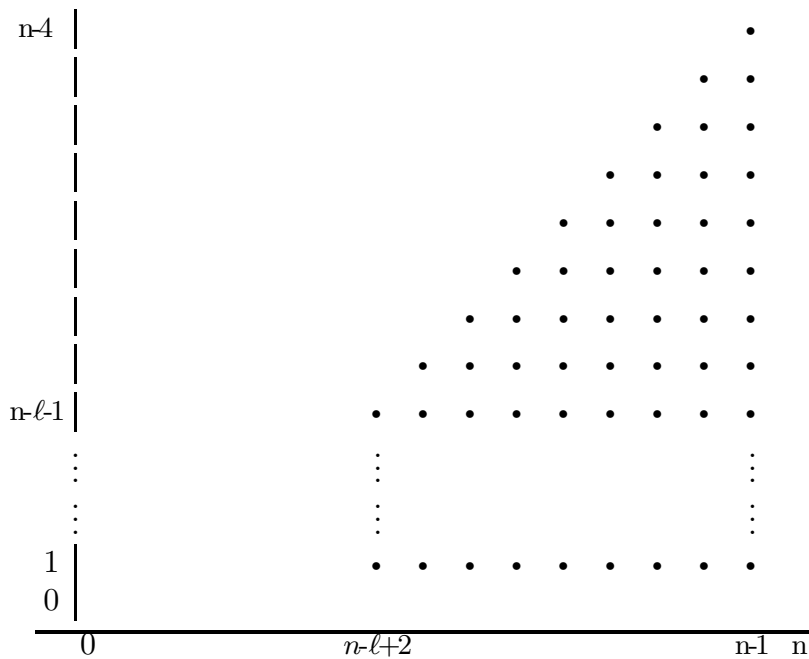
$$\begin{array}{ccccc}
 E_{u,v}^2(\Delta^{\geq \ell+1}) & \xrightarrow{\varphi} & E_{u,v}^2(\Delta) & \rightarrow & 0 \\
 \downarrow d_{u,v}^2(\Delta^{\geq \ell+1}) & & \downarrow d_{u,v}^2(\Delta) & & \\
 E_{u-2,v+1}^2(\Delta^{\geq \ell+1}) & \cong & E_{u-2,v+1}^2(\Delta) & & ,
 \end{array}$$

wobei φ für $u \leq n - \ell - 2$ sogar ein Isomorphismus ist. Daraus folgen 1) und 2).

Zu 3) betrachtet man analog für $u \geq n - \ell + 2$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 E_{u,v}^2(\Delta) & \cong & E_{u,v}^2(\Delta^{\leq \ell}) & & \\
 \downarrow d_{u,v}^2(\Delta) & & \downarrow d_{u,v}^2(\Delta^{\leq \ell}) & & \\
 0 \rightarrow E_{u-2,v+1}^2(\Delta) & \rightarrow & E_{u-2,v+1}^2(\Delta^{\leq \ell}) & , &
 \end{array}$$

wobei (19.12.2) und (19.12.4) verwendet wurden. Damit ergibt sich die Behauptung unmittelbar. ■



FIGUR 19.1 Möglicherweise nicht verschwindende $d_{u,v}^2(\Delta^{\leq \ell}; \mathbb{Z})$

19.16 Korollar *Es gilt*

$$(19.16.1) \quad d_{u,v}^2(\Delta^{\leq \ell}; G) = 0 \quad \text{für} \quad u \leq n - \ell + 1 .$$

Beweis Nach (19.12.6) verschwindet $E_{u,v}^2(\Delta^{\leq \ell}; G)$ für $u \leq n - \ell - 1$, also auch $d_{u,v}^2(\Delta^{\leq \ell}; G)$ für $u \leq n - \ell + 1$. ■

19.17 Beispiel Für einen Fächer Δ gilt:

$\ell = 2$ Für G ohne 2-Torsion oder $u \neq n$ ist $d_{u,v}^2(\Delta^{\leq 2}; G) = 0$, und damit folgt $E_{u,v}^2(\Delta^{\leq 2}; G) = E_{u,v}^\infty(\Delta^{\leq 2}; G)$.

$\ell = 3$ Ist $u \leq n - 2$ oder $u \neq n - 1$ und G ohne 2-Torsion, so ist $d_{u,v}^2(\Delta^{\leq 3}; G) = 0$.

Die Bedingungen sind allerdings nicht notwendig, wie ein von M. Franz in Maple berechnetes Beispiel zeigt, in dem $d_{n-1,v}^2(\Delta; G) = d_{n-1,v}^2(\Delta^{\leq 3}; G)$ ist:

19.18 Beispiel Es sei σ der im \mathbb{R}^5 von den Vektoren

$$(1, 0, 0, 0, 0), (1, 2, 0, 0, 0), (1, 0, 2, 0, 0), (1, 0, 0, 2, 0), (1, 0, 2, 2, 4)$$

erzeugte simpliziale Kegel. Dann hat $E_{\bullet,\bullet}^2(\sigma; \mathbb{Z})$ die Gestalt

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbb{Z} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbb{Z}_2^3 \oplus \mathbb{Z}_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbb{Z}_2 & \mathbb{Z}_2^6 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{Z}_2 & 0 & \mathbb{Z}_2^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbb{Z}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Dennoch gilt $d_{\bullet,\bullet}^2(\sigma; \mathbb{Z}) = 0$, und damit berechnet sich $H_{\bullet}^{\text{clid}}(X; \mathbb{Z})$ wie in Figur 19.2.

Führen wir nun zur Vorbereitung der Untersuchung von E^j für allgemeines j der Einfachheit halber folgende Sprechweise ein: Für eine natürliche Zahl a heiße eine Primzahl p eine *a-relevante Primzahl*, wenn gilt:

- a ist gerade und $p = 2$;
- a ist ungerade und $p - 1$ Teiler von $a - 1$.

Des weiteren interessieren uns Bedingungen des Typs, daß für abelsche Gruppen E und H mit endlich erzeugtem E die abelsche Gruppe $\text{Tor}^{\mathbb{Z}}(E, H)$ für eine feste Primzahl p keine p -Torsion habe. Dies ist insbesondere dann erfüllt, wenn eine der beiden Gruppen ohne p -Torsion ist.

19.19 Lemma Für $j \geq 2$ hat die torische Spektralsequenz das Konvergenzverhalten $E_{u,v}^j(G) = E_{u,v}^{\infty}(G)$, falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- 1) $j > n/2$.
- 2) $n = 2j$ und $(2j, 1) \neq (u, v) \neq (j, j)$.

Beweis Aus der Spektralsequenz ist jeweils

$$(19.19.1) \quad E_{u+j,v-j+1}^j(G) \xrightarrow{d_{u+j,v-j+1}^j(G)} E_{u,v}^j(G) \xrightarrow{d_{u,v}^j(G)} E_{u-j,v+j-1}^j(G)$$

zu untersuchen; gemäß 19.9 ist dabei die Einschränkung $2j + v - 1 \leq u \leq n$ zulässig. Wegen $E_{\bullet,0}^2(G) = E_{\bullet,0}^{\infty}(G)$ sei weiter $v \geq 1$. Für $j > n/2$ tritt damit kein kritisches Paar (u, v) für $d_{u,v}^j(G)$ auf; für $n = 2j$ ist nur $d_{n,1}^j(G)$ kritisch. ■

Aufgabe 19.6 Für $j \geq 2$ zeige man $E_{u,v}^j(G) = E_{u,v}^\infty(G)$, falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- i) Für $j = n/2$: (u, v) ist eines der Paare $(2j, 1)$, (j, j) , und $\text{Tor}^{\mathbb{Z}}(E_{2j-1,1}^2(\mathbb{Z}), G)$ hat für keine j -relevante Primzahl p Torsion.
- ii) Für $n = 2j + 1$:
 - a) (u, v) ist keines der Paare $(2j + 1, 1)$, $(j + 1, j)$, $(2j + 1, 2)$, $(j + 1, j + 1)$, $(2j, 1)$, (j, j) ;
 - b) (u, v) ist eines der Paare $(2j, 1)$, (j, j) , und für jede j -relevante Primzahl p gilt $E_{2j,1}^j(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p = 0$ oder $E_{j,j}^j(G)$ ist ohne p -Torsion;
 - c) (u, v) ist eines der Paare $(2j + 1, 1)$, $(j + 1, j)$, und $\text{Tor}^{\mathbb{Z}}(E_{2j,1}^2(\mathbb{Z}), G)$ hat keine p -Torsion für eine j -relevante Primzahl p ;
 - d) (u, v) ist eines der Paare $(2j + 1, 2)$, $(j + 1, j + 1)$, und $\text{Tor}^{\mathbb{Z}}(E_{2j,2}^2(\mathbb{Z}), G)$ hat keine p -Torsion für eine j -relevante Primzahl p .

19.20 Lemma Für alle (u, v) gilt

$$(19.20.1) \quad E_{u,v}^2(\mathbb{Z}_{p^m}) = E_{u,v}^j(\mathbb{Z}_{p^m}) \quad \text{für } j = 2, \dots, p.$$

Allgemeiner ist $d^j(\mathbb{Z}_{p^m}) = 0$, falls $p - 1$ kein Teiler von $j - 1$ ist.

Beweis Die bei der Konstruktion von $E_{u,v}^{j+1}(\mathbb{Z}_{p^m})$ auftretenden Differentiale $d^j(\mathbb{Z}_{p^m})$ erfüllen die Verschwindungsbedingung $a(j, v)d^j(\mathbb{Z}_{p^m}) = 0$. Für $j < p$ ist $a(j, v)$ zu p^m teilerfremd, also existieren $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ mit $\alpha a(j, v) + \beta p^m = 1$. Modulo p^m gerechnet folgt, daß $a(j, v)$ in \mathbb{Z}_{p^m} eine Einheit ist, also verschwindet $d^j(\mathbb{Z}_{p^m})$. — Allgemeiner folgt aus 19.11, daß $d^j(\mathbb{Z}_{p^m})$ einerseits eine Ordnung hat, die durch p teilbar ist; andererseits kann $d^j(\mathbb{Z}_{p^m})$ damit nach Teil 2c) von 19.11 nur dann nicht selbst der Nullhomomorphismus sein, wenn $p - 1$ Teiler von $j - 1$ ist. ■

19.21 Korollar Es seien $m \in \mathbb{N}$ und p eine Primzahl. Dann gilt

$$E_{u,v}^\infty(\mathbb{Z}_{p^m}) \cong E_{u,v}^2 \otimes \mathbb{Z}_{p^m} \oplus E_{u-1,v}^2 * \mathbb{Z}_{p^m},$$

falls

- 1) $p > n/2$, oder
- 2) $p = n/2$ und $(2p, 1) \neq (u, v) \neq (p, p)$.

Beweis Ist $p > n/2$, so folgt 1) aus 19.19 1) und 19.7. Es sei nun $p = n/2$. Dann ist höchstens $d_{n,1}^p(\mathbb{Z}_{p^m})$ nicht trivial, und wir erhalten aus (19.20.1) eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow E_{2p,1}^\infty(\mathbb{Z}_{p^m}) \rightarrow E_{2p,1}^p(\mathbb{Z}_{p^m}) \xrightarrow{d_{2p,1}^p(\mathbb{Z}_{p^m})} E_{p,p}^p(\mathbb{Z}_{p^m}) \rightarrow E_{p,p}^\infty(\mathbb{Z}_{p^m}) \rightarrow 0. \blacksquare$$

Aufgabe 19.7 Ist $p = n/2$ eine Primzahl, so zeige man

$$E_{u,v}^\infty(\mathbb{Z}_{p^m}) \cong E_{u,v}^2 \otimes \mathbb{Z}_{p^m} \oplus E_{u-1,v}^2 * \mathbb{Z}_{p^m},$$

falls $E_{n-1,1}^2(\mathbb{Z}) * \mathbb{Z}_p = 0$ oder $E_{n/2,n/2}^2(\mathbb{Z}) * \mathbb{Z}_p = 0$.

Vierter Schritt

Die Berechnung der Bettizahlen $b_j(X_\Delta)$ aus denen von $E^\infty(\Delta)$ ist einfach; wir gehen im ersten Teil darauf ein. Im zweiten präsentieren wir einen Satz von Matthias Franz (vgl. [Fr]), der den delikaten Zusammenhang zwischen $E^2(\Delta; \mathbb{Z})$ und $H_\bullet(\Delta; \mathbb{Z})$ mit dem zwischen den $E^2(\Delta; \mathbb{Z}_m)$ und $H_\bullet(\Delta; \mathbb{Z}_m)$ vergleicht; da es häufig einfacher ist, die verschiedenen Primzahlen p separat zu behandeln, führen wir die Überlegung allgemeiner für die Lokalisierungen

$$R := \mathbb{Z}_{(p)} \text{ mit } \mathbb{Z}_{(1)} = \mathbb{Z}$$

durch. Im dritten Abschnitt gehen wir schließlich auf eine rekursive Berechnung der p -Torsion von $H_\bullet(X_\Delta)$ mit Hilfe aller $E^\infty(\Delta; \mathbb{Z}_{p^m})$ für $m \geq 1$ ein.

Wir wollen zunächst die Bettizahlen $b_j^{\text{cld}}(X_\Delta; \mathbb{Z}_p)$ in allen Charakteristiken $p \geq 0$ für die Restklassenkörper \mathbb{Z}_p ²⁹⁾ aus den Bettizahlen

$$e_{u,v}^\infty(p) := \dim_{\mathbb{Z}_p} E_{u,v}^\infty(\mathbb{Z}_p)$$

berechnen:

19.22 Satz *Es gilt*

$$b_\ell^{\text{cld}}(X_\Delta; \mathbb{Z}_p) = \sum_{u=\lceil \ell/2 \rceil}^{\ell} e_{u,\ell-u}^\infty(p).$$

Beweis Ersichtlich sind die Zahlen $e_{u,\ell-u}^\infty(p)$ höchstens für $\ell/2 \leq u \leq \ell$ positiv. Wir benutzen die kanonische Filtrierung auf $H_\ell := H_k^{\text{cld}}(X_\Delta; \mathbb{Z}_{p^m})$

$$0 = F_{-1}H_\ell \subset F_0H_\ell \subset \dots \subset F_nH_\ell = H_\ell.$$

Dazu gehört nach Konstruktion der Spektralsequenz für alle natürlichen Zahlen u eine exakt Sequenz

$$(19.22.1) \quad 0 \rightarrow F_{u-1}H_\ell \rightarrow F_uH_\ell \rightarrow E_{u,\ell-u}^\infty(\mathbb{Z}_{p^m}) \rightarrow 0,$$

also gilt für die Anzahlen $\#F_uH_\ell = \#F_{-1}H_\ell \cdot \#E_{u,\ell-u}^\infty(\mathbb{Z}_{p^m})$, falls $p \neq 0$. Daraus folgt induktiv

$$(19.22.2) \quad \#H_\ell^{\text{cld}}(X_\Delta; \mathbb{Z}_{p^m}) = \prod_{u=\lceil \ell/2 \rceil}^{\ell} \#E_{u,\ell-u}^\infty(\mathbb{Z}_{p^m}).$$

Durch Übergang zu \log_p für $m = 1$ oder durch direktes Zählen der Dimensionen folgt daraus die Behauptung; letzteres Verfahren ist auch für $p = 0$ zulässig. ■

²⁹⁾ Dabei sei $\mathbb{Z}_0 := \mathbb{Q}$.

Etwas hübscher läßt sich das im divisiblen Fall folgendermaßen formulieren:

19.23 Korollar Für $G = \mathbb{Q}$ (oder allgemeiner eine divisible abelsche Gruppe) gilt

$$H_\ell^{\text{eld}}(X_\Delta; G) \cong \bigoplus_{u+v=\ell} H_u(\Delta; \Lambda_v^\Delta(G)) . \blacksquare$$

Wir kommen nun zum Vergleich der Spektralsequenzen bei unterschiedlichen Koeffizienten. Diese Überlegungen sind eher formaler Natur. Es seien dazu p wieder eine Primzahl oder die Zahl 1 und $R = \mathbb{Z}_{(p)}$; insbesondere ist $\mathbb{Z}_{(1)} = \mathbb{Z}$. Weiter sei C ein positiv graduerter Kettenkomplex mit Differential d und einer zusätzlichen Filtrierung

$$0 = F_{-1}C_j \subset F_0C_j \subset \dots \subset F_iC_j \subset \dots$$

auf jedem C_j , die mit d verträglich ist. Dazu gehört eine Spektralsequenz $E = (E^j)_{j \geq 0}$ mit $E_{u,v}^0 = F_uC_{u+v}/F_{u-1}C_{u+v}$, deren sukzessive Homologiemoduln bigraduiert sind:

$$H_i(E_{\bullet, \bullet}^{j-1}) = \bigoplus_{u+v=i} E_{u,v}^j =: E_i^j(C) =: E_i^j .$$

Wir interessieren uns für einen Vergleich zwischen dem zugehörigen graduierten R -Modul $E^2(C)$ und der Homologie $H(C) =: H(R)$. Wir nennen einen graduierten R -Modul $L = \bigoplus L_i$ *gradweise endlich erzeugt*, wenn jedes L_i endlich erzeugt ist. Im folgenden sei C stets ein Kettenkomplex *freier* R -Moduln.

Für jede positive Nichteinheit r in R erhält man einen neuen filtrierten Kettenkomplex

$$C(r) := C \otimes_R \mathbb{Z}_r \quad \text{mit} \quad F_iC_j(r) := (F_iC_j) \otimes_R \mathbb{Z}_r ,$$

wobei die Restklassenringe R_r und \mathbb{Z}_r identifiziert werden; es ist daher unerheblich, ob das Tensorprodukt als \otimes_R oder als $\otimes_{\mathbb{Z}}$ gelesen wird. Insbesondere darf man $C(r)$ einfach als Komplex abelscher Gruppen behandeln. Wir verwenden folgendes Standardergebnis für den Hauptidealbereich R (vgl. 2.18):

19.24 Fundamentalsatz für endlich erzeugte R -Moduln Jeder endlich erzeugte R -Modul ist bis auf Isomorphie von der Form $R^n \oplus \bigoplus_i R_{r_i}$ mit eindeutig bestimmtem n und Primelementpotenzen r_i . ■

Die zu $C(r)$ gehörige Spektralsequenz werde auch mit $E(r)$ bezeichnet, die Homologie von $C(r)$ mit $H(r)$ und $E_i^j(C(r))$ mit $E_i^j(r)$. Die Spektralsequenz erfüllt ersichtlich

$$E_{u,v}^0(r) = F_uC_{u+v}(r)/F_{u-1}C_{u+v}(r) = E_{u,v}^0 \otimes_R \mathbb{Z}_r .$$

Ist E^0 ein freier R -Modul, so gilt auch $E_{u,v}^1(r) = E_{u,v}^1 \otimes \mathbb{Z}_r$, in Analogie zu 19.7.

Für die Lokalisierungen $R = \mathbb{Z}_{(p)}$ von \mathbb{Z} erhalten wir analog Komplexe

$$C(\mathbb{Z}_{(p)}) := C \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(p)}$$

und die zugehörigen Spektralsequenzen.

Nach M. Franz gilt nun:

19.25 Satz Sind die R -Moduln E^0 und E^1 frei und ist E^2 gradweise endlich erzeugt, so sind folgende Bedingungen äquivalent:

- 1) Die graduierten R -Moduln E^2 und $H(C)$ sind isomorph (und $E_{\bullet}^2 = E_{\bullet}^{\infty}$).
- 2) Für alle Nichteinheiten $r \in R$ sind die graduierten Moduln $E^2(r)$ und $H(r)$ isomorph.
- 2') Für alle Nichteinheiten $r \in R$ gilt $E_{\bullet}^2(r) = E_{\bullet}^{\infty}(r)$.
- 3) Für alle Primzahlpotenzen p^m in R sind die graduierten Moduln $E^2(p^m)$ und $H(p^m)$ isomorph.
- 3') Für alle Primzahlpotenzen p^m in R gilt $E_{\bullet}^2(p^m) = E_{\bullet}^{\infty}(p^m)$.

19.26 Beispiele 1) Es tritt höchstens folgende nichttriviale Homologie mit Koeffizienten in G auf:

$$H_i^{\text{cld}}(X_{\Delta^{\leq 1}}; G) \cong \begin{cases} G, & i = 2n, \\ E_{n-1, n-1}^2(\Delta^{\leq 1}) * G & i = 2n - 1 \\ E_{n-1, i-n+1}^2(\Delta^{\leq 1}; \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} G \oplus E_{n-1, i-n}^2(\Delta^{\leq 1}; \mathbb{Z}) * G & n \leq i \leq 2n-2 \\ G^{k(\Delta)-1}, & i = n - 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

2) Es sei X eine n -dimensionale torische Varietät mit $\Delta = \Delta^{\leq 2}$ oder $n \leq 5$; ferner sei p eine ungerade Primzahl. Dann gilt für alle i

$$(19.26.1) \quad H_i^{\text{cld}}(X; \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(p)} \cong \bigoplus_u H_u(\Delta; \Lambda_{i-u}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(p)} .$$

Diese Darstellung trifft in folgenden Fällen auch für Koeffizienten \mathbb{Z} zu:

$n = 4$ $E_{3,1}^2(\mathbb{Z})$ oder $E_{2,2}^2(\mathbb{Z})$ hat keine 2-Torsion;

$n = 5$ $E_{4,1}^2(\mathbb{Z})$, $E_{4,2}^2(\mathbb{Z})$ sind ohne 2-Torsion, und $E_{2,2}^2(\mathbb{Z}_2) = 0$ oder $E_{4,1}^2(\mathbb{Z}_2) = 0$.

Beweis 1) Nach (19.16.1) ist $E^2(\Delta^{\leq 1}; G) = E^{\infty}(\Delta^{\leq 1}; G)$ für alle $G = \mathbb{Z}_r$ mit einer Nichteinheit $r \in \mathbb{Z}$. Gemäß 19.25 ist damit $H_i^{\text{cld}}(X_{\Delta^{\leq 1}}; \mathbb{Z}) = E_i^2(\Delta^{\leq 1}; \mathbb{Z})$. Aus 19.7 folgt die Übertragung auf allgemeine Koeffizienten G .

2) Für festes $p \geq 3$ genügt es, die Bedingung 19.25 3) zu verifizieren. Dies erreicht man unmittelbar mit 19.16 und 19.21 1). Für Koeffizienten \mathbb{Z} ist zusätzlich $p = 2$ zu untersuchen. Gemäß 19.21 2) ist für $n = 4$ das Differential $d_{4,1}^2(\mathbb{Z}_{2^m})$ das einzig potentiell nicht verschwindende. Nun kann man Aufgabe 19.7 heranziehen. Für $n = 5$ argumentiert man analog mit Aufgabe 19.6 ii). ■

Für die Berechnung weiterer noch fehlender Homologiegruppen bleibt es uns nicht erspart, eine verschärfte, ziemlich technische Version von 19.25 zu zeigen:

19.27 Lemma *Ist $R = \mathbb{Z}_{(p)}$ mit $p = 1$ oder prim, sind die R -Moduln $E^0(R)$ und $E^1(R)$ frei und ist $E^2(R)$ gradweise endlich erzeugt, so gilt für jedes $i \in \mathbb{N}$:*

- a) *Sind $E_i^2(R) \cong H_i(R)$ und $E_{i-1}^2(R) \cong H_{i-1}(R)$, so gilt $E_i^2(R_r) \cong H_i(R_r)$ für alle Nichteinheiten $r \in R$.*
- b) *Genau dann ist $E_i^2(R_r) \cong H_i(R_r)$ für alle Nichteinheiten $r \in R$, wenn das für alle Primpotenzen in R gilt.*
- c) *Genau dann ist $E_i^2(R_r) \cong E_i^\infty(R_r)$ für alle Nichteinheiten $r \in R$, wenn das für alle Primpotenzen in R gilt.*
- d) *Für $m \in \mathbb{N}_{>0}$ ist $E_i^2(R_{p^m}) \cong H_i(R_{p^m})$ äquivalent zu $E_i^2(R_{p^m}) \cong E_i^\infty(R_{p^m})$.*
- e) *Es sei $p \neq 1$. Gelten $E_i^2(R_{p^m}) \cong H_i(R_{p^m})$ für ein hinreichend großes m und $\text{Tors } E_{i-1}^2(R) \cong \text{Tors } H_{i-1}(R)$, so ist*

$$E_i^2(R) \cong H_i(R) .$$

- f) *Es sei $p \neq 1$. Gelten $E_i^2(R_{p^m}) \cong H_i(R_{p^m})$ und $E_i^2(R) \otimes R_{p^m} \cong H_i(R) \otimes R_{p^m}$ für ein hinreichend großes m , so ist*

$$\text{Tors } H_{i-1}(R) = \text{Tors } E_{i-1}^2(R) .$$

Beweis a) Aus dem kovarianten Universellen Koeffiziententheorem der Homologie folgt:

$$\begin{aligned} H_i(R_r) &\cong H_i(R) \otimes_R R_r \oplus \text{Tor}(H_{i-1}(R), R_r) \\ &\cong E_i^2(R) \otimes_R R_r \oplus \text{Tor}(E_{i-1}^2(R), R_r) \\ &\cong E_i^2(R_r) . \end{aligned}$$

Dabei verwendet der letzte Isomorphismus ein universelles Koeffiziententheorem

$$E_i^2(R_r) \cong E_i^2(R) \otimes_R R_r \oplus \text{Tor}(E_{i-1}^2(R), R_r) .$$

Dieses beruht einfach darauf (vgl. 19.7), daß der R -Modul E^1 nach Voraussetzung frei ist.

b) folgt aus der Additivität der Homologie bezüglich der Koeffizienten. Stets gilt $R_r \cong \bigoplus_i R_{p_i^{m_i}}$ mit der Primfaktorzerlegung von r . Analog folgert man c).

d) „ \Rightarrow “ Die Gruppen $E_{u,v}^2(R_{p^m})$ sind nach Voraussetzung endlich, was damit auch für alle $E_{u,v}^j(R_{p^m})$ und $H_i(R_{p^m})$ gilt. Also hat $E_{u,v}^\infty(R_{p^m})$ höchstens so viele Elemente wie $E_{u,v}^2(R_{p^m})$, und gleiche Elementzahl ist mit Gleichheit äquivalent. Andererseits sind für $L = H_i(R_{p^m})$ mit der von der Spektralsequenz induzierten Filtrierung die Voraussetzungen von Lemma 19.28 erfüllt, so daß $\text{corang } H_i(R_{p^m}) \leq \text{corang } \bigoplus_{u+v=j} E_{u,v}^\infty(R_{p^m})$ folgt. Aus $H_i(R_{p^m}) = E_i^2(R_{p^m})$ ergibt sich damit insbesondere $E_i^2(R_{p^m}) = E_i^\infty(R_{p^m})$.

„ \Leftarrow “ Nach Voraussetzung ist $H_i(R_{p^m})$ ein endlich erzeugter und endlich filtrierter p -Modul mit Quotienten $\bigoplus_{u+v=j} E_{u,v}^\infty(R_{p^m})$, so daß Lemma 19.29 anwendbar ist. Für die folgende Argumentation bemerken wir, daß $R_p \cong \mathbb{Z}_p$ ein Körper ist und damit aus 19.22 und der Voraussetzung auch $E_i^2(R_p) = H_i(R_p)$ folgt. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \text{corang } H_i(R_{p^m}) &= \dim_{\mathbb{Z}_p} (H_i(R_{p^m}) \otimes \mathbb{Z}_p) \stackrel{19.29}{=} \dim_{\mathbb{Z}_p} H_i(R_p) \\ &= \dim_{\mathbb{Z}_p} E_i^2(R_p) \stackrel{19.29}{=} \dim_{\mathbb{Z}_p} (E_i^2(R_{p^m}) \otimes \mathbb{Z}_p) \\ &= \text{corang } E_i^2(R_{p^m}) \stackrel{\text{n.V.}}{=} \text{corang } E_i^\infty(R_{p^m}) . \end{aligned}$$

Nunmehr resultiert die Behauptung aus Lemma 19.28.

e) Die Eigenschaft $H_i(R) \cong E_i^2(R)$ ist äquivalent dazu, daß diese beiden R -Moduln den gleichen Rang haben und ihre Torsion übereinstimmt. Die Universellen Koeffiziententheoreme liefern

$$(19.29.1) \quad \begin{aligned} H_i(R_{p^m}) &= H_i(R) \otimes \mathbb{Z}_{p^m} \oplus \text{Tor}(H_{i-1}(R), \mathbb{Z}_{p^m}) \\ E_i^2(R_{p^m}) &= E_i^2(R) \otimes \mathbb{Z}_{p^m} \oplus \text{Tor}(E_{i-1}^2(R), \mathbb{Z}_{p^m}) . \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung sind die beiden äußeren Terme isomorph, also folgt

$$H_i(R) \otimes \mathbb{Z}_{p^m} \cong E_i^2(R) \otimes \mathbb{Z}_{p^m} .$$

Da $E_i^2(R)$ endlich erzeugt ist, haben $H_i(R_{p^m})$ und $E_i^2(R_{p^m})$ für hinreichend großes m (man kann als grobe Abschätzung für m das Maximum des in $E^2(R)$ auftretenden Wertes sowie nach 19.9 $\log_p(\lfloor n/2 \rfloor)$ wählen) als Rang die Anzahl der direkten Summanden von der Ordnung p^m , während deren Komplement die p -Torsion ist. Und der Rang ist definitionsgemäß die Anzahl der freien Summanden von $H_i(R)$ bzw. $E_i^2(R)$.

f) Entsprechend folgt aus den Koeffizientenformeln (19.29.1) die Übereinstimmung der Torsion im Grad $i - 1$. ■

Beweis von Satz 19.25 Die Beziehungen

$$1) \Rightarrow 2) \iff 2') \Rightarrow 3') \iff 3)$$

sind eine unmittelbare Konsequenz von Lemma 19.27. Es bleibt

3) \Rightarrow 1): Dazu gehen wir induktiv vor. Als Induktionsbeginn verwenden wir

$$H_0(R) = E_{0,0}^\infty(R) = E_{0,0}^2(R) = E_0^2(R) .$$

Für eine Primzahl p sei nun $E_{<j}^2(R) \cong H_{<j}(R)$. Mit der Voraussetzung liefert dann e) den gewünschten Induktionsschritt $H_j(R) \cong E_j^2(R)$. Dies läßt sich nach Voraussetzung für alle Primzahlen p durchführen; aus 19.30 ergibt sich dann auch der Fall $p = 1$, i.e., $R = \mathbb{Z}$. ■■

Wir haben im Beweis drei Lemmata verwendet. Dabei heißt eine abelsche Gruppe L für eine Primzahl p eine p -Gruppe, wenn die Ordnung eines jeden Elementes aus L eine Potenz von p ist.

19.28 Lemma *Es sei L eine endlich erzeugte abelsche p -Gruppe; auf ihr existiere eine endliche Filtrierung $0 = L_{-1} \subset L_0 \subset \dots \subset L_n = L$. Setzt man $K_j := L_j/L_{j-1}$, so gilt*

$$\text{corang } L \leq \sum_{j=0}^n \text{corang } K_j ,$$

wobei Gleichheit genau dann eintritt, wenn L zu $\bigoplus_j K_j$ isomorph ist.

Beweis Nach dem Struktursatz 19.24 ist $\text{corang } L = \dim_{\mathbb{Z}_p} L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$. Wir gehen durch Induktion über n vor; für den typischen Schritt dürfen wir $n = 1$ annehmen. Aus $K_0 = L_0$ ergibt sich eine exakte Sequenz

$$(19.28.1) \quad 0 \rightarrow K_0 \xrightarrow{\iota} L_1 \rightarrow K_1 \rightarrow 0$$

und damit eine exakte Sequenz

$$K_0 \otimes \mathbb{Z}_p \xrightarrow{\iota \otimes \text{id}} L_1 \otimes \mathbb{Z}_p \rightarrow K_1 \otimes \mathbb{Z}_p \rightarrow 0 .$$

Also gilt

$$\text{corang } L_1 \leq \text{corang } K_0 + \text{corang } K_1 ,$$

und Gleichheit tritt genau dann ein, wenn $\iota \otimes \text{id}$ injektiv ist. Das wiederum ist äquivalent zur folgenden Bedingung: Ist $g \in L_0 = K_0$ und p Teiler von $\iota(g)$, so ist p auch Teiler von g . Dieses schließlich ist nach dem Struktursatz über endlich erzeugte R -Moduln gleichwertig damit, daß L_0 ein direkter Summand von L_1 und damit die Sequenz (19.28.1) spaltend ist. ■

19.29 Lemma *Ist $H(C)$ ein gradweise endlich erzeugter R -Modul, so gilt für $a, b \in \mathbb{N}$:*

$$H(\text{ggT}(a, b)) \cong H(C(b) \otimes \mathbb{Z}_a) \cong H(b) \otimes \mathbb{Z}_a .$$

Beweis Aus $\mathbb{Z}_a \otimes \mathbb{Z}_b \cong \mathbb{Z}_{\text{ggT}(a, b)}$ folgen

$$C(b) \otimes \mathbb{Z}_a \cong C(\text{ggT}(a, b)) \quad \text{und} \quad \text{Tor}^R(L, \mathbb{Z}_{\text{ggT}(a, b)}) \cong \text{Tor}^R(L, \mathbb{Z}_b) \otimes \mathbb{Z}_a$$

aus dem Struktursatz 19.24 für jeden endlich erzeugten R -Modul L . Damit dürfen wir a als Teiler von b annehmen. Insbesondere ergibt sich dann für jedes j nach dem kovarianten Universellen Koeffiziententheorem (analog 19.7, da C frei ist)

$$\begin{aligned} H_i(a) &\cong H_i(C) \otimes \mathbb{Z}_a \oplus \text{Tor}(H_{i-1}(C), \mathbb{Z}_a) \\ &\cong (H_i(C) \otimes \mathbb{Z}_b) \otimes \mathbb{Z}_a \oplus \text{Tor}(H_{i-1}(C), \mathbb{Z}_b) \otimes \mathbb{Z}_a \\ &\cong H_i(b) \otimes \mathbb{Z}_a . \quad \blacksquare \end{aligned}$$

19.30 Lemma *Ist C Komplex von freien abelschen Gruppen, so gilt für jede Primzahl p*

$$\text{Rang } H_i(C) = \text{Rang } H_i(C \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(p)}) \quad \text{und} \quad p\text{-Tors } H_i(C) = \text{Tors } H_i(C \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(p)}) .$$

Der Beweis ist unmittelbar mit dem Universellen Koeffiziententheorem. ■

Wir wollen aus Lemma 19.27 konkrete Angaben über die Homologie in kleinen sowie in großen Graden ableiten.

19.31 Satz *Es sei X eine torische Varietät der Dimension n . Ist p eine Primzahl und $i < 2p$, so gelten*

$$H_i^{\text{cl}}(X; \mathbb{Z}_{(p)}) \cong E_i^2(\mathbb{Z}_{(p)}) \quad \text{und} \quad H_{2n-i}^{\text{cl}}(X; \mathbb{Z}_{(p)}) \cong E_{2n-i}^2(\mathbb{Z}_{(p)}).$$

Beweis Wir erinnern zunächst an

$$(19.20.1) \quad E_{u,v}^2(\mathbb{Z}_{p^m}) = E_{u,v}^p(\mathbb{Z}_{p^m}) \quad \text{für alle } (u, v)$$

Für den Grad $2n - i$ bleibt nach Lemma 19.32 $E_{\geq 2n-i+1}^p(p^m) = E_{\geq 2n-i+1}^\infty(p^m)$ zu zeigen. Zunächst ist

$$(19.31.1) \quad E_{n,n-i+1}^p(\mathbb{Z}_{p^m}) = E_{n,n-i+1}^{p+1}(\mathbb{Z}_{p^m});$$

wobei das einzig kritische Indexpaar $(n, n-i+1)$ ist. Die dabei auftretenden Differentiale haben für $i < 2p$ ihr Bild in der Nullgruppe. Der Fall $i = 2p$ scheitert im übrigen nur an der mangelnden Kenntnis von $d_{n,n-2p+1}(\mathbb{Z}_{p^m})$. Damit bleibt

$$(19.31.2) \quad E_{n,n-i+1}^{p+1}(\mathbb{Z}_{p^m}) = E_{n,n-i+1}^\infty(\mathbb{Z}_{p^m})$$

zu verifizieren. Für alle $j \geq p+1$ landen jedoch ersichtlich auch die Differentiale $d_{n,n-i+1}^j$ in der Nullgruppe.

Für kleine i ist nach Lemma 19.33 gemäß (19.20.1) analog zu zeigen:

$$(19.31.3) \quad E_{\leq 2p-1}^p(\mathbb{Z}_{p^m}) = E_{\leq 2p-1}^\infty(\mathbb{Z}_{p^m}).$$

Dazu weisen wir zunächst ganz allgemein

$$(19.31.4) \quad d_{\leq 2j}^j(G) = 0$$

für beliebiges G und $j \geq 2$ nach: Für $d_{u,i-u}^j: E_{u,i-u}^j \rightarrow E_{u-j,i+j-u-1}^j$ mit $i \leq 2j$ ist nur der Fall $i - u \geq 1$ interessant, also sei ohne Einschränkung $u \leq i - 1$. Andererseits hat $u - j \geq i + j - u - 1$ zu gelten und damit $u \geq j + i/2 - 1/2 \geq i - 1/2$, also $i - 1/2 \leq i - 1$, woraus (19.31.4) folgt. Berücksichtigt man noch $d_{u+j,i+1-u-j}^j(G) = 0$ für $j > p$ und $i \leq 2p$, so liefert die Konstruktion der Spektralsequenz

$$E_{\leq 2p}^2(G) = E_{\leq 2p}^p(G) = \ker d_{\leq 2p}^p(G) \twoheadrightarrow E_{\leq 2p}^{p+1}(G) = E_{\leq 2p}^\infty(G).$$

Betrachten wir andererseits $d_{u+p,i+1-u-p}^p: E_{u+p,i+1-u-p}^p \rightarrow E_{u,i-u}^p$ mit $i \leq 2p$. Dann sei wiederum ohne Einschränkung $i + 1 - u - p \geq 1$, also $u \leq i - p$. Andererseits können wir $u \geq i - u$, also $u \geq i/2$ voraussetzen. Das führt zu $p = i/2 = u$ bzw.

$$(19.31.5) \quad d_{2p,1}^p(G)$$

als einzigem kritischem Fall. Insbesondere folgt $d_{u+p, i+1-u-p}^p(G) = 0$ für $i \leq 2p-1$ und damit (19.31.3). ■

Wenn der betrachtete Fächer hinreichend gutartig ist, erhalten wir eine etwas schärfere Aussage im unteren Bereich:

Aufgabe 19.8 i) Ist $E_{2p,1}^2(\mathbb{Z})$ ohne p -Torsion, so gilt (für 19.34)

$$H_{2p}^{\text{clid}}(X; \mathbb{Z}_{(p)}) \cong E_{2p}^2(\mathbb{Z}_{(p)}),$$

wenn

$$E_{2p,1}^2(\mathbb{Z}_{(p)}) \cong E_{2p,1}^p(\mathbb{Z}_{(p)}) \xrightarrow{d_{2p,1}^p(\mathbb{Z}_{(p)})} E_{p,p}^p(\mathbb{Z}_{(p)}) \cong E_{p,p}^2(\mathbb{Z}_{(p)})$$

der Nullhomomorphismus ist.

ii) Ist $E_{n-1, n-2p+1}^2(\mathbb{Z})$ ohne p -Torsion oder $E_{n-p, n-p}^2(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_p = 0$, so ist

$$H_{2n-2p}^{\text{clid}}(X; \mathbb{Z}_{(p)}) \cong E_{2n-2p}^2(\mathbb{Z}_{(p)}).$$

Aufgabe 19.9 Zu freien Erzeugenden a, b, c betrachte man den homologischen Komplex C mit $C_1 := \mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b$, $C_2 := \mathbb{Z}c$ als einzigen nichttrivialen Termen, $\delta(c) := a + 2b$ als einzigem nichttrivialen Bestandteil des Differentials und der Filtrierung

$$0 = F_{-1} \subset F_0 := \mathbb{Z}a \subset F_1 := C_1 \subset F_2 := C.$$

Man zeige, daß die durch $E_{u,v}^0 := F_u C_{u+v} / F_{u-1} C_{u+v}$ gegebene Spektralsequenz auf dem 2-Niveau degeneriert, dies aber nicht für die zugehörige Spektralsequenz mit $E_{u,v}^0(2)$ gilt. — Man vergleiche $H(C)$ mit E^2 .

Aufgabe 19.10 Für die Spektralsequenz zum Komplex C in Satz 19.25 zeige man:

- i) Ist $E^2(C) \cong H(C)$, so folgt $E^2 = E^\infty$.
- ii) Die Umkehrung von i) gilt nicht.

Für den Beweis von 19.31 haben wir zwei Vorbereitungen benötigt:

19.32 Lemma Gilt in der torischen Spektralsequenz für eine Primzahl p und ein m so daß $E_{\geq a}^2(\mathbb{Z}_{(p)})$ keine Elemente der Ordnung p^m hat, die Beziehung

$$E_{\geq a+1}^2(p^m) = E_{\geq a+1}^\infty(p^m),$$

so ist

$$(19.32.1) \quad H_{\geq a}^{\text{clid}}(X; \mathbb{Z}_{(p)}) \cong E_{\geq a}^2(\mathbb{Z}_{(p)}).$$

Ist die Voraussetzung für alle p erfüllt, so gilt (19.32.1) auch mit Koeffizienten \mathbb{Z} .

Beweis Wir argumentieren durch fallende Induktion über den Grad i mit $i \geq a+1$. Für $i = 2n+1$ gilt Formel (19.32.1) trivialerweise. Für den Induktionsschluß „i) \Rightarrow i-1)“ liefern 19.27 d) und f) mit der Induktionsvoraussetzung die Gleichung „Tors $H_{i-1}(\mathbb{Z}_{(p)}) = \text{Tors } E_{i-1}^2(\mathbb{Z}_{(p)})$ “. Da $H_i(R)$ und $E_i^2(R)$ für jeden Hauptidealbereich R der Charakteristik 0 gleiche Bettizahlen haben, stimmen auch die Bettizahlen überein, so daß (19.32.1)

folgt. Aus p -Tors $H_a(\mathbb{Z}) = \text{Tors } H_a(\mathbb{Z}_{(p)})$ ergibt sich schließlich damit auch die Übertragung auf \mathbb{Z} . ■

19.33 Lemma Hat $E_{\leq a}^2(\mathbb{Z}_{(p)})$ keine Elemente der Ordnung p^m und gilt die Beziehung $E_{\leq a}^2(p^m) = E_{\leq a}^\infty(p^m)$, so ist

$$(19.33.1) \quad H_{\leq a}^{\text{cld}}(X; \mathbb{Z}_{(p)}) \cong E_{\leq a}^2(\mathbb{Z}_{(p)}) .$$

Ist die Voraussetzung für alle p erfüllt, so gilt (19.33.1) auch mit Koeffizienten \mathbb{Z} .

Beweis Für einen Induktionsbeweis über $i \leq a$ gilt Formel (19.33.1) ersichtlich mit $i = 0$. Der Induktionsschluß „ $i - 1 \Rightarrow i$ “ ergibt sich nunmehr aus e) und d) in 19.27 für $R = \mathbb{Z}_{(p)}$. Aus p -Tors $H_a(\mathbb{Z}) = \text{Tors } H_a(\mathbb{Z}_{(p)})$ resultiert somit auch die Übertragung auf \mathbb{Z} . ■

19.34 Beispiele Für eine torische Varietät X gilt:

- 1) $H_i^{\text{cld}}(X; \mathbb{Z}) \cong E_i^2(\mathbb{Z})$ für $i \leq 3$ und für $i \geq 2n - 3$;
- 2) Falls $p \geq 3$ und $i \leq 5$ oder $i \geq 2n - 5$:

$$(19.34.1) \quad H_i^{\text{cld}}(X; \mathbb{Z}_{(p)}) \cong E_i^2(\mathbb{Z}_{(p)}) .$$

- 3) Aussage 1) gilt auch für

$i = 4$ wenn $E_{2p,1}^2(\mathbb{Z})$ ohne p -Torsion und

$$E_{2p,1}^2(\mathbb{Z}_{(p)}) \cong E_{2p,1}^p(\mathbb{Z}_{(p)}) \xrightarrow{d_{2p,1}^p(\mathbb{Z}_{(p)})} E_{p,p}^p(\mathbb{Z}_{(p)}) \cong E_{p,p}^2(\mathbb{Z}_{(p)})$$

der Nullhomomorphismus ist.

$i = 2n - 4$, wenn $E_{n-1, n-2p+1}^2(\mathbb{Z})$ ohne p -Torsion oder $E_{n-p, n-p}^2(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_p = 0$ ist.

Beweis 1) Ersichtlich kann man 19.31 für alle Primzahlen p anwenden; gemäß 19.30 folgt damit die Behauptung auch für \mathbb{Z} . Für 2) verwendet man 19.31 mit $p \geq 3$, während sich 3) aus Aufgabe 19.8 ergibt. ■

Damit können wir bis zur Dimension 4 eine nahezu vollständige explizite Beschreibung der Homologie angeben:

19.35 Beispiel Hat X höchstens die Dimension 4, so gilt

$$H_i^{\text{cld}}(X; \mathbb{Z}) \cong \bigoplus_u H_u(\Delta; \Lambda_{i-u})$$

mit der möglichen Ausnahme der 2-Torsion für $i = 4 = \dim X$, falls $E_{3,1}(\mathbb{Z})$ 2-Torsion hat.

$i \setminus n$	1	2	3	4	5
0	$E_{0,0}^2$	$E_{0,0}^2$	$E_{0,0}^2$	$E_{0,0}^2$	$E_{0,0}^2$
1	0	$E_{1,0}^2$	$E_{1,0}^2$	$E_{1,0}^2$	$E_{1,0}^2$
2	$E_{1,1}^2$	$E_{1,1}^2$	$E_{2,0}^2 \oplus E_{1,1}^2$	$E_{2,0}^2 \oplus E_{1,1}^2$	$E_{2,0}^2 \oplus E_{1,1}^2$
3	0	0	$E_{2,1}^2$	$E_{3,0}^2 \oplus E_{2,1}^2$	$E_{3,0}^2 \oplus E_{2,1}^2$
4	0	$E_{2,2}^2$	$E_{2,2}^2$	$E_{3,1}^2 \oplus E_{2,2}^2$	$E_{4,0}^2 \oplus E_{3,1}^2 \oplus E_{2,2}^2$
5	0	0	0	$E_{3,2}^2$	$E_{4,1}^2 \oplus E_{3,2}^2$
6	0	0	$E_{3,3}^2$	$E_{3,3}^2$	$E_{4,2}^2 \oplus E_{3,3}^2$
7	0	0	0	0	$E_{4,3}^2$
8	0	0	0	$E_{4,4}^2$	$E_{4,4}^2$
9	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	$E_{5,5}^2$

FIGUR 19.2 $H_i^{\text{cl d}}(X; \mathbb{Z}_{(p)})$ für $n \leq 5$.

Während im vierdimensionalen Fall der Homomorphismus $d_{4,1}^2(\mathbb{Z}_{2^m})$ für die maximale in $E_{3,1}^2(\mathbb{Z}_{(2)})$ auftretende Ordnung 2^m Probleme bereiten könnte, sind das im fünfdimensionalen Fall die Homomorphismen $d_{4,1}^2(\mathbb{Z}_{2^m})$, $d_{5,1}^2(\mathbb{Z}_{2^m})$ und $d_{5,2}^2(\mathbb{Z}_{2^m})$, welche allerdings ebenfalls nur für die 2-Torsion Probleme bereiten, und zwar für $i = 4, 5, 6$. Dabei vermuten wir, daß $d_{\dim X, \bullet}^2(G)$ für alle G verschwindet. Jedenfalls gilt die Tabelle 19.2 für alle $p \geq 3$ und unter den angegebenen Einschränkungen auch für \mathbb{Z} :

Nach 19.21 ist für Primzahlen p oberhalb von $n/2$ neben dem freien Anteil auch die p -Torsion von $H_{\bullet}^{\text{cl d}}(X; \mathbb{Z})$ bestimmt. Wenn wir für die restlichen Primzahlen auch keine geschlossene Formel angeben können, so läßt sich doch aus der Kenntnis von $E_{u,v}^{\infty}(\mathbb{Z}_{p^m})$ für alle $m \geq 0$ die p -Torsion der ganzzahligen Homologie $H_{\bullet}^{\text{cl d}}(X; \mathbb{Z})$ durch ein **rekursives Verfahren** in den fehlenden mittleren Graden zu bestimmen.

Wir erinnern daran, daß die p -Torsion von $H_k^{\text{cl d}}(X; \mathbb{Z})$ mit Tors $H_k^{\text{cl d}}(X; \mathbb{Z}_{(p)})$ übereinstimmt. Wir nun rekursiv über k und m vor, wobei wir jeweils die Anzahl c_k^m der zyklischen Summanden der p -Ordnung mindestens m von Tors $H_k^{\text{cl d}}(X; \mathbb{Z}_{(p)})$ bestimmen:

19.36 Satz Für $m = 1, \dots, m_0$ und festes k sei $E_k^\infty(\mathbb{Z}_{p^m})$ bekannt. Dann läßt sich $c_k^{m_0}$ rekursiv aus $H_{k-1}^{\text{cld}}(X; \mathbb{Z})$ berechnen.

Sind alle c_k^m bekannt, so ergibt sich die Gruppe Tors $H_k^{\text{cld}}(X; \mathbb{Z}_{(p)})$ unmittelbar!

Beweis Wir verwenden das universelle Koeffiziententheorem³⁰⁾

$$0 \rightarrow H_k^{\text{cld}}(X) \otimes \mathbb{Z}_{p^m} \rightarrow H_k^{\text{cld}}(X; \mathbb{Z}_{p^m}) \rightarrow H_{k-1}^{\text{cld}}(X) * \mathbb{Z}_{p^m} \rightarrow 0 .$$

Damit gilt nach (19.22.2)

$$\begin{aligned} e_k(m) &:= \log_p \# E_k^\infty(\mathbb{Z}_{p^m}) = \log_p \# H_k^{\text{cld}}(X; \mathbb{Z}_{p^m}) \\ &= \log_p \# (H_k^{\text{cld}}(X; \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{p^m}) + \log_p \# (H_{k-1}^{\text{cld}}(X; \mathbb{Z}) * \mathbb{Z}_{p^m}) . \end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} \log_p \# (H_k^{\text{cld}}(X; \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{p^m}) &= mb_k^{\text{cld}}(X; \mathbb{Z}) + (c_k^1 - c_k^2) + 2(c_k^2 - c_k^3) + \dots + m(c_k^m - 0) \\ &= mb_k^{\text{cld}}(X; \mathbb{Z}) + \sum_{i=1}^m c_k^i \end{aligned}$$

und entsprechend

$$\log_p \# (H_{k-1}^{\text{cld}}(X; \mathbb{Z}) * \mathbb{Z}_{p^m}) = \log_p \# (\text{Tors } H_{k-1}^{\text{cld}}(X; \mathbb{Z}_{(p)}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{p^m}) = \sum_{i=1}^m c_{k-1}^i .$$

Damit folgt damit die gesuchte Formel

$$(19.36.1) \quad \boxed{c_k^m = e_k(m) - mb_k^{\text{cld}}(X; \mathbb{Z}) - \sum_{i=1}^{m-1} (c_{k-1}^i + c_k^i) - c_{k-1}^m .}$$

=====

Wir beenden diesen Paragraphen mit einer weiteren interessanten Anwendung der Spektralsequenz (vgl. [Jo, Theorem 3.3.1]), die man als eine Verallgemeinerung des Satzes von Jurkiewicz-Danilov betrachten kann:

19.37 Theorem Für jeden Fächer Δ und jedes j existiert ein kanonischer Isomorphismus zwischen der Chowgruppe $\text{Ch}_j(X_\Delta)$ und $E_{j,j}^2(X_\Delta, \mathbb{Z})$. ■

³⁰⁾ Bezeichnet \bar{X} eine torische Kompaktifizierung von X und setzt man $A := \bar{X} \setminus X$, so folgt der Satz wegen $H_k^{\text{cld}}(X, G) \cong H_k(\bar{X}, A; G)$ sofort aus dem üblichen kovarianten relativen universellen Koeffiziententheorem der Homologie.

20. Das g-Theorem

In diesem Paragraphen geht es um die Charakterisierung simplizialer Polytope P mit Hilfe der zugehörigen projektiv algebraischen Varietät X_P .

Für ein Polytop P bzw. den zugehörigen Fächer Δ_P hatten wir aus dem f -Vektor den (gleichwertigen) h -Vektor konstruiert. Es ist nützlich, eine weitere Umformulierung, den g -Vektor, zur Verfügung zu haben. Mit $h_{-1} := 0$ setzt man

$$g_j := g_j(P) := h_j(P) - h_{j-1}(P).$$

Damit ist $g_0 = h_0$ und $h_j = \sum_{i \leq j} g_i$. Auf die Komponenten des g -Vektors haben wir folgende Konstruktion anzuwenden:

Für zwei gegebene positive natürliche Zahlen a und j ist entweder $a = \binom{n_j}{j}$, oder es existieren eindeutig bestimmte natürliche Zahlen $1 \leq \ell \leq n_\ell < \dots < n_j$ mit

$$a = \binom{n_j}{j} + \binom{n_{j-1}}{j-1} + \dots + \binom{n_\ell}{\ell} :$$

Man setze $n_j := \max\{m \in \mathbb{N}; a \geq \binom{m}{j}\}$ und fahre rekursiv mit

$$n_{j-k} := \max\left\{m \in \mathbb{N}; a \geq \binom{n_j}{j} + \dots + \binom{n_{j-k+1}}{j-k+1} + \binom{m}{j-k}\right\}$$

fort, bis man die gewünschte Gleichheit erhält. Dann heißt die Zahl

$$a^{\langle j \rangle} := \binom{n_j + 1}{j + 1} + \binom{n_{j-1} + 1}{j} + \dots + \binom{n_\ell + 1}{\ell + 1}$$

für $a \neq 0$ und $0^{\langle j \rangle} := 0$ die j -te *Pseudopotenz* von a . Beispielsweise ist

$$5^{\langle 1 \rangle} = 15, \quad 5^{\langle 2 \rangle} = 7, \quad 5^{\langle 3 \rangle} = 6, \quad 5^{\langle 4 \rangle} = 6, \quad 5^{\langle 5 \rangle} = 5.$$

Man nennt nun (in Anlehnung an Macaulay) einen Vektor $(1, a_1, \dots, a_j) \in \mathbb{N}^{j+1}$ einen *M-Vektor*, wenn gilt:

$$0 \leq a_{i+1} \leq a_i^{\langle i \rangle} \quad \text{für } i = 1, \dots, j-1.$$

Ein einfaches Beispiel ist etwa der Vektor $(1, 3, 2) \in \mathbb{N}^3$, das wir später verwenden werden.

Damit können wir mit der Bezeichnung $\lfloor t \rfloor := \max\{a \in \mathbb{Z}; a \leq t\}$ das auf eine Vermutung von McMullen zurückgehende zentrale Resultat dieses Abschnittes formulieren:

20.1 g -Theorem Ein Vektor $f = (f_{-1}, \dots, f_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n+1}$ tritt genau dann als f -Vektor eines n -dimensionalen simplizialen Polytops auf, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- 1) $h_j = h_{n-j}$ für $j = 0, \dots, n$.
- 2) $(g_0, \dots, g_{\lfloor n/2 \rfloor})$ ist ein M -Vektor.

Die Existenz eines simplizialen Polytops zu einem solchen f -Vektor wurde von L. Billera und C. Lee in [BiLe] mit Hilfe zyklischer Polytope gezeigt. Der erste Nachweis der Notwendigkeit von Stanley in [St₂] verwendete Hilfsmittel der algebraischen Geometrie, die wir auch aus diesem Grunde zum Teil bereits vorbereitet haben. Inzwischen existiert von McMullen unter Verwendung der Gewichtsalgebra ein rein kombinatorischer Beweis (vgl. [McM]), auf den wir hier jedoch nicht eingehen wollen.

Der folgende Satz (vgl. [BruHe, Th. 4.2.10]) mag das auf den ersten Blick obscure Auftreten der M -Vektoren verständlicher machen:

20.2 Satz von Macaulay Eine endliche Folge $(1, \dots, a_j) \in \mathbb{N}^{j+1}$ ist genau dann ein M -Vektor, wenn über einem Körper K eine endlichdimensionale kommutative graduierte Algebra $R^\bullet = \bigoplus_{i=0}^j R^i$ existiert, die vom homogenen Bestandteil R^1 erzeugt wird und für die $a_i = \dim_K R^i$ für alle i gilt. ■

Zum Beweis von 20.1 Wir wollen die Notwendigkeit der Bedingungen zu zeigen; für das Hinreichen geben wir nur ein illustratives Beispiel an. Dazu sei P ein n -dimensionales simpliziales Polytop; dann ist $\Delta := \Delta_P$ polytopisch. Wir haben bereits in 18.10 die Dehn-Sommerville-Gleichungen 1) verifiziert. Für 2) benutzen wir einen Quotienten der kommutativen endlichdimensionalen graduierten Algebra $H^\bullet(X)$, wobei wir rationale Koeffizienten unterstellen. Gemäß 18.8 wird sie von $H^2(X)$ erzeugt und verschwindet damit insbesondere in ungeraden Graden. In den Bezeichnungen des Beweises von Korollar 18.11 ist für $j \leq n+1$ die Multiplikation

$$H^{j-2}(X) \xrightarrow{\mu(\omega)} H^j(X)$$

injektiv, also gilt für die endlichdimensionale kommutative graduierte Algebra

$$R^\bullet := H^{2\bullet}(X) / \omega H^{2\bullet-2}(X)$$

nach 18.7

$$\dim R^j = \dim H^{2j}(X) / \omega H^{2j-2}(X) = b^{2j}(\Delta) - b^{2j-2}(\Delta) = h_j(\Delta) - h_{j-1}(\Delta) = g_j(\Delta).$$

Nach 20.2 ist also 2) erfüllt. ■

Abschließend wollen wir die Konstruktion von Billera-Lee mit Hilfe eines Beispiels andeuten:

20.3 Beispiel Es sei $f = (f_{-1}, \dots, f_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n+1}$ ein Vektor, für den der zugehörige h -Vektor die Dehn-Sommerville-Gleichungen erfüllt und einen M -Vektor erzeugt. Dazu beginnen wir mit dem zyklischen Polytop $C := C(f_0, n+1)$ mit den Ecken v_j . Man stelle wie in Aufgabe 5.5 zu alle Facetten F von C , welche die Ecke v_{f_0} enthalten, die geordnete Matrix der Kennzahlen auf. Wählen wir als Beispiel

$$n = 5 \text{ und } f = (1, 9, 32, 48, 55, 22),$$

also

$$h = (h_0, \dots, h_5) = (1, 4, 6, 6, 4, 1) \text{ und } g = (g_0, g_1, g_2) = (1, 3, 2)$$

und betrachten somit zunächst $C = C(9, 6)$. Ersetzen wir in der Kennzahlmatrix in allen Zweierblocks von Einsen, die nicht in der gleichen Position wie in der darüberstehenden Zeile stehen, die erste 1 durch ein \otimes , so erhalten wir im Beispiel die ersten f_0 Spalten der folgenden Matrix:

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	Marke	Seite
0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	F_1
0	0	\otimes	1	0	1	1	1	1	1	F_2
0	0	\otimes	1	\otimes	1	0	1	1	2	F_3
0	\otimes	1	0	0	1	1	1	1	1	F_4
0	\otimes	1	0	\otimes	1	0	1	1	2	F_5
0	\otimes	1	\otimes	1	0	0	1	1	2	
\otimes	1	0	0	0	1	1	1	1	1	F_6
\otimes	1	0	0	\otimes	1	0	1	1	2	
\otimes	1	0	\otimes	1	0	0	1	1	2	
\otimes	1	1	\otimes	0	0	0	1	1	2	

Zur Kennzahlmatrix werde nun eine Spalte mit der Anzahl der \otimes -Zeichen jeder Facetkennzahl als Marke hinzugefügt; im Beispiel also die Marken $i = 0, 1, 2$. Für jede auftretende Marke i werden die ersten g_i Seiten ausgewählt, welche diese Marke tragen. Dann werden diese Seiten in der Reihenfolge des Auftretens durchnummeriert. Die Kollektion \mathfrak{F} dieser Facetten erweist sich nun als eine simpliziale Zelle, die in der angegebenen Reihenfolge schälbar ist. Die Symbole \otimes in einer Facette kennzeichnen die minimale Teilmenge von Ecken dieser Facette, die in keiner vorangehenden enthalten ist. Ist i die Marke der Facette F_j , so trägt F_j damit einen Anteil 1 zu $h_{n+1-i}(\mathfrak{F})$ bei. Daraus läßt sich im Beispiel $h(\mathfrak{F}) = (0, 0, 0, 0, g_2, g_1, g_0)$ folgern. Weil \mathfrak{F} eine schälbare Zelle ist, hat der Außenrand $\partial\mathfrak{F}$ die Struktur einer simplizial zerlegten $(n-1)$ -Sphäre. Daraus läßt sich

$$f_i(\mathfrak{F}) = f_i(\partial\mathfrak{F}) \text{ für } -1 \leq i \leq \lfloor n/2 \rfloor - 1$$

ableiten. Aus der Definition der h_i in (18.5.0) ergibt sich durch Einsetzen

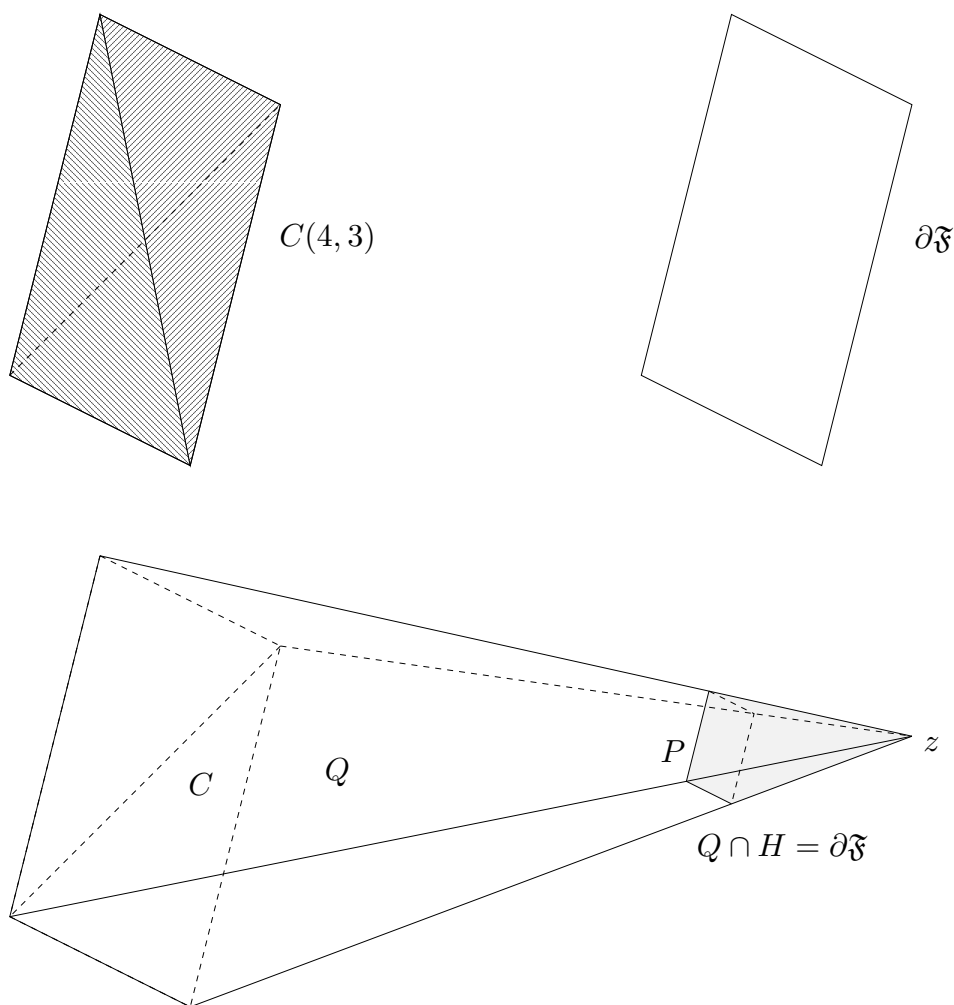
$$h_{n+1-i}(\mathfrak{F}) = h_{n-i}(\partial\mathfrak{F}) - h_{n+1-i}(\partial\mathfrak{F})$$

und folglich

$$h_{n-i}(\partial\mathfrak{F}) = h_{n-i} \text{ für } i \leq \lfloor n/2 \rfloor .$$

Wendet man nun die Dehn-Sommerville-Gleichungen auf die n -Kugel an, welche von der simplizial unterteilten Sphäre $\partial\mathfrak{F}$ berandet wird, so erhält man die restlichen Komponenten des h -Vektors $h(\partial\mathfrak{F}) = (h_0, \dots, h_n)$.

Das gesuchte Polytop P soll nun so konstruiert werden, daß sein Rand zu $\partial\mathfrak{F}$ kombinatorisch äquivalent ist. Man erhält es mit Hilfe einer Art geradliniger „Kreuzrippenwölbung“, die man auf $\partial\mathfrak{F}$ an C ansetzt. Aus diesem Grund zeigt man: Die Ecken v_j von C lassen sich so wählen (Verschieben ändert die Kombinatorik nicht!), daß der Komplex \mathfrak{F} genau der von einem geeigneten Punkt z außerhalb von C „sichtbare“ Teil von C ist. Die konvexe Hülle Q von C und z wird dann von den nicht sichtbaren Facetten F , i.e., $F \notin \mathfrak{F}$, und einem Kegel über $\partial\mathfrak{F}$ mit Spitze z erzeugt. Schneidet man Q mit einer Hyperebene H mit $z \in H^{>r}$ und $v_j \in H^{<r}$ für alle j , so kann man $P := Q \cap H^{\geq r}$ wählen.



FIGUR 20.1 Zu Beispiel 20.3 für $C = C(4,3)$ mit $\mathfrak{F} = \{F_1, F_2\}$.

Anhang

Äquivariante Schnitthomologie torischer Varietäten

nach einer Gastvorlesung von

Karl-Heinz Fieseler

Im Anhang wird das Ziel verfolgt, den Satz von Jurkiewicz-Danilov mit reellen Koeffizienten von der Klasse der simplizialen vollständigen Fächer auf eine allgemeinere Situation zu erweitern. Dies ist auch für das Zusammenspiel zwischen f -Vektoren, h -Vektoren und Bettizahlen von Interesse. Es seien drei Gesichtspunkte hervorgehoben:

- 1) Für nichtsimpliciale Varietäten spiegelt die Schnitthomologie geometrische Eigenschaften häufig besser wider als die gewöhnliche (singuläre oder simpliziale) Homologie.
- 2) Auch wenn man sich vor allem für polytopische Fächer interessiert, ist es zumindest aus technischen Gründen empfehlenswert, garbentheoretische Methoden als eine wohlentwickelte Sprache zu verwenden, was die Einbeziehung nicht vollständiger Fächer erzwingt; nicht die Bedingung „vollständig“, sondern die allgemeinere „äquivariant formal“ ist die dem Problem angepaßte. Beispielsweise sind auch affine Fächer äquivariant formal.
- 3) Für diese Klasse von Fächern läßt sich die Schnitthomologie auf einfache formale Weise aus der entsprechenden äquivarianten Theorie bezüglich der Toruswirkung berechnen. Dabei hat die Prägarbe der äquivarianten Schnitthomologie im Vergleich zu der üblichen Schnitthomologie den entscheidenden Vorteil, eine Garbe auf dem Fächerraum zu sein.

Die äquivariante Schnitthomologie läßt sich auf rein formalem Wege auf die Klasse der nichtrationalen Fächer erweitern, wodurch sich für nicht rationale äquivariant formale Fächer umgekehrt eine „virtuelle“ Schnitthomologie einführen läßt. Als wesentliches, noch offenes Problem für die rekursive Berechnung von Schnittbettizahlen nichtrationaler Fächer stellt sich die Frage nach einer kombinatorischen Version eines harten Lefschetzsatzes, der nicht auf die Kategorie projektiv algebraischer Varietäten rekuriert.

An den Anfang stellen wir eine genauere Analyse simplizialer Varietäten, deren äquivariante Kohomologie uns als Ariadnefaden für die Untersuchung allgemeinerer Fächer dienen soll.

21. Äquivariante Kohomologie simplizialer Varietäten

Wir beginnen mit einer Darstellung der äquivarianten Kohomologie von komplex-algebraischen \mathbb{T} -Varietäten X gemäß der Borelkonstruktion. Wir werden dabei, wenn nicht anders vermerkt, stets reelle Koeffizienten wählen. Für die allgemeine Theorie sei etwa auf das einleitende Kapitel in [AlPu] verwiesen.

Es sei

$$\mathbb{C}^{(\infty)} := \{(a_j) \in \mathbb{C}^\infty; \text{fast alle } a_j = 0\}$$

versehen mit der Vektorraumtopologie mit einer Basis von Nullumgebungen in der Form $\mathbb{C}^{(\infty)} \cap \prod_{j=1}^{\infty} \{a_j \in \mathbb{C}; |a_j| < \varepsilon_j\}$ für eine Folge (ε_j) in $\mathbb{R}_{>0}$. Bezüglich der kanonischen

Inklusionen $\mathbb{C}^j \hookrightarrow \mathbb{C}^{(\infty)}$ ist dies gerade die Topologie eines induktiven Limes. Die komponentenweise skalare Multiplikation von \mathbb{C} auf $\mathbb{C}^{(\infty)}$ induziert für festes $n \in \mathbb{N}$ eine freie Operation von $\mathbb{T} = (\mathbb{C}^*)^n$ auf

$$(21.0) \quad \text{ET} := (\mathbb{C}^{(\infty)} \setminus \{0\})^n .$$

21.1 Bemerkung Der topologische Raum ET ist zusammenziehbar.

Beweis Zunächst ist jede kompakte Teilmenge K in einem $B_j := \mathbb{C}^j \setminus \{0\}$ enthalten: Andernfalls existierte ohne Einschränkung eine Punktfolge $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$ in K mit a_j aus $B_j \setminus B_{j-1}$. Sie bildet eine abgeschlossene Menge in ET , da sie mit jedem B_j einen endlichen und damit abgeschlossenen Durchschnitt hat. Also definiert die Folge eine unendliche diskrete abgeschlossene und damit kompakte Teilmenge in K , was nicht sein kann. — Folglich verschwinden alle Homotopiegruppen $\pi_j(\text{ET})$, denn jedes stetige Bild einer j -Sphäre in ET liegt damit in einem B_m , und für $m > j$ ist dieses Bild nullhomotop. Nach dem Satz von Whitehead [tD, III.4.19], angewandt auf eine konstante Abbildung auf dem CW-Komplex ET , ist ET auf einen Punkt zusammenziehbar. ■

Konstruiert man analog $\mathbb{I}\mathbb{P}_\infty := \varinjlim \mathbb{I}\mathbb{P}_m$, so wird aus ET durch Quotientenbildung nach der Wirkung von \mathbb{T} ein Bündel

$$(21.1.1) \quad \text{ET} \rightarrow \text{BT} := (\mathbb{I}\mathbb{P}_\infty)^n$$

mit Faser \mathbb{T} , das ein \mathbb{T} -Prinzipalbündel ist. Man nennt BT den „klassifizierenden Raum“ zu \mathbb{T} und ET das „universelle \mathbb{T} -Bündel“. Ist nun X eine komplex-algebraische Varietät mit \mathbb{T} -Wirkung, so erhält man mittels der Übergangsfunktionen des Bündels $\text{ET} \rightarrow \text{BT}$ aus dem Produkt mit der „getwisteten“ diagonalen \mathbb{T} -Wirkung

$$\mathbb{T} \times (X \times \text{ET}) \rightarrow X \times \text{ET}, \quad (t, (x, y)) \mapsto (tx, t^{-1}y)$$

als Bahnenraum das assoziierte Bündel

$$X_{\mathbb{T}} := X \times^{\mathbb{T}} \text{ET} \rightarrow \text{BT}$$

mit Faser X .

21.2 Definition Die Kohomologie

$$H_{\mathbb{T}}^{\bullet}(X) := H_{\mathbb{T}}^{\bullet}(X; \mathbb{R}) := H^{\bullet}(X_{\mathbb{T}}; \mathbb{R})$$

heißt die äquivariante (reellwertige) Kohomologie der \mathbb{T} -Varietät X .

Für den Vektorraum $V \cong \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir mit

$$A^{\bullet} := S_{\mathbb{R}}^{\bullet}(V^*)$$

die reelle symmetrische Algebra über dem dualen Vektorraum V^* , also die Polynomalgebra $\mathbb{R}[T_1, \dots, T_n]$, wobei T_1, \dots, T_n eine Basis von V^* ist. Die Algebra ist graduiert, jedes T_j habe definitionsgemäß den Grad 2, so daß A^{odd} verschwindet. Als abstrakte Vektorräume sind A^{\bullet} und $H^{\bullet}(\text{BT})$ isomorph. Für spätere Anwendungen benötigen wir folgende *explizite* Identifikation:

21.3 Lemma Es gibt einen kanonischen Isomorphismus gradierter \mathbb{R} -Algebren

$$A^{\bullet} \cong H^{\bullet}(\text{BT}).$$

Beweis Die Wahl eines Isomorphismus $N \cong \mathbb{Z}^n$ liefert Isomorphismen

$$M \cong \mathbb{Z}^n, \quad \mathbb{T} \cong \mathbb{C}^{*n}, \quad \text{BT} \cong (\mathbb{P}_{\infty})^n, \quad A^2 \cong M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}.$$

Die Algebra $H^{\bullet}(\text{BT})$ wird von $H^2(\text{BT})$ erzeugt, die Algebra A^{\bullet} von A^2 . Für $n = 1$ ist die Behauptung unmittelbar zu sehen: Dem Erzeugenden $1 \in M = \mathbb{Z}$ wird die komplexe Gerade \mathbb{C} versehen mit der skalaren Multiplikation zugeordnet, wodurch diese eine \mathbb{C}^* -Varietät wird. Zum Geradenbündel $\mathbb{C} \rightarrow \text{pt}$ gehört das Geradenbündel $\mathbb{C}_{\mathbb{T}} \rightarrow \text{pt}_{\mathbb{T}} = \text{BT}$. Dies ist das tautologische Bündel $\mathcal{L} = \varinjlim \mathcal{L}_j$ auf \mathbb{P}_{∞} , das aus den tautologischen Bündeln \mathcal{L}_j auf \mathbb{P}_j entsteht. Damit ist die gesuchte explizite Abbildung $A^2 \rightarrow H^2(\text{BT})$ mit Hilfe der ersten Chernklasse durch die lineare Fortsetzung von $1 \mapsto \mathcal{L} \mapsto c_1(\mathcal{L})$ gegeben. — Für allgemeines n ist

$$H^{\bullet}(\text{BT}) \cong (H^{\bullet}(\mathbb{P}_{\infty}))^{\otimes n} \quad \text{und} \quad A^{\bullet} \cong (\mathbb{R}[T])^{\otimes n}$$

nach der Künnethformel (12.7.1), woraus die Behauptung folgt.

Will man allerdings die Behauptung „kanonisch“ augenfälliger machen, so empfiehlt sich der weniger anschauliche Weg, für festen Charakter $\chi \in M$ eine \mathbb{T} -Varietät \mathbb{C}_{χ} als die komplexe Gerade \mathbb{C} mit der \mathbb{T} -Wirkung

$$\mathbb{T} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad (t, z) \mapsto \chi(t)z$$

zu definieren. Die erste Chernklasse $c_1(\mathcal{L}_{\chi})$ des Geradenbündels $\mathcal{L}_{\chi} := (\mathbb{C}_{\chi})_{\mathbb{T}}$ über BT ist dann das Bild von $\chi \otimes 1$ in $H^{\bullet}(\text{BT})$. ■

21.4 Beispiele 1) Für $X = \mathbb{T}$ ist $\mathbb{T}_{\mathbb{T}} = \text{E}\mathbb{T}$ zusammenziehbar, und daher gilt

$$H_{\mathbb{T}}^{\bullet}(\mathbb{T}; \mathbb{R}) = H^{\bullet}(\text{E}\mathbb{T}; \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{\bullet},$$

wobei \mathbb{R}^{\bullet} der graduierte Vektorraum ist, der nur im Grad 0 von Null verschieden und dort \mathbb{R} ist. Damit übernimmt $X = \mathbb{T}$ in der äquivarianten Theorie sozusagen die Rolle des Punktes in der üblichen Kohomologie.

2) Es sei X ein einpunktiger Raum pt , dann ist $\text{pt}_{\mathbb{T}} = \text{B}\mathbb{T}$ und

$$H_{\mathbb{T}}^{\bullet}(\text{pt}) = H^{\bullet}(\text{B}\mathbb{T}) = \mathbb{R}[T_1, \dots, T_n] \cong A^{\bullet}$$

mit dem cup-Produkt ein Isomorphismus graduierter \mathbb{R} -Algebren, wobei die Unbestimmten T_i vom Grad 2 sind. Insbesondere hat $H_{\mathbb{T}}^{\bullet}(\text{pt})$ in unendlich vielen Graden nicht verschwindende Terme. ■

3) Wirkt \mathbb{T} trivial auf X , so ist $X_{\mathbb{T}} \cong \text{B}\mathbb{T} \times X$, und die Künnethformel (13.2.1) liefert

$$H_{\mathbb{T}}^{\bullet}(X) \cong A^{\bullet} \otimes_{\mathbb{R}} H^{\bullet}(X).$$

4) Für $n = 1$ ist $\mathbb{T} = \mathbb{C}^*$ und $A^{\bullet} = \mathbb{R}[T_1]$ mit einer Unbestimmten vom Grad 2. Mit der skalaren Multiplikation ist das Geradenbündel $\mathbb{C}_{\mathbb{T}}$ über \mathbb{P}_{∞} zur Basis homotop, also gilt

$$H_{\mathbb{T}}^{\bullet}(\mathbb{C}) \cong H^{\bullet}(\mathbb{P}_{\infty}) \cong \mathbb{R}[T_1].$$

5) Mit einer Zerlegung $(\mathbb{P}_1)_{\mathbb{T}} = X_1 \cup X_2$ für $X_i \cong \mathbb{C}_{\mathbb{T}}$ und $X_1 \cap X_2 = \text{E}\mathbb{T}$ liefert die exakte Mayer-Vietoris-Sequenz eine Struktur als $A^{\bullet} = \mathbb{R}[T_1]$ -Modul

$$H_{\mathbb{T}}^{\bullet}(\mathbb{P}_1) \cong \mathbb{R} \oplus H^{\geq 2}(X_1) \oplus H^{\geq 2}(X_2) \cong \mathbb{R}[T_1, T_3]/(T_1 T_3) \cong A^{\bullet} \oplus T_3 A^{\bullet}.$$

Aufgabe 21.1 Man berechne die äquivarianten Kohomologievektorräume für die torischen Varietäten

$$\mathbb{C}^2, \mathbb{C} \times \mathbb{P}_1, \mathbb{P}_1^2, \mathbb{P}_1^2 \setminus \{(0, 0)\} \text{ und } \mathbb{P}_1^2 \setminus \{(0, 0), (\infty, \infty)\}.$$

Wie sieht die jeweilige Struktur als $H_{\mathbb{T}}^{\bullet}(\text{B}\mathbb{T})$ -Modul aus?

21.5 Bemerkung Die Abbildung $X_{\mathbb{T}} \rightarrow \text{B}\mathbb{T}$ macht $H_{\mathbb{T}}^{\bullet}(X) = H^{\bullet}(X_{\mathbb{T}})$ auf kanonische Weise zu einem Modul über $A^{\bullet} = H^{\bullet}(\text{B}\mathbb{T})$. ■

Im folgenden sei $X = X_{\Delta}$ für einen Fächer $\Delta \subset V \cong \mathbb{R}^n$. Es seien weiter $\sigma \subset V$ ein d -dimensionaler N -Kegel und \mathbb{T}_{σ} die Isotropiegruppe der abgeschlossenen Bahn $\mathbb{B}_{\sigma} \hookrightarrow X_{\sigma}$. Wir wählen einen komplementären Torus \mathbb{T}' mit $\mathbb{T} = \mathbb{T}_{\sigma} \times \mathbb{T}'$, so daß wir gemäß (3.19.1) eine äquivariante Produktzerlegung $X_{\sigma} = Z_{\sigma} \times \mathbb{T}'$ erhalten, wobei Z_{σ} bezüglich $V_{\sigma} = \text{lin } \sigma$ gebildet wird.

21.6 Lemma *Es gibt eine kanonische Identifikation (graduierter) reeller Algebren*

$$H_{\mathbb{T}}^{\bullet}(X_{\sigma}) = H_{\mathbb{T}_{\sigma}}^{\bullet}(Z_{\sigma}) = S^{\bullet}(V_{\sigma}^*).$$

Beweis Der Produktzerlegung von \mathbb{T} entsprechen Zerlegungen der Bündel

$$E\mathbb{T} \cong E\mathbb{T}_\sigma \times E\mathbb{T}' \quad \text{und} \quad (X_\sigma)_\mathbb{T} \cong (Z_\sigma)_{\mathbb{T}_\sigma} \times E\mathbb{T}'$$

über $B\mathbb{T}$. Weil $E\mathbb{T}'$ zusammenziehbar ist, folgt für die Kohomologie

$$H_{\mathbb{T}}^\bullet(X_\sigma) = H^\bullet((X_\sigma)_\mathbb{T}) = H^\bullet((Z_\sigma)_{\mathbb{T}_\sigma} \times E\mathbb{T}') = H^\bullet((Z_\sigma)_{\mathbb{T}_\sigma}) = H_{\mathbb{T}_\sigma}^\bullet(Z_\sigma).$$

Jedes $v \in \sigma^\circ \cap N$ definiert eine \mathbb{T} -verträgliche Deformationsretraktion $Z_\sigma \simeq z_\sigma$ auf den Fixpunkt, und diese wiederum induziert eine Homotopie zwischen id_{Z_σ} und $Z_\sigma \rightarrow z_\sigma$ (vgl. 21.4 2))

$$(Z_\sigma)_{\mathbb{T}_\sigma} \simeq (z_\sigma)_{\mathbb{T}_\sigma} = B\mathbb{T}_\sigma.$$

Also erhält man

$$H_{\mathbb{T}_\sigma}^\bullet(Z_\sigma) \cong H^\bullet(B\mathbb{T}_\sigma) \cong S^\bullet(V_\sigma^*). \blacksquare$$

Wir definieren nun allgemein für $\sigma \in \Delta$ die Polynomialgebra³¹⁾

$$A_\sigma^\bullet := S^\bullet(V_\sigma^*),$$

die wir auch als Algebra von Funktionen auf der Teilmenge σ von V_σ auffassen. Er-sichtlich ist $A_\sigma^\bullet = A^\bullet$ für $\sigma \in \Delta^n$. Wir erhalten mit 21.6 zur offenen Überdeckung $(X_\sigma)_{\sigma \in \Delta^{\max}}$ von X_Δ einen kanonischen Homomorphismus

$$(21.6.1) \quad \begin{array}{ccc} H_{\mathbb{T}}^\bullet(X_\Delta) & \rightarrow & \bigoplus_{\sigma \in \Delta^{\max}} H_{\mathbb{T}}^\bullet(X_\sigma) \\ & & \downarrow \cong \\ A^\bullet(\Delta) & \subset & \bigoplus_{\sigma \in \Delta^{\max}} A_\sigma^\bullet, \end{array}$$

wobei wir folgende Bezeichnung verwenden:

21.7 Definition Für einen Fächer Δ bezeichne

$$A^\bullet(\Delta) := \{f: |\Delta| \rightarrow \mathbb{R}; \forall \sigma \in \Delta \exists f_\sigma \in A_\sigma^\bullet \text{ mit } f|_\sigma = f_\sigma|_\sigma\}$$

die Algebra der „ Δ -stückweise polynomialen Funktionen“ auf Δ .

Wir verwenden auch die Abkürzung $\mathcal{A}^\bullet(\sigma)$ für $\mathcal{A}^\bullet(\mathfrak{S}(\sigma)) = A_\sigma^\bullet$. Mit den kanoni-schen Einschränkungen ist die Prägarbe

$$\Lambda \mapsto \mathcal{A}^\bullet(\Lambda) \quad \text{für} \quad \Lambda \prec \Delta$$

eine Garbe auf dem Fächerraum Δ .

³¹⁾ Der aufmerksame Leser wird A_σ^\bullet nicht mit der affinen Algebra $S_\sigma = \mathbb{C}[S_\sigma]$ verwechseln.

Wir wollen (21.6.1) zu einem kommutativen Diagramm ergänzen. Dazu betrachten wir die Prägarbe

$$(21.6.2) \quad H_{\mathbb{T}}^{\bullet}: \Lambda \mapsto H_{\mathbb{T}}^{\bullet}(X_{\Lambda})$$

Für ihre Halme in den $\sigma \in \Delta$ existieren nach 21.6 einschränkungsverträgliche graduierte Homomorphismen

$$(H_{\mathbb{T}}^{\bullet})_{\sigma} \rightarrow \mathcal{A}_{\sigma}^{\bullet}.$$

Damit liefert (21.6.1) einen Prägarbenhomomorphismus $H_{\mathbb{T}}^{\bullet} \rightarrow \mathcal{A}^{\bullet}$, und \mathcal{A}^{\bullet} ist die assoziierte Garbe $\mathcal{H}_{\mathbb{T}}^{\bullet}$ zur Prägarbe $H_{\mathbb{T}}^{\bullet}$; weiterhin ergänzt sich (21.6.1) kanonisch zu einem kommutativen Diagramm.

21.8 Satz *Für simpliziale Fächer Δ ist der induzierte Homomorphismus*

$$H_{\mathbb{T}}^{\bullet}(X_{\Delta}) \rightarrow \mathcal{A}^{\bullet}(\Delta)$$

ein Isomorphismus von \mathcal{A}^{\bullet} -Algebren. Insbesondere verschwindet $H_{\mathbb{T}}^{\text{odd}}(X_{\Delta})$.

Beweis Der Fall eines affinen Fächers $\mathfrak{S}(\sigma)$ wurde bereits im Lemma 21.6 behandelt. Für eine Induktion über die Anzahl der Kegel in Δ sei $\sigma \in \Delta^{\text{max}}$; ferner bezeichne $\Delta_0 := \Delta \setminus \{\sigma\}$. Auf die Zerlegung $X_{\Delta} = X_{\Delta_0} \cup X_{\sigma}$ mit $\partial_0\sigma := \Delta_0 \cap \mathfrak{S}(\sigma)$ lassen sich exakte Mayer-Vietoris-Sequenzen anwenden:

$$\begin{array}{ccccccc} H_{\mathbb{T}}^{2q-1}(X_{\partial_0\sigma}) & \rightarrow & H_{\mathbb{T}}^{2q}(X_{\Delta}) & \rightarrow & H_{\mathbb{T}}^{2q}(X_{\Delta_0}) & \oplus & H_{\mathbb{T}}^{2q}(X_{\sigma}) & \xrightarrow{\psi} & H_{\mathbb{T}}^{2q}(X_{\partial_0\sigma}) & \rightarrow & H_{\mathbb{T}}^{2q+1}(X_{\Delta}) \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \\ 0 & \rightarrow & \mathcal{A}^{2q}(\Delta) & \rightarrow & \mathcal{A}^{2q}(\Delta_0) & \oplus & \mathcal{A}^{2q}(\mathfrak{S}(\sigma)) & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{A}^{2q}(\partial_0\sigma) & \rightarrow & \end{array}$$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt $H_{\mathbb{T}}^{2q-1}(X_{\partial_0\sigma}) = 0$. Wenn φ surjektiv ist, dann gilt das auch für ψ , so daß das zu untersuchende α nach dem Fünferlemma ein Isomorphismus ist. Ferner verschwindet $H_{\mathbb{T}}^{2q+1}(X_{\Delta})$, weil der in der oberen Sequenz des Diagrammes folgende Term nach Induktionsvoraussetzung verschwindet. Damit folgt die Behauptung leicht aus Lemma 21.9. ■

Für einen *simplizialen* Fächer Δ ist damit die Prägarbe $H_{\mathbb{T}}^{\bullet}: \Lambda \mapsto H_{\mathbb{T}}^{\bullet}(X_{\Lambda})$ eine *Garbe* auf dem Fächerraum Δ . Insbesondere ist dann der Homomorphismus (21.6.1) injektiv.

21.9 Lemma *Ist σ simplizial, so ist die Einschränkung $\mathcal{A}^{\bullet}(\mathfrak{S}(\sigma)) \rightarrow \mathcal{A}^{\bullet}(\partial\sigma)$ surjektiv.*

Beweis Wir führen für einen induktiven Beweis exemplarisch den Fall $n = 3$ aus; ohne Einschränkung sei $\sigma = \text{keg}(e_1, e_2, e_3)$ im \mathbb{R}^3 mit Variablen T_1, T_2, T_3 . Ein gegebenes F aus $\mathcal{A}^{\bullet}(\partial\sigma)$ sei ohne Einschränkung homogen; es ist durch homogene $f(T_1, T_2)$, $g(T_2, T_3)$ und $h(T_3, T_1)$ beschreibbar mit der Kompatibilitätsbedingung

$$f(0, T_2) = g(T_2, 0), \quad g(0, T_3) = h(T_3, 0), \quad h(0, T_1) = f(T_1, 0).$$

Die homogene Funktion

$$r_f(T_1, T_2) := f(T_1, T_2) - f(T_1, 0) - f(0, T_2)$$

verschwindet auf den Koordinatenebenen $\sigma \cap \{T_1 = 0\}$ und $\sigma \cap \{T_2 = 0\}$. Mit

$$H(T_1, T_2, T_3) := f(T_1, 0) + g(T_2, 0) + h(T_3, 0) + r_f + r_g + r_h$$

erhalten wir das gesuchte Urbild von F . — Für einen allgemeinen Beweis sei auf 24.12 verwiesen. ■

Der Beweis von 21.8 läßt eine rekursive Konstruktion weiterer Beispiele zu:

21.10 Korollar *Der Fächer Δ_0 entstehe aus Δ durch Herausnahme eines Kegels σ , für den $\sigma \cap |\Delta_0|$ eine echte Seite von σ ist. Gilt $H_{\mathbb{T}}^{\bullet}(X_{\Delta_0}) \cong \mathcal{A}^{\bullet}(\Delta_0)$, so gilt auch $H_{\mathbb{T}}^{\bullet}(X_{\Delta}) \cong \mathcal{A}^{\bullet}(\Delta)$.*

Beweis Man imitiert den Beweis von 21.8. Wieder ist im Mayer-Vietoris-Diagramm nur zu zeigen, daß φ surjektiv ist. Evident ist nun bereits der Einschränkungshomomorphismus $\mathcal{A}^{\bullet}(\sigma) \rightarrow \mathcal{A}^{\bullet}(\sigma \cap |\Delta_0|)$ surjektiv. ■

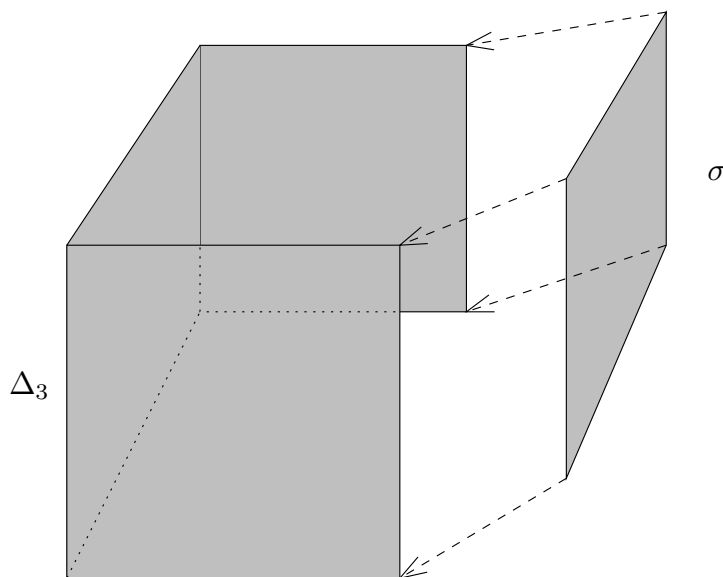
Auf diese Weise läßt sich auch ein dreidimensionales Beispiel angeben, in dem

$$H_{\mathbb{T}}^3(X_{\Delta}) = \mathbb{R}$$

und damit der Homomorphismus $H_{\mathbb{T}}^{\bullet}(X_{\Delta}) \rightarrow \mathcal{A}^{\bullet}(\Delta)$ kein Isomorphismus ist:

21.11 Beispiel Es bezeichne Δ_3 den von drei vertikalen Seiten des Würfels $[-1, 1]^3$ im \mathbb{R}^3 erzeugten Fächer und σ den von der vierten Seite erzeugten Kegel. Rekursiv läßt sich Δ_3 mit 21.10 behandeln, $\Delta := \Delta_3 \cup \mathfrak{S}(\sigma)$ jedoch nicht. Der Morphismus

$$\mathcal{A}^2(\Delta_3) \oplus \mathcal{A}^2(\sigma) \rightarrow \mathcal{A}^2(|\Delta_3| \cap \sigma)$$



FIGUR 21.1 Beispiel für $H_{\mathbb{T}}^{\bullet}(X_{\Delta}) \neq \mathcal{A}^{\bullet}(\Delta)$.

hat einen eindimensionalen Kokern: Das Bild des Einschränkungshomomorphismus $\mathcal{A}^2(\sigma) \rightarrow \mathcal{A}^2(\sigma \cap |\Delta_3|)$ besteht aus allen stückweise linearen Funktionen, für welche die Wertedifferenz auf den beiden rechten oberen Ecken des Würfels mit der auf den beiden rechten unteren Ecken übereinstimmt. Analog läßt sich für die Einschränkung $\mathcal{A}^2(\Delta_3) \rightarrow \mathcal{A}^2(\sigma \cap |\Delta_3|)$ argumentieren, woraus die Behauptung folgt. Weil 21.10 auf Δ_3 anwendbar ist, liefert das für Δ aufgestellte kommutative Diagramm wie im Beweis von 21.8 schließlich $H_{\mathbb{T}}^3(X_{\Delta}) = \mathbb{R}$. ■

Aufgabe 21.2 Für einen beliebigen Fächer Δ zeige man:

- i) $H_{\mathbb{T}}^1(X_{\Delta}) = 0$.
- ii) $H_{\mathbb{T}}^2(X_{\Delta}) = \mathcal{A}^2(\Delta)$.

Aufgabe 21.3 Man zeige, daß ein Fächermorphismus $\varphi: (\Delta', N') \rightarrow (\Delta, N)$ kanonisch folgendes kommutative Diagramm induziert:

$$\begin{array}{ccc} H_{\mathbb{T}}^{\bullet}(X_{\Delta}) & \rightarrow & H_{\mathbb{T}}^{\bullet}(X_{\Delta'}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{A}^{\bullet}(\Delta) & \rightarrow & \mathcal{A}^{\bullet}(\Delta') \end{array} .$$

Aufgabe 21.4 Der torische Morphismus $f: X' \rightarrow X$ zwischen simplizialen torischen Varietäten besitze die Kurvenüberdeckungseigenschaft. Man zeige, daß der induzierte Homomorphismus $f^{\bullet}: H_{\mathbb{T}}^{\bullet}(X) \rightarrow H_{\mathbb{T}}^{\bullet}(X')$ injektiv ist.

Den Satz von Jurkiewicz-Danilov kann man so interpretieren, daß für vollständige simpliziale Fächer ein enger formaler Zusammenhang zwischen äquivarianter und gewöhnlicher Kohomologie besteht. Dies gilt jedoch auch in anderen Fällen. Wir wollen dies in 21.14 in einen allgemeineren Zusammenhang stellen, wofür wir das maximale Ideal

$$\mathfrak{m}_{A^{\bullet}} := A^{>0} = \{p \in A^{\bullet}; p(0) = 0\}$$

von A^{\bullet} benötigen, das damit die Beziehung $A^{\bullet}/\mathfrak{m}_{A^{\bullet}} = \mathbb{R}^{\bullet}$ erfüllt.

Wir beschreiben dabei die Beziehung zwischen $H^{\bullet}(\mathbb{B}\mathbb{T})$, $H^{\bullet}(X)$ und $H_{\mathbb{T}}^{\bullet}(X)$ mit Hilfe eines „getwisteten Tensorproduktes“, das häufig einfacher als die sonst gerne benutzte Leray-Serre-Spektralsequenz ist. Dabei orientieren wir uns an der Darstellung in [AlPu, Example 2.5.4] mit reellen statt rationalen Koeffizienten und einer algebraischen Operation des algebraischen Torus $\mathbb{T} = (\mathbb{C}^*)^n$ statt einer $(S^1)^n$ -Wirkung: Für eine algebraische \mathbb{T} -Varietät X verwenden wir die differentielle graduierte reelle Algebra $A^{\bullet} = \mathbb{R}[T] = \mathbb{R}[T_1, \dots, T_n]$ mit trivialem Differential δ_T . Es sei (L^{\bullet}, δ_L) eine weitere graduiert-kommutative (i.e., $\ell_i \cdot \ell_j = (-1)^{ij} \ell_j \cdot \ell_i$) differentielle graduierte Algebra mit Differential vom Grad 1. Dann heißt ein um ein A^{\bullet} -lineares Differential $\tilde{\delta}$ vom Grad 1 ergänztes Tensorprodukt von Algebren

$$(A^{\bullet} \otimes_{\mathbb{R}} L^{\bullet}, \tilde{\delta}) =: A^{\bullet} \tilde{\otimes}_{\mathbb{R}} L^{\bullet}$$

ein *getwistetes Tensorprodukt* von A^{\bullet} und L^{\bullet} , wenn die von der kanonischen Projektion $A^{\bullet} \rightarrow A^{\bullet}/\mathfrak{m}_{A^{\bullet}} \cong \mathbb{R}$ induzierte lineare Abbildung

$$\beta: A^{\bullet} \otimes_{\mathbb{R}} L^{\bullet} \rightarrow \mathbb{R}^{\bullet} \otimes_{\mathbb{R}} L^{\bullet} \cong L^{\bullet}$$

ein Homomorphismus differentieller graduerter Algebren ist. Damit ist $\tilde{\delta}$ durch die Werte auf $1 \otimes L^\bullet$ bestimmt; für $\ell \in L^\bullet$ ist somit

$$(21.12.0) \quad \tilde{\delta}(1 \otimes \ell) = 1 \otimes \ell + \sum_j a_j \otimes \ell_j \quad \text{mit} \quad a_j \in \mathfrak{m}_{A^\bullet}$$

eine Deformation von $1 \otimes \delta_L(\ell)$.

Wir benutzen zunächst als differentielle graduierte Algebra L^\bullet „das“ Sullivansche *minimale Modell* $\mathcal{M}(X)$ zu X , das wegen des Wegzusammenhanges von X existiert und bis auf Isomorphie eindeutig ist (vgl. [AlPu, 2.2.6]), aber nicht funktoriell von X abhängt. Zu ihm gehört ein Isomorphismus von Algebren

$$(21.12.1) \quad H(\mathcal{M}(X)) \cong H^\bullet(X).$$

Nun läßt sich aber $\mathcal{M}(X)$ durch die ersichtlich einfachere differentielle graduierte Kohomologiealgebra $H^\bullet(X)$ mit trivialem Differential ersetzen: Es existiert ein (bis auf Kettenhomotopie) kommutatives Diagramm differentieller graduerter A^\bullet -Moduln (vgl. [AlPu, 2.5.1, insbesondere 2.5.4, sowie B.2.4])

$$(21.12.2) \quad \begin{array}{ccccc} A^\bullet & \rightarrow & A^\bullet \tilde{\otimes}_{\mathbb{R}} H^\bullet(X) & \xrightarrow{\beta} & H^\bullet(X) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A^\bullet & \rightarrow & A^\bullet \tilde{\otimes}_{\mathbb{R}} \mathcal{M}(X) & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{M}(X) \end{array}$$

mit Quasi-Isomorphismen in den Vertikalen. Die Homomorphismen α und β werden von der kanonischen Projektion $\mathbb{R}[T] \rightarrow \mathbb{R}[T]/(T) \cong \mathbb{R}^\bullet$ induziert. Im Lichte von Punkt 1) des folgenden Lemmas wird der Homomorphismus β durch die Inklusion einer Faser $X \hookrightarrow X_{\mathbb{T}}$ induziert; wegen des Wegzusammenhanges von $B\mathbb{T}$ sind je zwei Faserinklusionen homotop, so daß die induzierte Kohomologieabbildung von der Faserwahl unabhängig ist. Durch die Bedingung $\delta_{H^\bullet(X)} = 0$ ist im übrigen das getwistete Tensorprodukt $A^\bullet \tilde{\otimes}_{\mathbb{R}} H^\bullet(X)$ bis auf Isomorphie graduerter differentieller A^\bullet -Moduln eindeutig, vgl. [AlPu, Aufgabe B.7 auf Seite 455].

21.12 Lemma 1) *Es gibt einen Isomorphismus graduerter A^\bullet -Moduln*

$$H_{\mathbb{T}}^\bullet(X) \cong H^\bullet(X_{\mathbb{T}}) \cong H(A^\bullet \tilde{\otimes}_{\mathbb{R}} H^\bullet(X)).$$

2) *Das Differential $\tilde{\delta} = \tilde{\delta}_X$ auf $A^\bullet \tilde{\otimes}_{\mathbb{R}} H^\bullet(X)$ erfüllt*

$$\tilde{\delta}(A^\bullet \tilde{\otimes}_{\mathbb{R}} H^\bullet(X)) \subset \mathfrak{m}_{A^\bullet} \tilde{\otimes}_{\mathbb{R}} H^\bullet(X).$$

3) *Operiert \mathbb{T} trivial auf X , so ist $\tilde{\delta} = 0$.*

Beweis 1) folgt aus Diagramm (21.12.2), denn die Homologie von $A^\bullet \tilde{\otimes}_{\mathbb{R}} \mathcal{M}(X)$ ist als A^\bullet -Modul isomorph zu der von $\mathcal{M}(X_{\mathbb{T}})$, vgl. [AlPu, 2.5.4].

2) Für $1 \otimes \ell \in A^\bullet \otimes H^\bullet(X)$ verschwindet $\tilde{\delta}_0(1 \otimes \ell) = 1 \otimes \delta_{H^\bullet(X)}(\ell)$ in der Darstellung (21.12.0), also liegt $\tilde{\delta}(1 \otimes \ell)$ in $\mathfrak{m}_{A^\bullet} \tilde{\otimes}_{\mathbb{R}} H^\bullet(X)$.

Aussage 3) folgt aus 1) und 21.4 3), da der Korandoperator eines Komplexes offenbar genau dann trivial ist, wenn der Komplex mit seiner Homologie übereinstimmt. ■

Das Differential $\tilde{\delta}_X$ kann aber auch für nichttriviale \mathbb{T} -Wirkungen verschwinden. Das folgende Resultat präsentiert äquivalente Charakterisierungen dieses Falles:

21.13 Lemma *Für eine algebraische Varietät X mit einer algebraischen \mathbb{T} -Wirkung und Fixpunktvarietät $X^\mathbb{T}$ sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:*

- 1) *Bettizahlbedingung: $\sum_j b^j(X) = \sum_j b^j(X^\mathbb{T})$.*
- 2) *Auf $A^\bullet \tilde{\otimes}_{\mathbb{R}} H^\bullet(X)$ ist $\tilde{\delta} = 0$.*
- 3) *Künnethformel: Es gibt einen Isomorphismus von A^\bullet -Moduln*

$$H_{\mathbb{T}}^\bullet(X) \cong H^\bullet(B\mathbb{T}) \otimes_{\mathbb{R}} H^\bullet(X) \cong A^\bullet \otimes_{\mathbb{R}} H^\bullet(X).$$

- 4) *Reduktionsbedingung: Eine (und damit jede) Faserinklusion $X \hookrightarrow X_{\mathbb{T}}$ induziert einen surjektiven (und damit bijektiven) Homomorphismus von \mathbb{R}^\bullet -Algebren*

$$H_{\mathbb{T}}^\bullet(X) / \mathfrak{m}_{A^\bullet} H_{\mathbb{T}}^\bullet(X) \cong H^\bullet(X).$$

- 5) *Freiheitsbedingung: Der A^\bullet -Modul $H_{\mathbb{T}}^\bullet(X)$ ist frei.³²⁾*

Beweis Für das multiplikative System $S := A^\bullet \setminus 0$ existiert nach dem Lokalisierungssatz der äquivarianten Kohomologie (vgl. [AlPu, (3.1.6)]) ein Isomorphismus von $S^{-1}A^\bullet$ -Vektorräumen

$$(21.13.1) \quad S^{-1}H_{\mathbb{T}}^\bullet(X) \cong S^{-1}H_{\mathbb{T}}^\bullet(X^\mathbb{T}).$$

Weil die Lokalisierung nach S ein exakter Funktor ist, läßt sich dieser Isomorphismus gemäß 21.12 1) in der Form

$$(21.13.1) \quad H\left(S^{-1}(A^\bullet \tilde{\otimes}_{\mathbb{R}} H^\bullet(X))\right) \cong H\left(S^{-1}(A^\bullet \tilde{\otimes}_{\mathbb{R}} H^\bullet(X^\mathbb{T}))\right)$$

schreiben. Da \mathbb{T} auf $X^\mathbb{T}$ trivial operiert, ist $\tilde{\delta}_{X^\mathbb{T}} = 0$, vgl. 21.12 3); also folgt weiter

$$(21.13.2) \quad H\left(S^{-1}(A^\bullet \tilde{\otimes}_{\mathbb{R}} H^\bullet(X^\mathbb{T}))\right) = S^{-1}(A^\bullet \otimes_{\mathbb{R}} H^\bullet(X^\mathbb{T})) = (S^{-1}A^\bullet) \otimes_{\mathbb{R}} H^\bullet(X^\mathbb{T}).$$

„2) \Rightarrow 1)“ Aus $\tilde{\delta}_X = 0$ ergibt sich analog

$$H\left(S^{-1}(A^\bullet \tilde{\otimes}_{\mathbb{R}} H^\bullet(X))\right) \cong (S^{-1}A^\bullet) \otimes_{\mathbb{R}} H^\bullet(X)$$

³²⁾ D.h. $H_{\mathbb{T}}^\bullet(X)$ ist als A^\bullet -Modul von der Form $\bigoplus_{i,j} (A^\bullet[i])^j$.

und daher mit (21.13.1) über dem Körper $K^\bullet := S^{-1}A^\bullet$ ein Isomorphismus von Vektorräumen $K^\bullet \otimes_{\mathbb{R}} H^\bullet(X) \cong K^\bullet \otimes_{\mathbb{R}} H^\bullet(X^{\mathbb{T}})$. Mit $\dim_{\mathbb{R}} H^\bullet(X) = \dim_{K^\bullet} K^\bullet \otimes_{\mathbb{R}} H^\bullet(X)$ etc. resultiert daraus die Behauptung.

„1) \Rightarrow 2)“ Für den endlich erzeugten freien A^\bullet -Modul $A^\bullet \tilde{\otimes}_{\mathbb{R}} H^\bullet(X)$ ist offensichtlich das Verschwinden von $\tilde{\delta}_X$ äquivalent zu dem von $S^{-1}\tilde{\delta}_X$. Damit genügt es, die Gleichung

$$\dim_{K^\bullet} H^\bullet(K^\bullet \tilde{\otimes}_{\mathbb{R}} H^\bullet(X)) = \dim_{K^\bullet} K^\bullet \tilde{\otimes}_{\mathbb{R}} H^\bullet(X)$$

zu zeigen. Aus (21.13.1) folgt:

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{R}} H^\bullet(X) &= \dim_{K^\bullet} K^\bullet \tilde{\otimes}_{\mathbb{R}} H^\bullet(X) \geq \dim_{K^\bullet} H^\bullet(K^\bullet \tilde{\otimes}_{\mathbb{R}} H^\bullet(X)) \\ &= \dim_{K^\bullet} H^\bullet(K^\bullet \tilde{\otimes}_{\mathbb{R}} H^\bullet(X^{\mathbb{T}})) = \dim_{K^\bullet} K^\bullet \tilde{\otimes}_{\mathbb{R}} H^\bullet(X^{\mathbb{T}}) = \dim_{\mathbb{R}} H^\bullet(X^{\mathbb{T}}). \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung stimmen die beiden äußeren Terme dieser Abschätzung und damit alle überein.

Die Inklusion „2) \Rightarrow 3)“ folgt unmittelbar aus Lemma 21.12.

Für „3) \Rightarrow 4)“ tensoriert man die Künnethformel mit $(A^\bullet/\mathfrak{m}_{A^\bullet})$ über A^\bullet und erhält

$$\begin{aligned} H_{\mathbb{T}}^\bullet(X) / \mathfrak{m}_{A^\bullet} H_{\mathbb{T}}^\bullet(X) &\cong (A^\bullet/\mathfrak{m}_{A^\bullet}) \otimes_{A^\bullet} H_{\mathbb{T}}^\bullet(X) \cong (A^\bullet/\mathfrak{m}_{A^\bullet}) \otimes_{A^\bullet} (A^\bullet \otimes_{\mathbb{R}} H^\bullet(X)) \\ &\cong \mathbb{R}^\bullet \otimes_{\mathbb{R}} H^\bullet(X) \cong H^\bullet(X) \end{aligned}$$

für die Struktur als A^\bullet -Modul. Es bleibt zu zeigen, daß vermöge der cup-Produkte ein Isomorphismus von \mathbb{R} -Algebren vorliegt. Dies folgt daraus, daß das Diagramm (21.12.2) aus A^\bullet -Algebrahomomorphismen besteht und bei der Operation von A^\bullet auf $H^\bullet(X)$ das Ideal \mathfrak{m}_{A^\bullet} nach Konstruktion von α trivial operiert, so daß sich eine Operation von $A^\bullet/\mathfrak{m}_{A^\bullet} \cong \mathbb{R}^\bullet$ ergibt.

„4) \Rightarrow 2)“ Ist $\tilde{\delta}$ nicht die Nullabbildung, so gibt es ein Element $1 \otimes h \in A^\bullet \tilde{\otimes}_{\mathbb{R}} H^\bullet(X)$ mit homogenem h und $\tilde{\delta}(1 \otimes h) \neq 0$; zusätzlich sei h von minimalem Grad. In den Bezeichnungen von (21.12.2) gilt $\beta(1 \otimes h) = h$. Nun ist nach Voraussetzung die kanonische Abbildung $H(\beta): H_{\mathbb{T}}^\bullet(X) \rightarrow H^\bullet(X)$ surjektiv, also existiert sogar ein β -Urbild von h , das durch einen $\tilde{\delta}$ -Kozyklus repräsentiert wird; dieser läßt sich in der Form $1 \otimes h + \sum_j a_j \otimes h_j$ aus $A^\bullet \tilde{\otimes}_{\mathbb{R}} H^\bullet(X)$ mit homogenen $a_j \in \mathfrak{m}_{A^\bullet}$ und $h_j \in H^\bullet(X)$ schreiben. Damit haben die h_j einen kleineren Grad als h , also ist $\tilde{\delta}(a_j \otimes h_j) = (a_j \otimes 1)\tilde{\delta}(1 \otimes h_j) = 0$ und somit bereits $1 \otimes h$ ein $\tilde{\delta}$ -Kozyklus!

Die Beziehung „3) \Rightarrow 5)“ ist evident. Für „5) \Rightarrow 2)“ verifizieren wir durch Induktion über $i^{33)} \tilde{\delta}|_{(A^\bullet \otimes_{\tau_{\leq i}} H^\bullet(X))} = 0$. Dies folgt für $i = 0$ aus

$$H_{\mathbb{T}}^0(X) \cong \mathbb{R} \cong A^0 \otimes_{\mathbb{R}} H^0(X).$$

Es sei nun h_1, \dots, h_r eine homogene Basis des reellen Vektorraumes $\tau_{\leq i-1} H^\bullet(X)$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $\tilde{\delta}(1 \otimes h_j) = 0$ für $j = 1, \dots, r$. Wegen der A^\bullet -Linearität

³³⁾ Wir verwenden den „Trunkierungs“-Operator $\tau_{\leq j}(L^\bullet) := L^{\leq j}$

von $\tilde{\delta}$ reicht es, $\tilde{\delta}(1 \otimes h) = 0$ für beliebiges $h \in H^i(X)$ nachzuweisen. Gemäß 21.12 2) existiert eine Darstellung

$$\tilde{\delta}(1 \otimes h) = \sum_{j=1}^r a_j \otimes h_j, \quad a_j \in \mathfrak{m}_{A^\bullet} .$$

Bezeichnen wir mit $\overline{1 \otimes h_1}, \dots, \overline{1 \otimes h_r}$ die Klassen in $\text{Ker}(\tilde{\delta})/\text{Im}(\tilde{\delta}) \cong H_{\mathbb{T}}^\bullet(X)$, so folgt $0 = \sum_{j=1}^r a_j \overline{1 \otimes h_j}$. Für $\tilde{\delta}(1 \otimes h) = 0$ ist daraus $a_j = 0, j = 1, \dots, r$ abzuleiten. Dies ist erfüllt, wenn das System $\overline{1 \otimes h_1}, \dots, \overline{1 \otimes h_r}$ über A^\bullet linear unabhängig ist. Um letzteres zu verifizieren, ergänzen wir $\overline{1 \otimes h_1}, \dots, \overline{1 \otimes h_r}$ durch Elemente $\overline{f_1}, \dots, \overline{f_s}$ zu einem Erzeugendensystem von $\text{Ker}(\tilde{\delta})/\text{Im}(\tilde{\delta}) = H_{\mathbb{T}}^\bullet(X)$ über A^\bullet , wobei die $f_j \in \text{Ker}(\tilde{\delta})$ homogen vom Grad $\geq i$ seien. Wählt man aus diesem Erzeugendensystem ein minimales aus, so darf aus Gradgründen keines der Elemente $\overline{1 \otimes h_j}$ weggelassen werden. Da $H_{\mathbb{T}}^\bullet(X)$ ein freier A^\bullet -Modul ist, muß das minimale homogene Erzeugendensystem eine Basis sein; insbesondere ist die gesuchte lineare Unabhängigkeit gezeigt. ■

Für torische Varietäten ergibt sich damit folgendes Korollar:

21.14 Theorem *Für eine torische Varietät $X = X_\Delta$ sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:*

- 1) *Fixpunktbedingung: Die Zahl $f_n(\Delta)$ der n -Kegel von Δ (und damit die Zahl der Fixpunkte von X) ist $\sum_j b^j(X)$.*
- 2) *Verschwindungsbedingung: $H^{\text{odd}}(X) = 0$.*
- 3) *Künnethformel: Es gibt einen Isomorphismus von A^\bullet -Moduln*

$$H_{\mathbb{T}}^\bullet(X) \cong H^\bullet(\text{BT}) \otimes_{\mathbb{R}} H^\bullet(X) \cong A^\bullet \otimes_{\mathbb{R}} H^\bullet(X) .$$

- 4) *Reduktionsbedingung: Eine (und damit jede) Faserinklusion $X \hookrightarrow X_{\mathbb{T}}$ induziert einen surjektiven (und damit bijektiven) Homomorphismus von graduierten \mathbb{R}^\bullet -Algebren*

$$H_{\mathbb{T}}^\bullet(X) / \mathfrak{m}_{A^\bullet} H_{\mathbb{T}}^\bullet(X) \cong H^\bullet(X) .$$

- 5) *Freiheitsbedingung: Der A^\bullet -Modul $H_{\mathbb{T}}^\bullet(X)$ ist frei.*

Beweis Die Bedingungen von 21.14 sind, abgesehen zunächst von 2), zu den Bedingungen mit gleicher Nummer aus 21.13 äquivalent. Dies ist evident für die letzten drei Punkte; in 1) ist $f_n(\Delta) = e(X^{\mathbb{T}}) = b_0(X^{\mathbb{T}})$ nach 13.4, da die Fixpunkte isoliert liegen, so daß auch hier eine Äquivalenz vorliegt. Andererseits folgt aus Lemma 21.16:

$$\sum b_j(X) \geq \sum b_{2j}(X) - \sum b_{2j+1}(X) = e(X) = e(X^{\mathbb{T}}) = b_0(X^{\mathbb{T}}) .$$

Daher ist $H^{\text{odd}}(X) = 0$ äquivalent zu $\sum b_j(X) = b_0(X^{\mathbb{T}}) = f_n(\Delta)$, also sind 1) und 2) gleichwertig. ■

Damit können wir eine besonders interessante Klasse von Fächern bzw. torischen Varietäten einführen:

21.15 Definition Eine Varietät X_Δ sowie der zugehörige Fächer Δ heißen „äquivariant formal“, wenn eine der Bedingungen von 21.14 erfüllt ist.

21.16 Lemma Für eine algebraische Varietät mit einer algebraischen \mathbb{T} -Wirkung gilt

$$e(X) = e(X^\mathbb{T}).$$

Beweis Wir führen auf der reellen Kohomologie folgende \mathbb{Z}_2 -Graduierung ein:

$$H^\diamond(X) := H^{\text{even}}(X) \oplus H^{\text{odd}}(X).$$

Dazu gehört auf natürliche Weise eine Eulercharakteristik, nämlich $\dim H^{\text{even}}(X) - \dim H^{\text{odd}}(X)$. Dann ist ersichtlich $e(X) = e(H^\bullet(X)) = e(H^\diamond(X))$ bezüglich der Dimensionen reeller Vektorräume. In analogen Bezeichnungen ist nach Definition $A^\diamond = A^\bullet$, und somit existiert eine natürliche \mathbb{Z}_2 -Graduierung auf $A^\diamond \otimes H^\diamond(X)$. Für den exakten Funktor „Lokalisierung nach $S := A^\bullet \setminus \{0\}$ “ erhält man eine \mathbb{Z}_2 -Graduierung auf den Lokalisierungen. Weil die Eulercharakteristik eines endlich erzeugten Komplexes mit der von dessen Homologie übereinstimmt, können wir weiterschließen:

$$\begin{aligned} e_{\mathbb{R}}(H^\diamond(X)) &= e_{A^\diamond}(A^\diamond \otimes H^\diamond(X)) = e_{S^{-1}A^\diamond}(S^{-1}(A^\diamond \otimes H^\diamond(X))) \\ &= e_{S^{-1}A^\diamond}(H^\diamond(S^{-1}(A^\diamond \otimes H^\diamond(X)))) = e_{S^{-1}A^\diamond}(S^{-1}H^\diamond(A^\diamond \otimes H^\diamond(X))) \end{aligned}$$

Nach dem Lokalisierungssatz [ALPu, (3.1.6)] ändert sich der letzte Term nicht, wenn X durch $X^\mathbb{T}$ ersetzt wird, und für diesen Raum kann man natürlich die obigen Gleichungen rückwärts verfolgen, so daß die Behauptung folgt. ■

Aufgabe 21.5 Für ein gerades j und alle geraden $i \leq j$ gelte $H^{i-1}(X_\Delta) = 0$. Man zeige

$$H_{\mathbb{T}}^{\leq j}(X_\Delta) \cong \tau_{\leq j}(A^\bullet \otimes_{\mathbb{R}} H^\bullet(X_\Delta)).$$

Für $j = 2$ und nicht entartetes Δ ist die Voraussetzung stets erfüllt.

21.17 Bemerkung Der Modulisomorphismus aus 21.14 3) ist (bezüglich des cup-Produktes auf $H_{\mathbb{T}}^\bullet(X_\Delta)$) in der Regel Isomorphismus von A^\bullet -Algebren. Denn die Algebra $H_{\mathbb{T}}^\bullet(X_\Delta)$ ist für simpliziales Δ nach 21.8 eine Algebra von Funktionen und damit reduziert, während die Algebra $A^\bullet \otimes H^\bullet(X)$ für $n > 0$ ein nichttriviales Nilradikal $A^\bullet \otimes H^{>0}(X)$ hat.

Angesichts 21.8 ergibt sich mit 21.14 eine einfache Berechnungsmethode für die Kohomologie simplizialer Fächer:

21.18 Korollar Ist Δ simplizial und $\mathcal{A}^\bullet(\Delta)$ ein freier A^\bullet -Modul, so ist

$$H^\bullet(X_\Delta) \cong \mathcal{A}^\bullet(\Delta) / \mathfrak{m}_{A^\bullet} \mathcal{A}^\bullet(\Delta).$$

21.19 Beispiel Die Varietäten \mathbb{C} und \mathbb{IP}_1 sind äquivariant formal: Es ist $\mathbb{T} = \mathbb{C}^*$ und $A^\bullet = \mathbb{R}[T_1]$ mit einer Unbestimmten vom Grad 2. Für \mathbb{C} sind die Bedingungen in Theorem 21.14 aus 21.4 4) unmittelbar ablesbar. Entsprechend sind für \mathbb{IP}_1 die Bedingungen 1), 2) und 5) klar. Bedingung 3) bedeutet gerade einen $\mathbb{R}[T_1]$ -Modul Isomorphismus

$$\mathbb{R}[T_1] \otimes (\mathbb{R}[T_2]/(T_2^2)) \cong \mathbb{R}[T_1, T_2]/(T_1 T_2),$$

während 4) ersichtlich aus $\mathfrak{m}_{A^\bullet} = T_1 \mathbb{R}[T_1]$ folgt. ■

Nicht nur über die Faserinklusion in 21.14 4), sondern auch über die kanonische Projektion $p: X_{\mathbb{T}} \rightarrow B\mathbb{T}$ läßt sich eine wichtige Eigenschaft torischer Varietäten charakterisieren:

Aufgabe 21.6 Man zeige mit Hilfe von (21.13.1), daß die torische Varietät X genau dann Fixpunkte besitzt, wenn der kanonische Homomorphismus $p^\bullet: H^\bullet(B\mathbb{T}) \rightarrow H_{\mathbb{T}}^\bullet(X)$ injektiv ist.

Die Konstruktion des Stanley-Reisner-Ringes in § 18 läßt sich für *simpliziale* Fächer Δ zu einer Garbenkonstruktion auf dem Fächerraum Δ erweitern. Für jeden Halbstrahl $\rho_j \in \Delta^1$ fixiere man ein Erzeugendes v_j ; für rationales Δ sei das wie üblich ein primitiver Gittervektor. Die folgende Argumentation führen wir für $R = \mathbb{R}$ durch.³⁴⁾ Jedem v_j ordne man eine Δ -stückweise lineare Funktion χ_j mit

$$(21.21.0) \quad \chi_j(v_i) := \delta_{ij}$$

auf $|\Delta|$ zu. Das führt zu einem durch

$$\psi: P_k := \mathbb{R}[\rho_1, \dots, \rho_k] \rightarrow \mathcal{A}^\bullet(\Delta), \quad \rho_j \mapsto \chi_j$$

bestimmten Algebrahomomorphismus; sein Kern enthält das Ideal

$$I(\Delta) := P_k \cdot (\rho_{i_1} \cdots \rho_{i_\ell}; \text{keg}(\rho_{i_1}, \dots, \rho_{i_\ell}) \notin \Delta) :$$

Für ein Erzeugendes $\rho_{i_1} \cdots \rho_{i_\ell}$ und $\sigma \in \Delta$ wähle man einen Index i_j mit $\rho_{i_j} \not\leq \sigma$; dann ist $\chi_{i_j}|_\sigma = 0$. Weiter existiert ein eindeutig bestimmter Homomorphismus von A^\bullet -Algebren

$$\varphi: A^\bullet \rightarrow P_k \quad \text{mit} \quad A^2 \ni h \mapsto \sum_{j=1}^k h(v_j)\rho_j .$$

Damit wird P_k eine A^\bullet -Algebra. Wir verwenden folgende Eigenschaften von ψ und φ :

- a) $\psi \circ \varphi$ ist die Einschränkungsbildung $h \mapsto h|_{|\Delta|}$ auf A^2 und damit auf ganz A^\bullet .
- b) Für $\tau \in \Delta$ seien $\rho_\tau := \prod_{\rho \in \tau^1} \rho \in P_k$ und $\chi_\tau := \psi(\rho_\tau) \in \mathcal{A}^\bullet(\Delta)$. Die Einschränkung $\chi_\tau|_\tau \in A_\tau^\bullet$ ist das Produkt der (bis auf einen Skalarfaktor eindeutigen) nichttrivialen Linearformen aus A_τ^2 , die auf den Facetten von τ verschwinden.

21.20 Lemma *Der induzierte Homomorphismus von A^\bullet -Algebren*

$$(21.21.1) \quad \bar{\psi}: \mathcal{SR}(\Delta) := \mathbb{R}[\rho_1, \dots, \rho_k]/I(\Delta) \rightarrow \mathcal{A}^\bullet(\Delta)$$

ist ein Isomorphismus.

³⁴⁾ Ist der Hauptidealbereich R ein Unterring von \mathbb{Q} und Δ in naheliegenderem Sinne R -regulär, so läßt sie sich übertragen, wobei man die Algebra $\mathcal{A}^\bullet(\Delta)$ als die R -Algebra der stückweise polynomialen, auf $M \cap |\Delta|$ R -wertigen Funktionen interpretiere.

Beweis Wir führen Induktion über die Anzahl der Kegel in Δ . Die Behauptung ist unmittelbar auf dem Unterfächer $\Delta^{\leq 1}$ einzusehen. Es sei nun τ ein maximaler Kegel in $\Delta^{\geq 2}$, und für $\Delta_0 := \Delta \setminus \{\tau\}$ sei die Behauptung gezeigt. Einerseits ist der Homomorphismus $\bar{\psi}: \mathcal{SR}(\Delta) \rightarrow \mathcal{A}^\bullet(\Delta)$ surjektiv: Es sei $f \in \mathcal{A}^\bullet(\Delta)$. Dann gibt es laut Induktionsvoraussetzung ein Element $p \in P_k$, sodaß $\psi(p)|_{|\Delta_0|} = f|_{|\Delta_0|}$, i.e. $\psi(p) - f$ liegt in $\ker(\mathcal{A}^\bullet(\Delta) \rightarrow \mathcal{A}^\bullet(\Delta_0))$. Nun gilt aber nach b)

$$\ker(\mathcal{A}^\bullet(\Delta) \rightarrow \mathcal{A}^\bullet(\Delta_0)) = \ker(\mathcal{A}^\bullet(\tau) \rightarrow \mathcal{A}^\bullet(\partial\tau)) = \chi_\tau \cdot (\mathcal{A}^\bullet|_{|\tau|}) = \chi_\tau \cdot (\mathcal{A}^\bullet|_{|\Delta|}) .$$

Aus a) ergibt sich unmittelbar $\mathcal{A}^\bullet|_{|\Delta|} \subset \psi(P_k)$ und damit auch $f \in \psi(P_k)$. Für die Injektivität andererseits müssen wir $\ker(\psi) = I(\Delta)$ zeigen. Wir wissen bereits

$$I(\Delta) \subset \ker(\psi) \subset I(\Delta_0) ,$$

wobei die zweite Inklusion aus der Induktionsvoraussetzung stammt. Nun ist aber

$$I(\Delta_0) = I(\Delta) + (\rho_\tau) = I(\Delta) \oplus P_\tau \rho_\tau$$

mit der Unteralgebra $P_\tau := \mathbb{R}[\rho_j; \rho_j \in \tau^1]$. Die Funktionen $\psi(\rho)$ für $\rho \in \tau^1$ sind algebraisch unabhängig, da ihre Einschränkungen auf τ eine Basis von A_τ^2 bilden. Also ist $\psi|_{P_\tau \rho_\tau}$ injektiv, und es folgt unmittelbar $\ker(\psi) = I(\Delta)$. ■

In Anbetracht von Satz 21.8 ist damit für rationales simpliziales Δ die äquivariante Kohomologie $H_{\mathbb{T}}^\bullet(X_\Delta)$ eine kombinatorische Invariante.

Der Homomorphismus (21.21.1) ist offensichtlich mit der Einschränkung auf Unterfächer verträglich, so daß eine Prägarbe ${}_\Delta \mathcal{SR}$ von \mathcal{A}^\bullet -Algebren auf Δ resultiert. Mit ${}_\Delta \mathcal{A}^\bullet$ ist die Prägarbe ${}_\Delta \mathcal{SR}$ eine Garbe, die man als die *Stanley-Reisner-Garbe* des simplizialen Fächerraumes Δ bezeichnen könnte.

Als nächstes soll für einen Vergleich mit den Chowgruppen der Isomorphismus (18.8.3) verallgemeinert werden; dabei sei der simpliziale Fächer Δ volldimensional erzeugt, so daß M mit einem Untervektorraum von $\mathcal{A}^\bullet(\Delta)$ identifiziert werden kann. Zunächst existiert in Analogie zu (18.8.1) vermöge der Poincarédualität ein Homomorphismus

$$\mathrm{Ch}^j(X; \mathbb{R}) = \mathrm{Ch}_{n-j}(X; \mathbb{R}) \rightarrow H_{2(n-j)}^{\mathrm{cl}}(X; \mathbb{R}) \cong H^{2j}(X; \mathbb{R}) ,$$

der jedoch nicht notwendig bijektiv ist (vgl. Aufgabe 21.8, aber auch 22.6). Wie in (18.8.2) erhalten wir einen Algebrhomomorphismus

$$R[\rho_1, \dots, \rho_k] \rightarrow \mathrm{Ch}^\bullet(X; \mathbb{R}) \rightarrow H^\bullet(X) \quad \text{mit} \quad \rho_i \mapsto D_i \mapsto P_{2n-2}^{-1}(D_i) .$$

Nach 17.14 ist die erste Abbildung surjektiv. Im Kern liegt das von $I(\Delta)$ und $J \cong M$ erzeugte Ideal, was einen Algebrhomomorphismus

$$(21.21.2) \quad \mathcal{SR}(\Delta)/(M) \twoheadrightarrow \mathrm{Ch}^\bullet(X; \mathbb{R}) \rightarrow H^\bullet(X)$$

liefert. In 22.6 kommen wir auf ihn zurück.

- 21.21 Beispiele**
- 1) Jeder vollständige simpliziale Fächer ist äquivariant formal.
 - 2) Der Seitenfächer $\mathfrak{S}(\sigma)$ zu einem volldimensionalen Kegel σ ist äquivariant formal.
 - 3) Der projektive Kegel über einer projektiven äquivariant formalen torischen Varietät ist äquivariant formal, in der Regel aber nicht simplizial.
 - 4) Ein Beispiel einer vollständigen, aber nicht äquivariant formalen Varietät findet sich erstmals in Dimension 3.

Beweis 1) Nach 18.8 hat X_Δ für vollständiges simpliziales Δ keine Kohomologie in ungeraden Dimensionen.

2) Gemäß 12.4 ist X_σ zusammenziehbar und hat somit keine Kohomologie in positiven Dimensionen.

3) Ist $Z \hookrightarrow \mathbb{P}^n = V(\mathbb{P}^{n+1}; z_{n+1}) \hookrightarrow \mathbb{P}^{n+1}$ eine algebraische Untervarietät und X der projektive Kegel in \mathbb{P}^{n+1} mit Spitze $[0, \dots, 0, 1]$, so gilt $\tilde{H}_j(X; \mathbb{Z}) \cong H_{j-2}(Z; \mathbb{Z})$.

4) Für kompakte dreidimensionale torische Varietäten X_Δ wird in [BaBrFiKp, 3.6] gezeigt:

$$b_3(X) = b_2(X) - f_3(\Delta) + f_1(\Delta) - 1 .$$

Dazu wird ein dreidimensionales Dreiecksprisma angegeben, das eine torische Varietät mit $b_3(X_\Delta) = 1$ erzeugt. ■

Wir wollen nunmehr die Einschränkung auf volldimensional erzeugte Fächer begründen:

21.22 Satz *Ein äquivariant formaler simplizialer Fächer ist volldimensional erzeugt.*

Da freie Moduln torsionsfrei sind, ergibt sich der Satz unmittelbar aus dem folgenden Resultat:

21.23 Lemma *Ein simplizialer Fächer Δ ist genau dann volldimensional erzeugt, wenn $H_{\mathbb{T}}^\bullet(X_\Delta) = \mathcal{A}^\bullet(\Delta)$ ein torsionsfreier A^\bullet -Modul ist.*

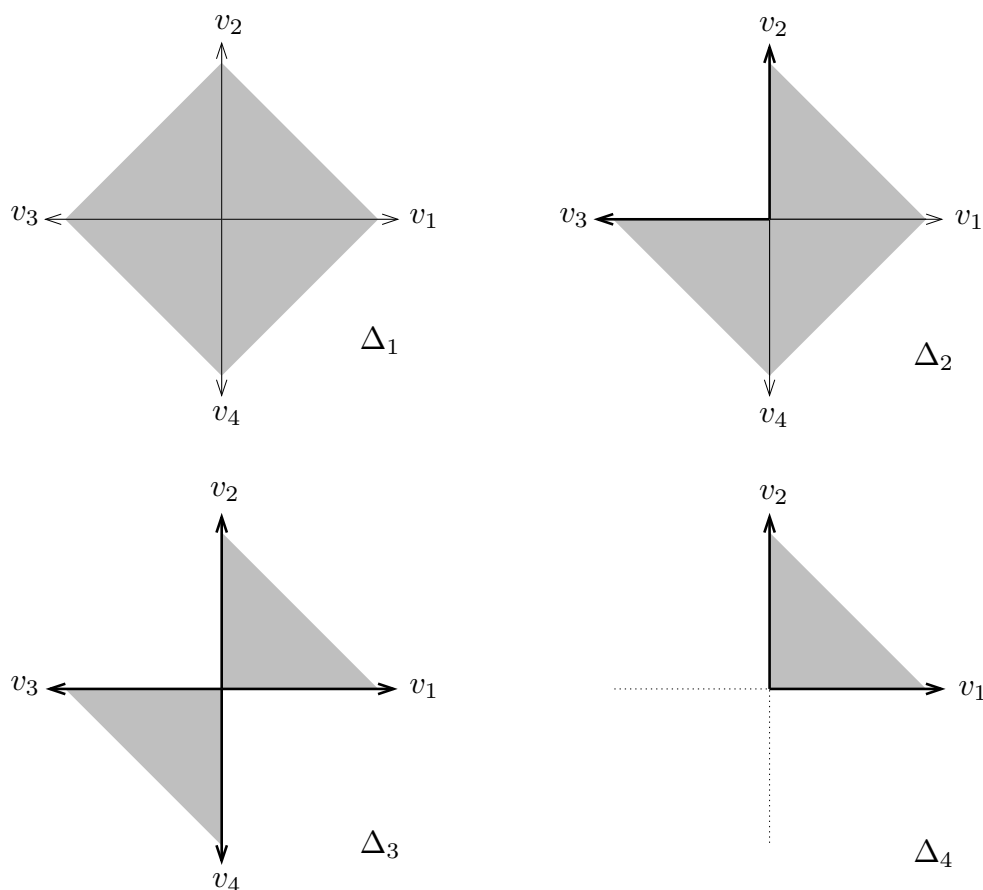
Beweis Da die Prägarbe $H_{\mathbb{T}}^\bullet$ für simpliziales Δ eine Garbe ist, erhalten wir für volldimensional erzeugtes Δ aus (21.6.1) eine Inklusion

$$H_{\mathbb{T}}^\bullet(X_\Delta) \subset \bigoplus_{\sigma \in \Delta^n} A_\sigma^\bullet .$$

Für $\sigma \in \Delta^n$ ist $A_\sigma^\bullet = A^\bullet$, also ist $H_{\mathbb{T}}^\bullet(X_\Delta)$ als Untermodul eines freien A^\bullet -Moduls torsionsfrei. — Ist andererseits $\sigma \in \Delta^{\max}$ niederdimensional, so genügt es, eine Klasse $0 \neq f \in H_{\mathbb{T}}^\bullet(X_\sigma) = \mathcal{A}^\bullet(\sigma)$ mit $f|_{\partial\sigma} = 0$ zu finden. Denn dann läßt sich f durch 0 zu einer Funktion aus $\mathcal{A}^\bullet(\Delta) = H_{\mathbb{T}}^\bullet(X_\Delta)$ fortsetzen und liefert ein nichttriviales Torsionselement: Wenn man f mit einer beliebigen linearen Funktion aus A^2 multipliziert, die auf σ verschwindet, so erhält man die Nullfunktion. Man findet so ein f wie folgt: Für jede Facette τ von σ sei $0 \neq \ell_\tau \in A_\sigma^\bullet$ mit $\ell_\tau|_\tau = 0$. Dann verschwindet $0 \neq h := \prod_{\tau \prec_1 \sigma} \ell_\tau \in A_\sigma^\bullet$ auf dem Rand von σ . ■

Nicht jeder volldimensional erzeugte zweidimensionale Fächer ist äquivariant formal:

Aufgabe 21.7 Es seien σ_1, σ_2 reguläre 2-Kegel im \mathbb{R}^2 , die sich nur im Nullpunkt schneiden. Man zeige, daß $\Delta := \mathfrak{S}(\sigma_1, \sigma_2)$ nicht äquivariant formal ist, weil $H^3(X_\Delta)$ nicht verschwindet.



FIGUR 21.2 Die Fächer der Aufgabe 21.8.

Aufgabe 21.8 Für die vier in Figur 21.2 dargestellten Fächer Δ bestimme man X_Δ sowie

$$\mathcal{RS}(\Delta), \mathcal{A}^\bullet(\Delta), \mathcal{RS}(\Delta)/(M), H_{\mathbb{T}}^\bullet(X_\Delta), H^\bullet(X_\Delta) \text{ und } h_j(\Delta) = \sum_{i=j}^2 (-1)^{i-j} \binom{i}{j} f_{2-j}(\mathring{\Delta}).$$

22. Äquivariant formale simpliziale Fächer

Für die Anwendungen von Satz 21.14 ist es nun entscheidend zu klären, wann $\mathcal{A}^\bullet(\Delta)$, und damit im simplizialen Fall $H_{\mathbb{T}}^\bullet(X_\Delta)$, ein freier A^\bullet -Modul ist. Technisches Hilfsmittel wird ein geeigneter, von Δ abhängiger Komplex werden, dessen relative Version für *volldimensional erzeugtes* Δ die Lösung bringt.

Wir führen in Analogie zu § 19 für beliebiges Δ einen Kokettenkomplex $(C^\bullet(\Delta), \delta^\bullet)$ für den kontravarianten Funktor $\Delta \mathcal{A}^\bullet$ auf folgende Weise ein:

22.1 Definition Für einen (nicht notwendig simplizialen) Fächer Δ in V und $i \geq 0$ sei

$$C^i(\Delta) := \bigoplus_{\sigma \in \Delta^{n-i}} A_\sigma^\bullet;$$

mit dem Differential

$$\delta^i: C^i(\Delta) \rightarrow C^{i+1}(\Delta), \quad (f_\sigma)_{\sigma \in \Delta^{n-i}} \mapsto \left(\sum_{\tau \prec_1 \sigma} \text{or}_\tau^\sigma f_\sigma | \tau \right)_{\tau \in \Delta^{n-i-1}}.$$

Für *vollständiges* Δ kann man den Komplex $C^\bullet(\Delta)$ offensichtlich durch die kanonische Abbildung

$$(22.1) \quad \mathcal{A}^\bullet(\Delta) \hookrightarrow H^0(\Delta) := \text{Ker}(\delta^0) \subset C^0(\Delta)$$

augmentieren, da jeder $(n-1)$ -dimensionale Kegel in genau zwei n -dimensionalen Kegeln enthalten ist; die zugehörigen Orientierungskoeffizienten haben verschiedene Vorzeichen. Nach Übergang zu einem relativen Komplex ist das allgemeiner möglich. Wir führen dazu für *volldimensional erzeugtes* Δ den *Randfächer*

$$\partial\Delta := \mathfrak{S}\{\tau \in \Delta^{n-1}; \tau \prec_1 \sigma \text{ für genau ein } \sigma \in \Delta\}$$

von Δ ein. Nach Konstruktion ist $C^0(\partial\Delta) = 0$. Wir definieren

$$C^\bullet(\Delta, \partial\Delta) := C^\bullet(\Delta) / C^\bullet(\partial\Delta)$$

mit dem induzierten Differential, das wir wieder mit δ^i bezeichnen. Der Komplex läßt sich durch $\tilde{C}^{-1}(\Delta, \partial\Delta) := \mathcal{A}^\bullet(\Delta)$ und

$$\delta^{-1}: \mathcal{A}^\bullet(\Delta) \hookrightarrow C^0(\Delta) = C^0(\Delta, \partial\Delta)$$

augmentieren zu einem Komplex $(\tilde{C}^\bullet(\Delta, \partial\Delta), \delta^\bullet)$. Mit Hilfe der Teilmenge

$$\overset{\circ}{\Delta} := \Delta \setminus \partial\Delta,$$

dem „Inneren“ von Δ , erhält man die Beschreibung

$$C^i(\Delta, \partial\Delta) = \bigoplus_{\sigma \in (\overset{\circ}{\Delta})^{n-i}} A_\sigma^\bullet.$$

Nennen wir nun den Komplex $C^\bullet(\Delta, \partial\Delta)$ *azyklisch*, wenn der augmentierte Komplex $\tilde{C}^\bullet(\Delta, \partial\Delta)$ exakt ist, also verschwindende Kohomologie $H^\bullet(\tilde{C}(\Delta, \partial\Delta))$ hat.

Das wesentliche Ergebnis dieses Paragraphen lautet damit:

22.2 Theorem *Der A^\bullet -Modul $\mathcal{A}^\bullet(\Delta)$ ist für volldimensional erzeugtes Δ genau dann frei, wenn der Komplex $C^\bullet(\Delta, \partial\Delta)$ azyklisch ist.*

Beweis Wir zeigen hier nur, daß aus der Azyklizität die Freiheit folgt; für die Umkehrung sei auf [BaBrFiKa₅, 4.3] verwiesen. Setzen wir abkürzend $C^i := \tilde{C}^i(\Delta, \partial\Delta)$, so gilt nach Voraussetzung für jedes j

$$\text{Ker } \delta^j = I^j := \text{Im } \delta^{j-1} \subset C^j.$$

Die Behauptung lautet damit, daß $\mathcal{A}^\bullet(\Delta) = I^0$ ein freier A^\bullet -Modul ist. Dazu ist nach Lemma 22.4 nur $\text{Tor}_1^{A^\bullet}(I^0, \mathbb{R}) = 0$ zu verifizieren. Wir zeigen also durch fallende Induktion über j

$$(22.2.1) \quad \text{Tor}_i^{A^\bullet}(I^j, \mathbb{R}) = 0 \quad \text{für alle } i > j.$$

Der Induktionsanfang $j = n + 1$ ergibt sich aus $I^{n+1} = 0$. Für den Induktionsschritt „ $j + 1 \Rightarrow j$ “ betrachten wir die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow I^j \rightarrow C^j \rightarrow I^{j+1} \rightarrow 0.$$

Aus der zugehörigen langen exakten Tor-Sequenz verwenden wir den Ausschnitt

$$\dots \rightarrow \text{Tor}_{i+1}^{A^\bullet}(I^{j+1}; \mathbb{R}) \rightarrow \text{Tor}_i^{A^\bullet}(I^j; \mathbb{R}) \rightarrow \text{Tor}_i^{A^\bullet}(C^j; \mathbb{R}) \rightarrow \dots$$

Zunächst verschwindet nach 22.3

$$\text{Tor}_i^{A^\bullet}(C^j; \mathbb{R}) \cong \bigoplus_{\sigma \in (\overset{\circ}{\Delta})^{n-j}} \text{Tor}_i^{A^\bullet}(A_\sigma; \mathbb{R}) \cong \bigoplus_{\sigma \in (\overset{\circ}{\Delta})^{n-j}} \bigwedge^i (V_\sigma^\perp)$$

für $i > j = \dim V_\sigma^\perp$. Nach Induktionsvoraussetzung verschwindet ferner $\text{Tor}_{i+1}^{A^\bullet}(I^{j+1}; \mathbb{R})$ für $i > j$ und damit auch $\text{Tor}_i^{A^\bullet}(I^j; \mathbb{R})$. ■

In den folgenden Resultaten identifizieren wir \mathbb{R} mit dem A^\bullet -Modul $A^\bullet/\mathfrak{m}_{A^\bullet}$.

22.3 Lemma *Es existiert ein Isomorphismus $\text{Tor}_i^{A^\bullet}(A_\sigma; \mathbb{R}) \cong \bigwedge^i (V_\sigma^\perp)$ von reellen Vektorräumen.*

Beweis Der Isomorphismus ergibt sich aus dem Koszulkomplex zum A^\bullet -Modul $A^\bullet \cdot V_\sigma^\perp$: Man fixiere eine Basis T_1, \dots, T_r von V_σ^\perp und bezeichne für $j = 1, \dots, r$ mit K^j den Komplex

$$0 \rightarrow K_1^j := A^\bullet T_j \hookrightarrow K_0^j := A^\bullet \rightarrow 0.$$

Dann ist der „Koszulkomplex“ $K := K^1 \otimes_{A^\bullet} \dots \otimes_{A^\bullet} K^r$ mit der kanonischen Surjektion $K^0 \cong A^\bullet \twoheadrightarrow A_\sigma^\bullet$ eine freie Auflösung des A^\bullet -Moduls A_σ^\bullet . Tensoriert man diese mit dem A^\bullet -Modul $\mathbb{R} = A^\bullet / \mathfrak{m}_{A^\bullet}$, so entsteht nach Konstruktion ein Komplex mit trivialem Differential. Also ist dessen Homologie $\text{Tor}_i^{A^\bullet}(A_\sigma; \mathbb{R})$ isomorph zu $K_i \otimes_{A^\bullet} \mathbb{R}$. Für ν aus $\{0, 1\}^r$ sei $T^{\otimes \nu} := T_1^{\nu_1} \otimes \dots \otimes T_r^{\nu_r} \in K_i$. Hingegen sei $T^{\wedge \nu}$ das Teilprodukt von $T_1^{\nu_1} \wedge \dots \wedge T_r^{\nu_r}$, in dem alle Faktoren mit $\nu_j = 0$ fortgelassen wurden. Dann erhalten wir für jedes i einen kanonischen Isomorphismus reeller Vektorräume

$$K_i \otimes_{A^\bullet} \mathbb{R} \cong \bigwedge^i (V_\sigma^\perp), \quad T^{\otimes \nu} \otimes 1 \mapsto T^{\wedge \nu} \quad \text{für } |\nu| = i. \blacksquare$$

22.4 Lemma *Es sei M^\bullet ein (positiv) graduerter A^\bullet -Modul.*

- 1) *Genau dann ist $M^\bullet = 0$, wenn $M^\bullet \otimes_{A^\bullet} \mathbb{R} = 0$ gilt.*
- 2) *Genau dann ist M^\bullet ein freier A^\bullet -Modul., wenn $\text{Tor}_1^{A^\bullet}(M^\bullet, \mathbb{R}) = 0$ gilt.*

Beweis 1) Aus der Exaktheit der Sequenz $M^\bullet \otimes_{A^\bullet} \mathfrak{m} \rightarrow M^\bullet \otimes_{A^\bullet} A^\bullet \rightarrow M^\bullet \otimes_{A^\bullet} \mathbb{R} = 0$ folgt $\mathfrak{m}M^\bullet = M^\bullet$, was wegen der Beziehung $\mathfrak{m}M^\bullet \subset M^{\bullet+2}$ nur für $M^\bullet = 0$ möglich ist.

2) Der graduierte reelle Vektorraum $M^\bullet \otimes_{A^\bullet} \mathbb{R}$ hat eine Basis B aus homogenen Elementen der Form $m \otimes 1$. Es sei L der graduierte freie A^\bullet -Modul $A^{\bullet(B)}$ zu dieser Basis. Die kanonische Abbildung $B \rightarrow M^\bullet, m \otimes 1 \mapsto m$ definiert einen A -Modul Homomorphismus $\psi: L \rightarrow M^\bullet$, für den $\psi \otimes \text{id}_{\mathbb{R}}$ nach Konstruktion ein Isomorphismus ist. Es genügt nun zu zeigen, daß ψ ein Isomorphismus ist. Dazu betrachten wir die kanonische exakte Sequenz mit Kern und Kokern von ψ :

$$(22.4.1) \quad 0 \rightarrow K \rightarrow L \xrightarrow{\psi} M^\bullet \rightarrow C \rightarrow 0,$$

woraus zunächst eine exakte Sequenz $L \otimes_{A^\bullet} \mathbb{R} \rightarrow M^\bullet \otimes_{A^\bullet} \mathbb{R} \rightarrow C \otimes_{A^\bullet} \mathbb{R} \rightarrow 0$ entsteht, deren erster Homomorphismus ein Isomorphismus ist. Also verschwindet $C \otimes_{A^\bullet} \mathbb{R}$ und damit nach 1) auch C . Aus der modifizierten Sequenz (22.4.1) ergibt sich damit eine exakte Sequenz

$$(22.4.2) \quad 0 = \text{Tor}_1^{A^\bullet}(M^\bullet, \mathbb{R}) \rightarrow K \otimes_{A^\bullet} \mathbb{R} \rightarrow L \otimes_{A^\bullet} \mathbb{R} \xrightarrow{\cong} M^\bullet \otimes_{A^\bullet} \mathbb{R} \rightarrow 0.$$

Folglich verschwindet $K \otimes_{A^\bullet} \mathbb{R}$ und nach 1) damit auch K . ■

Eine unmittelbare Konsequenz werden wir in § 24 benötigen:

Aufgabe 22.1 Es sei $\varphi: M^\bullet \rightarrow L^\bullet$ ein Homomorphismus von endlich erzeugten (graduierten) A^\bullet -Moduln mit dem Restklassenhomomorphismus reeller Vektorräume $\overline{M} := M / \mathfrak{m}_{A^\bullet} M$ etc.

$$\overline{\varphi}: \overline{M} \rightarrow \overline{L}.$$

- i) Genau dann ist φ surjektiv, wenn dies für $\bar{\varphi}$ gilt. Insbesondere folgt für m_1, \dots, m_r aus M^\bullet : Erzeugen die Restklassen $\bar{m}_1, \dots, \bar{m}_r$ den Vektorraum $\overline{M^\bullet}$ über dem Körper $\overline{A^\bullet}$, so erzeugen sie den Modul M^\bullet über A^\bullet .
- ii) Ist M^\bullet ein freier A^\bullet -Modul, so kommt jeder Homomorphismus $\psi: \overline{M^\bullet} \rightarrow \overline{L^\bullet}$ graduierter Vektorräume von einem Homomorphismus von A^\bullet -Moduln $\varphi: M^\bullet \rightarrow L^\bullet$.
- iii) Ist L^\bullet ein freier A^\bullet -Modul, so ist φ genau dann ein Isomorphismus, wenn dies auf $\bar{\varphi}$ zutrifft.

Für die Berechnung der Bettizahlen $b_j(X_\Delta)$ verwenden wir die „Poincaréreihe von $\mathcal{A}^\bullet(\Delta)$ “ genannte formale Potenzreihe

$$P_{\mathcal{A}^\bullet(\Delta)} := \sum_{j=0}^{\infty} \dim \mathcal{A}^{2j}(\Delta) \cdot T^{2j} \in \mathbb{N}[[T]].$$

Schreiben wir kurz $P_\Delta := P_{X_\Delta}$ für das Poincarépolynom von X_Δ , so gilt mit den Zahlen $f_j(\overset{\circ}{\Delta}) := \#\overset{\circ}{\Delta}^j$:

22.5 Satz *Ist Δ simplizial und $\mathcal{A}^\bullet(\Delta)$ ein freier A^\bullet -Modul, so gilt*

- 1) $P_{\mathcal{A}^\bullet(\Delta)} = (1 - T^2)^{-n} P_\Delta.$
- 2) $P_\Delta = \sum_{i=0}^n f_{n-i}(\overset{\circ}{\Delta}) (T^2 - 1)^i.$

Insbesondere berechnen sich die Bettizahlen von X_Δ als

$$b_{2j}(X_\Delta) = \sum_{i=j}^n (-1)^{i-j} \binom{i}{j} f_{n-i}(\overset{\circ}{\Delta}) \quad \text{und} \quad b_{2j+1}(X_\Delta) = 0.$$

Beweis Nach 21.14 ist $\mathcal{A}^\bullet(\Delta) = A^\bullet \otimes_{\mathbb{R}} H^\bullet(X_\Delta)$; die Poincaréreihe von A^\bullet ist gerade $1/(1 - T^2)^n$, und daraus folgt 1). — Nach 21.23 ist Δ volldimensional erzeugt. Da der augmentierte Komplex $\tilde{C}^\bullet(\Delta, \partial\Delta)$ nach 22.2 exakt ist, gilt

$$P_{\mathcal{A}^\bullet(\Delta)} = \sum_{j=0}^n (-1)^j P_j,$$

wobei P_j für $j \geq 0$ die Poincaréreihe von

$$C^j(\Delta, \partial\Delta) = \bigoplus_{\sigma \in \overset{\circ}{\Delta}^{n-j}} A_\sigma^\bullet \cong (S((\mathbb{R}^{n-j})^*))^{f_{n-j}(\overset{\circ}{\Delta})}$$

bezeichne. Evident ist $P_j = f_{n-j}(\overset{\circ}{\Delta})/(1 - T^2)^{n-j}$; Einsetzen in 1) liefert die Formel 2), während sich die Bettizahlen wie in 13.10 wieder durch formales Umrechnen ergeben. ■

Satz 22.5 verallgemeinert damit 13.10 auf simpliziale Fächer mit freiem $\mathcal{A}^\bullet(\Delta)$; der Beweis vermeidet den Rückgriff auf die Schnitttopologie vollständig! Ferner erhalten wir folgende Verallgemeinerung des Satzes von Jurkiewicz-Danilov:

22.6 Korollar Für rationales äquivariant formales simpliziales Δ existieren kanonische Isomorphismen reeller Algebren

$$\mathcal{SR}(\Delta)/(M) \cong \text{Ch}^\bullet(X_\Delta; \mathbb{R}) \cong H^\bullet(X_\Delta).$$

Beweis Für den kanonischen Algebrhomomorphismus

$$\mathcal{SR}(\Delta)/(M) \twoheadrightarrow \text{Ch}^\bullet(X; \mathbb{R}) \rightarrow H^\bullet(X_\Delta)$$

aus (21.21.2) genügt es ersichtlich zu zeigen, daß ein Isomorphismus der äußeren Terme vorliegt. Unter dem Isomorphismus $\mathbb{R}[\Delta^1]/I(\Delta) \cong \mathcal{A}^\bullet(\Delta)$ gemäß (21.21.1) entsprechen sich die Untermoduln $M \cdot \mathbb{R}[\Delta^1]/I(\Delta)$ und $\mathfrak{m}_{A^\bullet} \cdot H_{\mathbb{T}}^\bullet(X_\Delta)$, so daß aus 21.14 die Behauptung folgt, weil X_Δ äquivariant formal ist. ■

22.7 Korollar Für rationale simpliziale äquivariant formale Fächer Δ ist das Poincarépolynom P_Δ eine kombinatorische Invariante. ■

Dies bedeutet nicht, daß auch die Kohomologiealgebren kombinatorische Invarianten seien! In [Fei, Ex. 4.1] werden eine simpliziale Unterteilung eines Dreiecksprismas und ein (kombinatorisch äquivalentes) Oktaeder angegeben, deren zugehörige torische Varietäten nicht isomorphe reelle Kohomologiealgebren haben. In der Darstellung der Kohomologie gemäß 21.14 hängt die Wirkung von \mathfrak{m}_{A^\bullet} auf $H_{\mathbb{T}}^\bullet(X_\Delta)$ bei fixiertem Gitter N in der Tat von der Wahl der Kantenvektoren v_1, \dots, v_k ab.

Anders ist die Situation allerdings für zweidimensionale vollständige Fächer (vgl. [Fei, 3.7]): Mit Hilfe des Ideals

$$I_0 := \mathbb{R}[u_1, \dots, u_{d-2}] \cdot \{u_1^2 + u_\ell^2, u_i u_j; 2 \leq \ell \leq d-2, 1 \leq i < j \leq d-2\}$$

für Unbestimmte u_1, \dots, u_{d-2} existiert ein Isomorphismus reeller Algebren:

$$H^\bullet(X_\Delta; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}[u_1, \dots, u_{d-2}] / I_0.$$

Damit hängt die Multiplikation bis auf Isomorphie nur vom Rang und der Signatur der durch das Cupprodukt auf $H^2(X_\Delta; \mathbb{R})$ definierten Bilinearform ab. Geht man jedoch zu rationalen Koeffizienten über, dann wird selbst diese Behauptung falsch (vgl. [Fei, 3.8]): Zu $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ gehört die rationale Kohomologiealgebra $\mathbb{Q}[u_1, u_2]/(u_1 u_2, u_1^2 + u_2^2)$. Eine einfache Rechnung zeigt, daß zum kombinatorisch äquivalenten vollständigen Fächer mit den Kanten $v_1 := e_1, v_2 := e_2, v_3 := v_2 - v_1, v_4 := -v_1 - v_2$ eine torische Varietät gehört, deren rationale Kohomologiealgebra $\mathbb{Q}[u_1, u_2]/(u_1 u_2, u_1^2 + 2u_2^2)$ nicht zu der von $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ äquivalent ist.

In [Fis] wird dagegen nachgewiesen, daß auf einer regulären vollständigen zweidimensionalen torischen Varietät sogar der ganzzahlige Kohomologiering kombinatorisch bestimmt ist.

Im nichtsimplizialen Fall ist die Invarianz ab Dimension drei nicht mehr garantiert: Der kleinstmögliche vollständige Fächer eines Gegenbeispiels ist durch ein dreidimensionales Dreiecksprisma aufgespannt; bei einer „Deformation“ des zugehörigen Fächers kann die Bettizahl $b_2(X_\Delta)$ zwischen 0 und 1 springen (vgl. 21.21 4)).

Üblicherweise wird eine Garbe \mathcal{G} mit Hilfe einer Prägarbe auf der Kategorie *aller* offenen Teilmengen des betrachteten Grundraumes (mit den Inklusionen als Morphismen) definiert. Es reicht jedoch, die Prägarbe auf einer *Basis* offener Mengen \mathfrak{B} vorzuschreiben, wobei zwei Elemente der Prägarbe gleich sein mögen, wenn sie lokal gleich sind. Für ein beliebiges $U \subseteq X$ schreibe man $U = \bigcup U_i$ über alle $U_i \in \mathfrak{B}$ mit $U_i \subset U$ und definiere

$$\mathcal{G}(U) := \{(f_i)_{i \in I}; f_i|_{U_{ij}} = f_j|_{U_{ij}} \forall i, j \in I\}.$$

Damit erhält man kanonisch eine Garbe, vgl. Aufgabe 9.8.

Dies erweist sich als besonders bequem für Garben auf einem Fächerraum Δ . Die Menge aller affinen Fächer $\mathfrak{S}(\sigma)$ für $\sigma \in \Delta$ bildet (bis auf die leere Menge) eine Basis der Topologie des Fächerraumes Δ , und $\mathfrak{S}(\sigma)$ ist jeweils eine minimale Umgebung von σ , vgl. Aufgabe 4.7. Damit erfüllt jeder kontravariante Funktor \mathcal{G} auf der Menge aller affinen Teilfächer $\mathfrak{S}(\sigma)$ von Δ mit Werten in der Kategorie reeller Vektorräume automatisch das Garbenaxiom der Injektivität und bestimmt darüber hinaus wie angegeben $\mathcal{G}(\Lambda)$ für jedes $\Lambda \prec \Delta$. Insbesondere ergibt sich für die Halme

$$\mathcal{G}_\sigma = \mathcal{G}(\sigma).$$

22.8 Beispiele Es sei Δ ein beliebiger Fächer.

1) Die Zuordnung

$$\mathcal{A}^\bullet := {}_\Delta \mathcal{A}^\bullet : \sigma \mapsto A_\sigma^\bullet \text{ für } \sigma \in \Delta$$

ist eine Garbe auf Δ ; es gilt in Übereinstimmung mit 21.7

$$\mathcal{A}^\bullet(\Delta) \cong \{f: |\Delta| \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ ist stückweise polynomial}\}.$$

2) Für $\sigma \in \Delta$ werde die „charakteristische Garbe“ \mathcal{I}^σ von σ auf Δ durch

$$\tau \mapsto \mathcal{I}^\sigma(\tau) := \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{falls } \tau \succ \sigma \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert. Ihr Träger ist $\text{Stern}(\sigma) = \{\tau \in \Delta; \sigma \prec \tau\}$.

22.9 Definition Eine Garbe \mathcal{G} auf einem topologischen Raum T heißt *welk*, wenn für jedes $U \subseteq T$ die Einschränkung $\mathcal{G}(T) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ surjektiv ist.

22.10 Bemerkung Eine Garbe \mathcal{G} auf Δ ist genau dann *welk*, wenn jede Einschränkung $\mathcal{G}(\sigma) \rightarrow \mathcal{G}(\partial\sigma)$ surjektiv ist.

Ist nämlich diese Bedingung erfüllt, so kann man für einen Teilfächer Λ von Δ einen Schnitt aus $\mathcal{G}(\Lambda)$ rekursiv auf alle $\Lambda \cup \Delta^{\leq j}$ fortsetzen; mit $j = n$ ist die Behauptung gezeigt. ■

22.11 Beispiele 1) Die Garbe ${}_\Delta \mathcal{A}^\bullet$ ist genau dann *welk*, wenn Δ simplizial ist.

2) Für jedes $\sigma \in \Delta$ ist die Garbe \mathcal{I}^σ *welk*.

Beweis 1) Nach 21.9 ist $\mathcal{A}^\bullet(\sigma) \rightarrow \mathcal{A}^\bullet(\partial\sigma)$ für simpliziales σ surjektiv. Wenn σ nicht simplizial ist, dann hat man durch die zu große Kantenzahl mehr Freiheitsgrade als ein Polynom erfüllen kann: Ohne Einschränkung sei $\sigma = \text{keg}(v_1, \dots, v_n, v_{n+1}, \dots)$ mit einer Basis (v_1, \dots, v_n) von V . Dann ist jedes $\ell \in \mathcal{A}^2(\sigma)$ bereits durch die Werte $\ell(v_i)$ für $i = 1, \dots, n$ bestimmt.

2) Es sei $s \in \mathcal{I}^\sigma(\partial\tau)$. Ist $\tau \notin \text{Stern } \sigma$ oder $\tau = \sigma$, so ist notwendig $s(\tau) := 0$ zu setzen. Andernfalls ist σ eine echte Seite von τ und $s(\tau) := s(\sigma)$ die richtige Fortsetzung. ■

Zu einer allgemeinen Garbe (reeller Vektorräume) \mathcal{G} auf Δ definieren wir einen Kokettenkomplex

$$C^j(\Delta; \mathcal{G}) := \bigoplus_{\sigma \in \Delta^{n-j}} \mathcal{G}(\sigma),$$

was den Komplex $C^j(\Delta) = C^j(\Delta; \mathcal{A}^\bullet)$ aus 22.1 verallgemeinert; das Differential δ sei formal analog gebildet. Setzt man für einen Teilfächer $\Lambda \prec \Delta$

$$(22.11.1) \quad C^\bullet(\Delta, \Lambda; \mathcal{G}) := C^\bullet(\Delta; \mathcal{G}) / C^\bullet(\Lambda; \mathcal{G}),$$

so erhält man Kohomologiegruppen

$$(22.11.2) \quad H^j(\Delta, \Lambda; \mathcal{G}) := H^j(C^\bullet(\Delta, \Lambda; \mathcal{G})).$$

Wieder betrachten wir einen augmentierten Komplex

$$(22.11.3) \quad 0 \rightarrow \mathcal{G}(\Delta) \rightarrow C^0(\Delta, \partial\Delta; \mathcal{G}) \xrightarrow{\delta^0} \dots,$$

den wir mit $\tilde{C}^\bullet(\Delta, \partial\Delta; \mathcal{G})$ bezeichnen; wie üblich nennen wir \mathcal{G} eine „azyklische Garbe“ (genauer: azyklisch auf $(\Delta, \partial\Delta)$), wenn die „reduzierte“ Kohomologie

$$\tilde{H}^\bullet(\Delta, \partial\Delta; \mathcal{G}) := H(\tilde{C}^\bullet(\Delta, \partial\Delta; \mathcal{G}))$$

verschwindet, wenn also gilt

- a) $\mathcal{G}(\Delta) = H^0(\Delta, \partial\Delta; \mathcal{G})$,
- b) $H^{\geq 1}(\Delta, \partial\Delta; \mathcal{G}) = 0$.

Führt man für eine Garbe reeller Vektorräume \mathcal{G} auf Δ und $\sigma \in \Delta$ den Vektorraum

$$K_\sigma(\mathcal{G}) := \text{Ker}(\mathcal{G}(\sigma) \rightarrow \mathcal{G}(\partial\sigma))$$

ein, so erhält man folgenden *Zerlegungssatz für welke Garben*:

22.12 Satz *Ist \mathcal{G} eine welke Garbe auf Δ , so existiert eine eindeutige Zerlegung der Gestalt*

$$\mathcal{G} \cong \bigoplus_{\sigma \in \Delta} \mathcal{I}^\sigma \otimes_{\mathbb{R}} K_\sigma;$$

dabei sind die reellen Vektorräume K_σ notwendigerweise isomorph zu $K_\sigma(\mathcal{G})$. Insbesondere gilt damit

$$(22.12.1) \quad H^\bullet(\Delta, \partial\Delta; \mathcal{G}) \cong \bigoplus_{\sigma \in \Delta} H^\bullet(\Delta, \partial\Delta; \mathcal{I}^\sigma) \otimes_{\mathbb{R}} K_\sigma(\mathcal{G}).$$

Beweis Man wähle einen Kegel τ minimaler Dimension d aus dem Träger $\text{Tr } \mathcal{G}$; ersichtlich ist $\mathcal{G}_\tau = \mathcal{G}(\tau) = K_\tau(\mathcal{G})$. Es ist zu zeigen, daß die Garbe $\mathcal{F}^\tau := \mathcal{I}^\tau \otimes K_\tau(\mathcal{G})$ ein direkter Summand von \mathcal{G} mit einem Komplement \mathcal{H} ist. Denn dann ist $\mathcal{H} \cong \mathcal{G}/\mathcal{F}^\tau$ welk und enthält τ nicht im Träger; also ist die auf $\text{Stern}(\tau)$ konstante Garbe \mathcal{F}^τ durch den Halm \mathcal{G}_τ eindeutig bestimmt. Somit läßt sich zunächst für festes d Induktion über die Anzahl solcher τ und dann Induktion über d durchführen.

Die Konstruktion von \mathcal{H} verläuft ihrerseits rekursiv über die m -Skelette $\Delta^{\leq m}$: Für $m = d$ sei \mathcal{H} die eindeutig bestimmte Garbe mit Träger $\text{Tr } \mathcal{G} \setminus \{\tau\}$, die dort mit \mathcal{G} übereinstimmt. Ist nun für $m \geq d$ bereits eine Zerlegung $\mathcal{G} = \mathcal{F}^\tau \oplus \mathcal{H}$ auf $\Delta^{\leq m}$ etabliert, nicht jedoch auf $\sigma \in \Delta^{m+1}$, so existiert eine Zerlegung $\mathcal{G}(\partial\sigma) = \mathcal{F}^\tau(\partial\sigma) \oplus \mathcal{H}(\partial\sigma)$. Da \mathcal{G} welk ist, kann man andererseits einen Schnitt zur Einschränkung $\mathcal{G}(\sigma) \rightarrow \mathcal{G}(\partial\sigma)$ fixieren. Es bezeichne G dessen Bild von $\mathcal{F}^\tau(\partial\sigma)$, und man zerlege $\mathcal{G}(\sigma) =: G \oplus H$ mit surjektivem $H \rightarrow \mathcal{H}(\partial\sigma)$. Dann erhält man mit $\mathcal{H}(\sigma) := H$ die gewünschte Fortsetzung von \mathcal{H} in den Punkt σ .

Die Formel (22.12.1) ist einfach Ausfluß der Tatsache, daß die Kohomologie mit der Bildung direkter Koeffizientensummen und mit dem Tensorprodukt über \mathbb{R} verträglich ist. ■

22.13 Lemma Für jedes $\sigma \in \Delta$ ist $K_\sigma(\mathcal{A}^\bullet) \neq 0$.

Beweis Für jede Facette τ von σ sei $0 \neq \ell_\tau \in A_\sigma^2$ mit $\ell_\tau|_\tau = 0$. Dann verschwindet $0 \neq h := \prod_{\tau \prec_1 \sigma} \ell_\tau \in A_\sigma^\bullet$ auf dem Rand von σ . ■

22.14 Korollar Ist Δ simplizial, so ist \mathcal{A}^\bullet genau dann auf $(\Delta, \partial\Delta)$ azyklisch, wenn das für jedes \mathcal{I}^σ zutrifft; insbesondere ist dann $\mathcal{A}^\bullet(\Delta)$ für volldimensional erzeugtes Δ ein freier A^\bullet -Modul.

Beweis Nach 22.11 ist die Garbe \mathcal{A}^\bullet welk, so daß sich auf sie (22.12.1) anwenden läßt. Aus 22.13 folgt damit unmittelbar die erste Behauptung. Schließlich resultiert aus 22.2, daß $\mathcal{A}^\bullet(\Delta)$ dann frei über A^\bullet ist. ■

Die Analyse der \mathcal{I}^σ läßt sich nun auf konstante Garben reduzieren: Im Vektorraum $V(\sigma) = V/\text{lin } \sigma$ liegt der Fächer Δ/σ zu $\text{Stern}(\sigma)$, vgl. 7.13. Aus der Konstruktion ergibt sich darin wegen $\mathcal{I}^{\bar{\sigma}} = \mathbb{R}$:

22.15 Bemerkung Für jedes $\sigma \in \Delta$ existiert ein kanonischer Isomorphismus

$$C^\bullet(\Delta, \partial\Delta; \mathcal{I}^\sigma) \cong C^\bullet(\Delta/\sigma, \partial(\Delta/\sigma); \mathbb{R}). \quad \blacksquare$$

Spezialisieren wir diese Überlegungen auf die Garbe $\Delta\mathcal{A}^\bullet$, so ergibt sich mit Formel (22.12.1):

22.16 Theorem *Der Fächer Δ sei volldimensional erzeugt und simplizial. Dann ist ${}_{\Delta}\mathcal{A}^{\bullet}$ genau dann azyklisch, wenn alle augmentierten Komplexe $\tilde{C}^{\bullet}(\Delta/\sigma, \partial(\Delta/\sigma); \mathbb{R})$ exakt sind. ■*

Für eine Fortsetzung der Analyse volldimensional erzeugter Δ fixiere man eine euklidische Norm und damit eine Einheitssphäre S^{n-1} in V ; ferner setze man

$$(22.17.2) \quad S_{\Delta} := S^{n-1} \cap |\Delta| \text{ und } S_{\partial\Delta} := S^{n-1} \cap |\partial\Delta| .$$

Für jedes $\sigma \in \Delta$ haben wir gemäß 22.16 den Vektorraum $H^{\bullet}(\Delta/\sigma, \partial(\Delta/\sigma); \mathbb{R})$ zu berechnen.

Es sei zunächst $\sigma \notin \partial\Delta$. Dann ist Δ/σ vollständig und damit $\partial\Delta/\sigma$ leer. Also ist $H^{\bullet}(\Delta/\sigma, \partial(\Delta/\sigma); \mathbb{R}) = H^{\bullet}(\Delta/\sigma; \mathbb{R})$. Für $d := \dim_{\mathbb{R}} \sigma$ liefert Δ/σ eine simpliziale Zerlegung der Einheitssphäre S^{n-d-1} in $V(\sigma)$, und der Komplex $C^{\bullet}(\Delta/\sigma; \mathbb{R})$ ist, bis auf die kohomologische Indizierung, der zugehörige homologische Zellenkomplex mit der Augmentierung, die dem Nullkegel entspricht. Somit folgt

$$(22.17.1) \quad H^j(\Delta/\sigma; \mathbb{R}) \cong \tilde{H}_{n-d-1-j}(S^{n-d-1}; \mathbb{R}) ,$$

so daß der Komplex $\tilde{C}^{\bullet}(\Delta/\sigma, \partial(\Delta/\sigma); \mathbb{R})$ azyklisch ist. Damit ist zunächst der vollständige Fall erschöpfend behandelt:

22.17 Korollar *Für vollständige simpliziale Fächer Δ ist die Garbe ${}_{\Delta}\mathcal{A}^{\bullet}$ azyklisch. ■*

Es bleiben nur noch die $\sigma \in \partial\Delta$ zu untersuchen. Analog zum absoluten Fall erhält man im relativen Kontext mit $d := \dim \sigma$ Isomorphismen:

$$H^j(\Delta/\sigma, \partial(\Delta/\sigma); \mathbb{R}) \cong H_{n-d-1-j}(S_{\Delta/\sigma}, S_{\partial(\Delta/\sigma)}; \mathbb{R}) .$$

Für $\sigma = \mathfrak{o}$ ist $\Delta/\mathfrak{o} = \Delta$ und somit

$$(22.17.3) \quad H^j(\Delta, \partial\Delta; \mathbb{R}) \cong H_{n-1-j}(S_{\Delta}, S_{\partial\Delta}; \mathbb{R}) .$$

Für $\sigma \neq \mathfrak{o}$ betrachte man den Abbildungskegel

$$Z(\Delta) := S_{\Delta} \cup \{tv; v \in S_{\partial\Delta}, 0 \leq t \leq 1\}$$

über $S_{\partial\Delta} \hookrightarrow S_{\Delta}$. Dann gilt für $v_0 \in \sigma^{\circ} \cap S^{n-d-1}$

$$(22.17.4) \quad H^j(\Delta/\sigma, \partial(\Delta/\sigma); \mathbb{R}) = H_{n-j-1}(Z(\Delta), Z(\Delta) \setminus \{v_0\}; \mathbb{R}) ,$$

womit wir bei der lokalen Homologie von $Z(\Delta)$ im Punkte v_0 landen.

22.18 Lemma *Für einen nicht vollständigen simplizialen Fächer Δ ist ${}_{\Delta}\mathcal{A}^{\bullet}$ genau dann azyklisch, wenn gilt:*

- 1) $H_j(S_{\Delta}, S_{\partial\Delta}; \mathbb{R}) \cong \begin{cases} \mathbb{R}, & j = n - 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
- 2) $Z(\Delta)$ ist in $S_{\partial\Delta}$ eine \mathbb{R} -Homologiemannigfaltigkeit.

Beweis Bedingung 1) behandelt den Nullkegel, während 2) gemäß (22.17.4) für die restlichen Kegel steht. ■

Wenn S_Δ eine $(n - 1)$ -Zelle ist, dann gilt 2). Damit ist 22.18 eine Verallgemeinerung des Resultates von Ishida (vgl. [Od, 4.2]), nach dem alle Bettizahlen $b_{2j+1}(X_\Delta)$ verschwinden, wenn $|\Delta|$ konvex ist oder in V konvexes Komplement hat.

Aus dem Lemma läßt sich nun eine topologische Charakterisierung herleiten (Einzelheiten sind in [BaBrFiKp₅] ausgeführt):

22.19 Theorem *Ein volldimensional erzeugter simplizialer Fächer ist genau dann äquivariant formal, wenn $|\partial\Delta|$ eine reelle Homologiemannigfaltigkeit ist.* ■

22.20 Korollar *Es seien Δ_1 und Δ_2 volldimensional erzeugte simpliziale Fächer. In den folgenden Fällen ist Δ_1 genau dann äquivariant formal, wenn das auf Δ_2 zutrifft:*

- 1) $|\Delta_1| = |\Delta_2|$; insbesondere, wenn Δ_1 eine Verfeinerung von Δ_2 ist.
- 2) $|\overset{\circ}{\Delta}_1| = V \setminus |\Delta_2|$, d.h., die Fächer sind „komplementär“. ■

Unser Ziel ist es, die obigen Ergebnisse auf nichtsimpliciale Fächer zu übertragen. Eine der Beweistechniken, von der wir bislang profitiert haben, ist die Poincarédualität. Dies mag motivieren, warum man für nichtsimpliciale Fächer zur Schnitttopologie übergeht, was wir im nächsten Paragraphen vorbereiten werden; die dabei erzielten Ergebnisse liefern durch Spezialisierung auf den simplizialen Fall gleichzeitig weitere Erkenntnisse für die übliche äquivariante Kohomologie.

Aufgabe 22.2 Es gilt genau dann $\mathcal{A}^\bullet(\Delta) = H^0(\Delta, \partial\Delta)$, wenn alle „Fächerlinks“ $S_{\partial\Delta_\tau}$ für $\tau \in \Delta$ zusammenhängend sind.

23. Einführung in die Schnittthomologie

Ist T eine kompakte zusammenhängende orientierbare topologische Mannigfaltigkeit der reellen Dimension m , so existiert (mit Koeffizienten im Hauptidealbereich R , den wir später zu \mathbb{R} spezialisieren werden) ein Schnittprodukt

$$H_i(T) \times H_j(T) \xrightarrow{\cap} H_{i+j-m}(T),$$

das eine duale Paarung in komplementären Dimensionen

$$H_i(T) \times H_{m-i}(T) \rightarrow H_0(T) \cong R$$

liefert. Mit Hilfe der Poincarédualität, die sich über das cap-Produkt mit der Orientierungsklasse $[T] \in H_m(T)$ ergibt, bettet sich das Schnittprodukt in ein kommutatives Diagramm

$$(23.0.1) \quad \begin{array}{ccc} H^i(T) & \times & H^j(T) & \xrightarrow{\cup} & H^{i+j}(T) \\ & & \downarrow P_{m-i}(T) \times P_{m-j}(T) & & \downarrow P_{m-(i+j)}(T) \\ H_{m-i}(T) & \times & H_{m-j}(T) & \xrightarrow{\cap} & H_{m-(i+j)}(T) \end{array}$$

ein; da die vertikalen Poincaréhomomorphismen bijektiv sind, induziert auch das cup-Produkt eine duale Paarung. Wenn T keine Mannigfaltigkeit ist, existiert vom Diagramm (23.0.1) alles bis auf das Schnittprodukt der unteren Zeile. Denn die Poincaréhomomorphismen lassen sich allgemein über das cap-Produkt mit der Fundamentalklasse $[T]$ definieren; sie sind jedoch in der Regel keine Isomorphismen mehr.

Ziel der Schnittthomologie ist es, für eine geeignete Klasse topologischer Räume (Pseudomannigfaltigkeiten, vgl. 23.3), welche insbesondere die reindimensionalen komplexen Varietäten enthält, ein Schnittprodukt zu ermöglichen, welches das Analogon zu Diagramm (23.0.1) kommutativ macht. Obwohl eine ganze Familie solcher Theorien existiert, die durch „Toleranzen“ (Perversitäten) \mathfrak{p} parametrisiert sind³⁵⁾, werden wir uns auf die Theorie zur mittleren Toleranz beschränken. Statt einer genauen Konstruktion der Theorie IH^\bullet verweisen wir etwa auf [Bo] für die zitierten, in unserem Zusammenhang wesentlichen Eigenschaften. Eine schöne Einführung in die Anfangsgründe bringt [Bra]; weitergehend und mit Bezügen zu anderen Theorien ist die Darstellung in [Ki₂]. Eine Standardreferenz für die abstrakte Darstellung ist [GoMcP].

³⁵⁾ Für „normale“ Pseudomannigfaltigkeiten gehört zur minimalen Toleranz die Kohomologie, zur maximalen die Homologie.

Im folgenden betrachten wir nur Pseudomannigfaltigkeiten Z der topologischen Dimension m mit *gerade-kodimensionalen Strata*; als Koeffizienten sind zunächst beliebige Hauptidealbereiche R zulässig (auf die allgemeinere Situation von R -Moduln brauchen wir hier nicht einzugehen); in den entscheidenden Anwendungen wird $R = \mathbb{R}$ sein.

Die gesuchte Schnitttopologie $IH^\bullet(Z)^{36)}$ liegt „in der Mitte“ zwischen Kohomologie und Homologie, i.e., es gibt eine Faktorisierung

$$(23.0.2) \quad P_{m-\bullet}(Z): H^\bullet(Z) \xrightarrow{\alpha} IH^\bullet(Z) \xrightarrow{\omega} H_{m-\bullet}^{\text{cld}}(Z).$$

Vermöge des Homomorphismus α wird $IH^\bullet(Z)$ nach Einführung des „Schnittproduktes“ zu einem (graduerten) $H^\bullet(Z; R)$ -Modul. Ist Z eine R -Homologiemannigfaltigkeit, so sind α und ω Isomorphismen.

23.1 Beispiel Die Pseudomannigfaltigkeit Z habe eine isolierte Singularitätenmenge $S(Z)$, also nur isolierte Punkte, in denen Z keine R -Homologiemannigfaltigkeit ist; es sei weiter $Z_{\text{reg}} := Z \setminus S(Z)$. Dann ist für gerades $m = 2n$

$$IH^j(Z) \cong \begin{cases} H^j(Z_{\text{reg}}) \cong H_{2n-j}^{\text{cld}}(Z), & j < n \\ \text{Im}(H^n(Z) \xrightarrow{P_n(Z)} H_n^{\text{cld}}(Z)), & j = n \\ H^j(Z) \cong H_{2n-j}^{\text{cld}}(Z_{\text{reg}}), & j > n. \blacksquare \end{cases}$$

Entscheidend ist nun die Existenz eines Schnittproduktes, das mit cup- und cap-Produkt sowie der Modulstruktur über $H^\bullet(Z; R)$ verträglich ist: Für kompaktes Z gibt es ein entsprechendes kommutatives Diagramm

$$(23.0.3) \quad \begin{array}{ccccc} H^i(Z) & \times & H^j(Z) & \xrightarrow{\cup} & H^{i+j}(Z) \\ & & \downarrow \text{id} \times \alpha & & \downarrow \alpha \\ H^i(Z) & \times & IH^j(Z) & \xrightarrow{\bullet} & IH^{i+j}(Z) \\ & & \downarrow \alpha \times \text{id} & & \downarrow \omega \\ IH^i(Z) & \times & IH^j(Z) & \xrightarrow{\cap} & H_{m-(i+j)}(Z) \end{array}$$

in dem die mittlere Zeile eine $H^\bullet(Z)$ -Modulstruktur auf $IH(Z)$ definiert.

23.2 Satz Für zusammenhängendes kompaktes Z ist das Schnittprodukt

$$\cap: IH^i(Z; \mathbb{R}) \times IH^{\dim Z - i}(Z; \mathbb{R}) \rightarrow H_0(Z; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$$

eine duale Paarung.

Ein Beweis findet sich in [Bo, V.9.16]. Dort wird dieses Ergebnis gleichzeitig auf nicht kompakte Z übertragen. Dazu benötigt man die Schnitttopologie $IH_c^\bullet(Z)$ mit

³⁶⁾ Wir verwenden hier eine kohomologische Notation.

kompakten Trägern, zu der eine (23.0.2) analoge Faktorisierung des Poincaréhomomorphismus $P_{\bullet}^c(Z)$ gehört. Vermöge der kanonischen Abbildung $H_c^{\bullet}(Z; R) \rightarrow H^{\bullet}(Z; R)$ wird $IH^{\bullet}(Z)$ auch ein $H_c^{\bullet}(Z; R)$ -Modul; führt man in der ersten und der dritten Spalte des Diagramms (23.0.3) kompakte Träger ein, so erhält man eine duale Paarung

$$(23.2.1) \quad \cap: IH_c^i(Z; \mathbb{R}) \times IH^{m-i}(Z; \mathbb{R}) \rightarrow H_0(Z; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$$

entsprechend 23.2 auch für nicht kompaktes Z .

Neben den Vorteilen der Schnitttopologie im Vergleich zur singulären (simplicialen, zellulären, ...) Homologie existieren aber auch unbestreitbare Nachteile: Die Schnitttopologie ist

- 1) nicht in natürlicher Weise funktoriell,
- 2) keine Homotopieinvariante.

Mit der Existenz (und mangelnden Eindeutigkeit) eines (kontravarianten für abgeschlossene bzw. kovarianten für kompakte Träger) assoziierten Homomorphismus $IH(f)$ zu einem gegebenen Morphismus $f: Z_1 \rightarrow Z_2$ algebraischer Varietäten hat sich [Ba-BrFiGaKp] auseinandergesetzt. Vergleichsweise einfach zu sehen ist jedoch, daß ein eindeutig bestimmter Homomorphismus $IH(f)$ existiert, falls f

- a) eine offene Inklusion ist;
- b) eine lokal triviale algebraische Faserung ist;
- c) eine abgeschlossene Einbettung ist, die zusätzlich „transversal“ ist, d.h. mit $m_i := \dim_{\mathbb{R}} Z_i$ gelte für alle Strata S_j einer geeigneten Stratifikation von Z_2 die Abschätzung

$$m_2 - m_1 \leq \dim S_j - \dim(Z_1 \cap S_j);$$

- d) ein surjektiver endlicher Morphismus ist.

Definieren wir nun induktiv über die reelle Dimension m den Begriff einer Pseudomannigfaltigkeit (mit gerade-kodimensionalen Strata) Z :

23.3 Definition *Ein topologischer Raum Z heißt eine Pseudomannigfaltigkeit (mit gerade-kodimensionalen Strata) der topologischen Dimension m , wenn gilt:*

- 1) Für $m \leq 1$ ist Z eine orientierbare m -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit.
- 2) Für $m \geq 2$ existiert eine „Filtrierung“ mit abgeschlossenen Teilmengen von Z der Gestalt

$$Z = Z_m \supsetneq Z_{m-2} \supset Z_{m-4} \supset \dots,$$

die entsprechend der Parität von m mit der leeren Menge Z_{-1} bzw. Z_{-2} aufhört. Sie erfüllt

- a) Jedes Stratum $S_{m-2k} := Z_{m-2k} \setminus Z_{m-2(k+1)}$ ist leer oder eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension $m - 2k$.
- b) S_m ist orientierbar.

c) Jeder Punkt $z \in S_{m-2k}$ besitzt eine „ausgezeichnete Umgebung“

$$U \cong c(L_z) \times B^{m-2k}$$

mit einer $(m-2k)$ -dimensionalen Kugel B^{m-2k} und dem topologischen Kegel $c(L_z)$ über einer $(2k-1)$ -dimensionalen kompakten Pseudomannigfaltigkeit L_z , genannt der „Link“ von z .

23.4 Beispiel Es sei X eine torische Varietät X_Δ . Die Filtrierung (17.12.1) mit einer reellen Indizierung

$$X_{2k} := \bigcup_{\sigma \in \Delta^{n-k}} \mathbb{V}_\sigma = \bigcup_{\sigma \in \Delta^{\geq n-k}} \mathbb{B}_\sigma$$

liefert die Struktur einer Pseudomannigfaltigkeit auf X mit $m = 2n$. Die ausgezeichneten Umgebungen erhält man wie folgt: Liegt $x \in S_{2(n-k)}$ etwa in \mathbb{B}_σ mit $\dim \sigma = k$, so gehört zur äquivarianten Produktzerlegung $X_\sigma = Z_\sigma \times \mathbb{T}^{n-k}$ eine Darstellung $x = (x', x'')$; man fixiere eine Einbettung $(Z_\sigma, x) \hookrightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$. Für ein kleines $\varepsilon > 0$ und die Sphäre S_ε um 0 in \mathbb{C}^p setze man $L_z := Z_\sigma \cap S_\varepsilon$. Mit einer geeigneten Kugel B^{m-2k} in \mathbb{T}^{n-k} um x'' ist $U := B^{m-2k} \times c(L_z)$ eine ausgezeichnete Umgebung von x . ■

Allgemeiner gilt (vgl. [Bo, IV]):

23.5 Satz Jede reindimensionale komplexe Varietät ist eine Pseudomannigfaltigkeit mit gerade-kodimensionalen Strata. ■

Die größtmögliche Filtrierung einer Varietät, in der jeweils absteigend der singuläre Ort als nächstes neues Stratum gewählt wird, ist im allgemeinen nicht fein genug, wie man etwa am Beispiel des Whitneyschirms zeigen kann.

Die lokale Schnitthomologie in einem Punkt $z \in Z$ definiert man mit Hilfe einer ausgezeichneten Umgebung U von z als $\mathcal{IH}_z^j := IH^j(U)$; sie hängt nicht von der Wahl von U ab. Wir führen dies nur für normale Pseudomannigfaltigkeiten (i.e., jeder Punkt besitzt ein Umgebungsfundamentalsystem aus offenen Mengen U , für die $U \setminus Z_{m-2}$ zusammenhängend ist) durch:

23.6 Lemma Für $z \in S_{m-2k}$ in einer normalen Pseudomannigfaltigkeit und eine ausgezeichnete Umgebung U von z gilt:

$$(23.6.1) \quad IH^j(U) \cong \begin{cases} IH^j(U \setminus S_{m-2k}) \cong IH^j(L_z) & \text{für } j \leq k-1 \\ 0 & \text{für } j \geq k. \quad \blacksquare \end{cases}$$

Wieder wollen wir zeigen, daß diese Konstruktion „zwischen“ der Homologie und der Kohomologie von U liegt. Vergleichen wir also die Schnitthomologie von U mit der Homologie und der Kohomologie für einen zusammenhängenden Link L_z von $z \in S_{m-2k}$: Da U zusammenziehbar ist, gilt zunächst:

$$(23.6.2) \quad H^j(U) = \begin{cases} H^j(U \setminus S_{m-2k}) \cong H^j(L_z) & \text{für } j \leq 0 \\ 0 & \text{für } j > 0. \end{cases}$$

In der Homologie erhält man dagegen

$$(23.6.3) \quad H_{m-j}^{\text{cld}}(U) = \begin{cases} H_{m-j}^{\text{cld}}(U \setminus S_{m-2k}) \cong H_{2k-j-1}(L_z) & \text{für } j \leq 2k-2 \\ 0 & \text{für } j \geq 2k-1. \end{cases}$$

Denn zunächst liefert die exakte Homologiesequenz (9.11.2) in Verbindung mit (9.11.3) mit der Bezeichnung $U^\# := U \setminus S_{m-2k}$

$$\dots \rightarrow H_{m-j}^{\text{cld}}(S_{m-2k}) \rightarrow H_{m-j}^{\text{cld}}(U) \rightarrow H_{m-j}^{\text{cld}}(U^\#) \rightarrow H_{m-j-1}^{\text{cld}}(S_{m-2k}) \rightarrow \dots$$

Weiter liefert die *Künnethformel* für abgeschlossene Träger wegen der Zerlegung

$$U \setminus S_{m-2k} \cong B^{m-2k} \times]0, 1[\times L_z$$

die Beziehung

$$H_{m-j}^{\text{cld}}(U^\#) \cong H_{m-2k+1}^{\text{cld}}(B^{m-2k+1}) \otimes H_{2k-j-1}(L_z) \cong \begin{cases} 0 & \text{für } 2k-j-1 < 0 \\ \mathbb{R} & \text{für } 2k-j-1 = 0. \end{cases}$$

Mit Hilfe der Poincarédualität für die Mannigfaltigkeit S_{m-2k} ergibt sich eine exakte Sequenz

$$\dots \rightarrow H^{j-2k}(S_{m-2k}) \rightarrow H_{m-j}^{\text{cld}}(U) \rightarrow H_{2k-j-1}(L_z) \rightarrow H^{j-2k+1}(S_{m-2k}) \rightarrow \dots$$

Da S_{m-2k} ohne Einschränkung zusammenziehbar ist, ergibt sich die Behauptung außer für $j = 2k$ unmittelbar; der Ausnahmefall ergibt sich aus der exakten Sequenz

$$0 \rightarrow H_{m-2k+1}^{\text{cld}}(U) \rightarrow H_0(L_z) \xrightarrow{\zeta} H^0(S_{m-2k}) \rightarrow H_{m-2k}^{\text{cld}}(U) \rightarrow 0,$$

in der ζ ein Isomorphismus ist. ■

Die Schnittthomologie (zur mittleren Toleranz) $IH^\bullet(Z)$ kann elementargeometrisch wie folgt eingeführt werden: Sie ergibt sich (in der üblichen homologischen Formulierung; zur Indexverschiebung vgl. [Bo, V.2.9]) als Homologie eines Kettenkomplexes, den man mit Hilfe der aufsteigenden Filtrierung von Z wie folgt konstruiert:

$$IC_i(Z) := \{ \xi \in C_i(Z); \dim |\xi| \cap Z_{m-2k} \leq i - k - 1, \dim |\partial\xi| \cap Z_{m-2k} \leq i - k - 2 \forall k \}.$$

Für die meisten expliziten Berechnungen ist allerdings eine garbentheoretische Beschreibung in einer geeigneten derivierten Kategorie unerlässlich, vgl. [Bo, V]. Dabei wird die Schnittthomologie sukzessive von dem regulären Teil, auf dem sie mit der Homologie übereinstimmt, auf alle $Z \setminus Z_{m-2k}$ fortgesetzt.

Die Schnittthomologie hängt (auch für kompakte Träger) nur von der Normalisierung des Raumes ab:

23.7 Bemerkung Bezeichnet \tilde{X} die Normalisierung der reindimensionalen algebraischen Varietät X , so ist $IH^\bullet(X) \cong IH^\bullet(\tilde{X})$. ■

Den folgenden, tiefliegenden Zerlegungssatz, der übrigens auch für die unten eingeführte äquivariante Theorie gilt (vgl. etwa [Ki, Seite 394]; für den Spezialfall torischer Varietäten und einer Fächerunterteilung sei auf [BaBrFiKp₅, 2.4] verwiesen), werden wir für simpliziale Desingularisierungen torischer Varietäten benötigen:

23.8 Zerlegungssatz *Ist $X \rightarrow Y$ ein eigentlicher Morphismus reindimensionaler algebraischer Varietäten, so ist $IH^\bullet(Y; \mathbb{R})$ ein direkter Summand von $IH^\bullet(X; \mathbb{R})$. ■*

Ein weiterer sehr tiefliegender Satz ist der „Harte Lefschetzsatz“: Die (irreduzible) algebraische Varietät $X \hookrightarrow \mathbb{P}_\ell$ sei komplex n -dimensional. Das Hyperebenenbündel $\mathbb{P}_\ell \mathcal{O}(1)$ induziert ein Geradenbündel $\mathcal{L} := \mathbb{P}_\ell \mathcal{O}(1)|_X$ auf X , zu dem eine Chernklasse $\omega := \omega_X := c_1(\mathbb{P}_\ell \mathcal{O}(1)|_X) \in H^2(X)$ gehört. Bezüglich der $H^\bullet(X; \mathbb{R})$ -Modulstruktur auf $IH^\bullet(X; \mathbb{R})$ induziert jede cup-Produkt-Potenz ω^j einen Endomorphismus $\mu(\omega^j)$ von $IH^\bullet(X; \mathbb{R})$. Dafür gilt ([BeBeDe, 6.2.10]):

23.9 Harter Lefschetzsatz *Für jedes $j \geq 0$ ist der Vektorraumhomomorphismus*

$$\mu(\omega^j): IH^{n-j}(X; \mathbb{R}) \rightarrow IH^{n+j}(X; \mathbb{R})$$

ein Isomorphismus. ■

Die Konstruktion einer äquivarianten Schnitthomologie (die wir nur mit reellen Koeffizienten betrachten werden) ist mit einem kleinen technischen Problem behaftet, da die Schnitthomologie im Unterschied zur üblichen Homologie nur für endlichdimensionale Räume eingeführt ist. Definiert man die äquivariante Schnitthomologie über eine Approximation, so läßt sich dieses Problem umgehen.

Für eine feste Identifikation $\mathbb{T} \cong (\mathbb{C}^*)^n$ ist das Prinzipalbündel $E\mathbb{T} \rightarrow B\mathbb{T}$ aus (21.1.1) durch die endlichdimensionalen Prinzipalbündel

$$(23.10.1) \quad E_j\mathbb{T} := (\mathbb{C}^{j+1} \setminus \{0\})^n \rightarrow B_j\mathbb{T} := (\mathbb{P}_j)^n$$

approximierbar. Entsprechend wird für eine torische Varietät X das assoziierte Bündel $X_{\mathbb{T}} \rightarrow B\mathbb{T}$ mit Faser X für $j \rightarrow \infty$ durch

$$X_{\mathbb{T},j} := E_j\mathbb{T} \times^{\mathbb{T}} X \rightarrow B_j\mathbb{T}$$

angenähert. Die kanonische Einbettung algebraischer Varietäten $X_{\mathbb{T},j} \hookrightarrow X_{\mathbb{T},j+1}$ ist transversal, wie man in lokalen Koordinaten leicht sieht, induziert also einen kanonischen Homomorphismus $IH^q(X_{\mathbb{T},j+1}) \rightarrow IH^q(X_{\mathbb{T},j})$ von Vektorräumen. Damit setzen wir mit Hilfe des projektiven Limes:

23.10 Definition *Der reelle Vektorraum*

$$IH_{\mathbb{T}}^q(X) := IH_{\mathbb{T}}^q(X; \mathbb{R}) := \lim_{\infty \leftarrow j} IH^q(X_{\mathbb{T},j}; \mathbb{R})$$

bezeichnet die q -te (reellwertige) äquivariante Schnittthomologie von X . Dazu gehört

$$IH_{\mathbb{T}}^{\bullet}(X) := \bigoplus_{q=0}^{\infty} IH_{\mathbb{T}}^q(X).$$

Für festes q wird die Approximation nach [Ze] für $2j \geq q$ stationär, nicht aber für alle q gleichzeitig, so daß man für die Definition von $IH_{\mathbb{T}}^{\bullet}(X)$ über $IH_{\mathbb{T}}^q(X)$ zu gehen hat. Dennoch ist $IH_{\mathbb{T}}^{\bullet}(X)$ ein $H_{\mathbb{T}}^{\bullet}(X)$ - und somit nach 21.5 ein A^{\bullet} -Modul.

Die Approximation kann man vermeiden, wenn man den Begriff der Toleranz zu einer entsprechenden Funktion auf \mathbb{N} erweitert, vgl. etwa den Abschnitt 5 in [Fr₂].

24. Quasikonvexe Fächer

Nun soll die Schnittkohomologie verwendet werden, um die Ergebnisse über die äquivariante Kohomologie simplizialer Varietäten in einer solchen Form auf allgemeinere torische Varietäten zu übertragen, daß schließlich auch *nichtrationale* Fächer behandelt werden können.

Betrachten wir auf dem Fächererraum Δ die (über die Basismengen definierten) Garben³⁷⁾

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\mathbb{T}}^{\bullet} : \sigma &\mapsto H_{\mathbb{T}}^{\bullet}(X_{\sigma}) \\ \mathcal{A}^{\bullet} : \sigma &\mapsto A_{\sigma}^{\bullet} = S^{\bullet}(V_{\sigma}^*) \\ \mathcal{IH}_{\mathbb{T}}^{\bullet} : \sigma &\mapsto IH_{\mathbb{T}}^{\bullet}(X_{\sigma}),\end{aligned}$$

so besagt 21.6 gerade $\mathcal{H}_{\mathbb{T}}^{\bullet} \cong \mathcal{A}^{\bullet}$. Für simpliziales Δ stimmen auch $\mathcal{H}_{\mathbb{T}}$ und $\mathcal{IH}_{\mathbb{T}}$ überein, da X_{Δ} dann nach 9.21 eine rationale Homologiemannigfaltigkeit ist, und es gilt

$$H_{\mathbb{T}}^{\bullet}(X_{\Delta}) \cong \mathcal{H}_{\mathbb{T}}^{\bullet}(\Delta)$$

(vgl. 21.8), was für allgemeines Δ nicht zutrifft, vgl. Beispiel 21.11.

Für $\mathcal{H}_{\mathbb{T}}^{\bullet}$ steht uns vermöge \mathcal{A}^{\bullet} eine konkrete konvex-geometrische Interpretation zur Verfügung. Diese gibt es nicht für die Garbe $\mathcal{IH}_{\mathbb{T}}^{\bullet}$; andererseits hat letztere einen wichtigen Vorteil vor der Garbe $\mathcal{H}_{\mathbb{T}}^{\bullet}$. Die kanonischen Homomorphismen $IH_{\mathbb{T}}^{\bullet}(X_{\Lambda}) \rightarrow \mathcal{IH}_{\mathbb{T}}^{\bullet}(\Lambda)$ erfüllen nämlich:

24.1 Satz *Für alle $\Lambda \prec \Delta$ gilt*

$$IH_{\mathbb{T}}^{\bullet}(X_{\Lambda}) \cong \mathcal{IH}_{\mathbb{T}}^{\bullet}(\Lambda).$$

Beweis Wir führen Induktion über die Anzahl $\#\Lambda$ der Kegel von Λ . Für $\#\Lambda = 1$ ist Λ ein affiner Fächer und die Isomorphie somit definitionsgemäß gegeben. Für $\#\Lambda > 1$ seien $\sigma \in \Lambda^{\max}$ und $\Lambda_0 := \Lambda \setminus \{\sigma\}$. Für ungerade Grade folgt die Behauptung trivialerweise aus 24.2. Wir erhalten andererseits für jedes q ein kommutatives Mayer-Vietoris-Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccc} 0 = IH_{\mathbb{T}}^{2q-1}(X_{\Lambda_0 \cap \mathfrak{S}(\sigma)}) & \rightarrow & IH_{\mathbb{T}}^{2q}(X_{\Lambda}) & \rightarrow & IH_{\mathbb{T}}^{2q}(X_{\Lambda_0}) \oplus IH_{\mathbb{T}}^{2q}(X_{\sigma}) & \rightarrow & IH_{\mathbb{T}}^{2q}(X_{\Lambda_0 \cap \mathfrak{S}(\sigma)}) \\ & & \downarrow \vartheta & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ & & 0 & \rightarrow & \mathcal{IH}_{\mathbb{T}}^{2q}(\Lambda) & \rightarrow & \mathcal{IH}_{\mathbb{T}}^{2q}(\Lambda_0) \oplus \mathcal{IH}_{\mathbb{T}}^{2q}(\sigma) & \rightarrow & \mathcal{IH}_{\mathbb{T}}^{2q}(\Lambda_0 \cap \mathfrak{S}(\sigma)) \end{array}$$

³⁷⁾ In [BaBrFiKp₃] wurde das Symbol $\mathcal{H}_{\mathbb{T}}^{\bullet}$ abweichend für die Prägarbe $\Lambda \mapsto H_{\mathbb{T}}^{\bullet}(X_{\Lambda})$ benutzt!

Dabei folgt die Exaktheit der unteren Sequenz aus der Tatsache, daß $\mathcal{IH}_{\mathbb{T}}^{2q}$ eine Garbe ist. Die vertikalen Homomorphismen kommen von dem kanonischen Homomorphismus der Prägarbe $IH_{\mathbb{T}}^{\bullet}$ auf Δ in die Garbe $\mathcal{IH}_{\mathbb{T}}^{\bullet}$. Die Isomorphismen rechtfertigen sich aus der Induktionsvoraussetzung. Nach dem Fünferlemma ist auch ϑ ein Isomorphismus. ■

Wir haben folgendes Ergebnis benutzt:

24.2 Satz Für jeden Fächer Δ gilt $IH_{\mathbb{T}}^{\text{odd}}(X_{\Delta}) = 0$.

Beweis Ist Δ simplizial, so gilt die Behauptung nach 21.8. Es bezeichne nun Δ' gemäß 11.8 eine simpliziale Verfeinerung von Δ . Nach dem äquivarianten Zerlegungssatz 23.8 ist $IH_{\mathbb{T}}^{\text{odd}}(X_{\Delta})$ ein direkter Summand von $IH_{\mathbb{T}}^{\text{odd}}(X_{\Delta'}) = H_{\mathbb{T}}^{\text{odd}}(X_{\Delta'}) = 0$, und damit folgt die Behauptung. ■

Wenn schon keine konkrete konvex-geometrische Interpretation für $\mathcal{IH}_{\mathbb{T}}^{\bullet}$ existiert, so läßt sich diese Garbe wenigstens als (graduierter) \mathcal{A}^{\bullet} -Modul auf vergleichsweise einfache Art charakterisieren. Wir benutzen dabei folgende Abkürzungen für einen (stets graduiert zu verstehenden) A^{\bullet} -Modul M^{\bullet} bzw. die Garbe \mathcal{E}^{\bullet} :

$$\overline{M}^{\bullet} := M^{\bullet} / \mathfrak{m}_{A^{\bullet}} M^{\bullet} \quad \text{und} \quad E_{\Lambda}^{\bullet} := \mathcal{E}^{\bullet}(\Lambda) \quad \text{für} \quad \Lambda \prec \Delta,$$

wobei wir die letztere Bezeichnung bereits für die Garbe \mathcal{A}^{\bullet} verwendet haben. Für unsere Zwecke entscheidend ist folgende Begriffsbildung für einen „Fächerraum“³⁸⁾ $(\Delta, \Delta \mathcal{A}^{\bullet})$ für einen *nicht notwendig rationalen* Fächer Δ :

24.3 Definition Ein $\Delta \mathcal{A}^{\bullet}$ -Modul $\mathcal{E}^{\bullet} = {}_{\Delta} \mathcal{E}^{\bullet}$ auf Δ heißt *minimale Erweiterungsgarbe*, falls die folgenden Axiome erfüllt sind:

(N) *Normierung*: $\overline{E}_{\mathfrak{o}}^{\bullet} \cong \mathbb{R}^{\bullet}$.

(PF) *Punktale Freiheit*: Alle Halme E_{σ}^{\bullet} sind freie A_{σ}^{\bullet} -Moduln.

(LME) *Lokale Minimalität der Erweiterung mod $\mathfrak{m}_{A^{\bullet}}$* : Für alle $\mathfrak{o} \neq \sigma \in \Delta$ induziert der Einschränkungshomomorphismus $E_{\sigma}^{\bullet} \rightarrow E_{\partial\sigma}^{\bullet}$ von A^{\bullet} -Moduln einen Isomorphismus $\overline{E}_{\sigma}^{\bullet} \rightarrow \overline{E}_{\partial\sigma}^{\bullet}$ von reellen Vektorräumen.

Wie der Beweis von 24.11 zeigt, sind alle Halme E_{σ}^{\bullet} von ${}_{\Delta} \mathcal{E}^{\bullet}$ endlich erzeugte freie A_{σ}^{\bullet} -Moduln, deren Rang unter der Bedingung minimal ist, daß der Einschränkungshomomorphismus $E_{\sigma}^{\bullet} \rightarrow E_{\partial\sigma}^{\bullet}$ surjektiv ist (vgl. Aufgabe 22.1). Dies motiviert die Kennzeichnung „minimal“ für die Erweiterung von $\mathbb{R} \cong \mathcal{E}_{\mathfrak{o}}^{\bullet}$ auf ganz Δ .

24.4 Lemma Eine minimale Erweiterungsgarbe ${}_{\Delta} \mathcal{E}^{\bullet}$ ist *welk* und *verschwindet* in ungeraden Graden.

Beweis Es seien $s \in \mathcal{E}^{\bullet}(\Lambda)$ und $\sigma \in \Delta \setminus \Lambda$ von minimaler Dimension. Dann ist $\sigma \neq \mathfrak{o}$ und s auf $\partial\sigma$ definiert. Nach Aufgabe 22.1 i) ist die Einschränkung $\mathcal{E}^{\bullet}(\sigma) \rightarrow \mathcal{E}^{\bullet}(\partial\sigma)$ surjektiv, woraus mit 22.10 die erste Behauptung folgt. Analog zeigt man induktiv den

³⁸⁾ Damit ist ${}_{\Delta} \mathcal{E}^{\bullet}$ ein Modul auf dem „geringsten Raum“ $(\Delta, \Delta \mathcal{A}^{\bullet})$, vgl. [KpKp].

zweiten Teil: Nach (N) ist E_σ^\bullet auf gerade Grade konzentriert. Gilt dies auf $E_{\partial\sigma}^\bullet$, so überträgt sich das auf E_σ^\bullet wegen der Minimalität der Erweiterung. ■

24.5 Bemerkung Der von der Inklusion einer Faser X in das Bündel $X_{\mathbb{T}} \rightarrow \text{BT}$ induzierte Homomorphismus $IH_{\mathbb{T}}^\bullet(X) \rightarrow IH^\bullet(X)$ faktorisiert über $\overline{IH_{\mathbb{T}}^\bullet(X)}$.

Beweis Zur Fasereinbettung haben wir kommutative Diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \hookrightarrow & X_{\mathbb{T}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{pt} & \hookrightarrow & \text{BT} \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} IH^\bullet(X) & \xleftarrow{\alpha} & IH_{\mathbb{T}}^\bullet(X) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H^\bullet(\text{pt}) & \xleftarrow{\beta} & H^\bullet(\text{BT}) \end{array} ,$$

wobei das zweite die Struktur von $IH^\bullet(X)$ als $A^\bullet = H^\bullet(\text{BT})$ -Modul beschreibt. Da \mathfrak{m}_{A^\bullet} der Kern von β ist, faktorisiert α über den Quotienten nach \mathfrak{m}_{A^\bullet} . ■

Ähnlich wie 21.14 beweist man folgendes Ergebnis (vgl. auch [BaBrFiKp3, 4.1 und 6.1]):

24.6 Theorem Für einen volldimensional erzeugten Fächer Δ sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1) Verschwindungsbedingung: $IH^{\text{odd}}(X_\Delta) = 0$.
- 2) Künnethformel: Es gibt einen Isomorphismus von A^\bullet -Moduln

$$IH_{\mathbb{T}}^\bullet(X_\Delta) \cong H^\bullet(\text{BT}) \otimes_{\mathbb{R}} IH^\bullet(X_\Delta) = A^\bullet \otimes_{\mathbb{R}} IH^\bullet(X_\Delta) .$$

- 3) Reduktionsbedingung: Jede Faserinklusion $X \hookrightarrow X_{\mathbb{T}}$ induziert einen Isomorphismus von graduierten \mathbb{R}^\bullet -Algebren

$$IH^\bullet(X_\Delta) \cong (A^\bullet / \mathfrak{m}_{A^\bullet}) \otimes_{A^\bullet} IH_{\mathbb{T}}^\bullet(X_\Delta) \cong IH_{\mathbb{T}}^\bullet(X_\Delta) / \mathfrak{m}_{A^\bullet} IH_{\mathbb{T}}^\bullet(X_\Delta) .$$

- 4) Freiheitsbedingung: Der A^\bullet -Modul $IH_{\mathbb{T}}^\bullet(X_\Delta)$ ist frei. ■

Da wir hier nur an der Schnitttopologie interessiert sind, bezieht sich für uns der folgende Begriff im Unterschied zur Bezeichnung „äquivariant formal“ stets auf die Schnitttopologie; für simpliziale Fächer stimmen damit beide Bezeichnungen überein:

24.7 Definition Wir nennen eine torische Varietät X_Δ sowie den rationalen Fächer Δ „quasikonvex“, wenn eine der Bedingungen von 24.6 erfüllt ist.

Die für uns wichtigsten Beispiele erhalten wir wie folgt:

24.8 Satz Jede kompakte torische Varietät ist quasikonvex.

Beweis Ist Δ simplizial, so ist Bedingung 24.6 1) nach 18.8 erfüllt. Es bezeichne nun Δ' gemäß 11.8 eine simpliziale Verfeinerung von Δ . Nach dem Zerlegungssatz 23.8 ist $IH^{\text{odd}}(X_\Delta)$ ein direkter Summand von $IH^{\text{odd}}(X_{\Delta'}) = H^{\text{odd}}(X_{\Delta'}) = 0$. Damit folgt die Behauptung. ■

24.9 Satz Ist $\dim \sigma = n$, so ist X_σ quasikonvex.

Beweis Wir verifizieren wieder die Bedingung $IH^{\text{odd}}(X_\sigma) = 0$ aus 24.6. Da X_σ eine ausgezeichnete Umgebung des Fixpunktes x_σ ist, ergibt sich aus 23.6, daß $IH^j(X_\sigma)$ für $j \geq n$ verschwindet, sowie mit $X_\sigma^* := X_\sigma \setminus \{x_\sigma\}$

$$(24.9.0) \quad IH^j(X_\sigma) = \begin{cases} IH^j(X_\sigma^*) & \text{für } j \leq n - 1, \\ 0 & \text{für } j \geq n. \end{cases}$$

Daher sind nur letztere $IH^j(X_\sigma^*)$ zu untersuchen. Die Idee dabei ist, die torische Varietät $X_\sigma^* = X_{\partial\sigma}$ als eine Art „ \mathbb{C}^* -Prinzipalbündel“ über einer geeigneten projektiv algebraischen Basis Y zu realisieren und dann $IH^j(X_\sigma^*)$ mit $IH^j(Y)$ zu vergleichen. Dazu wählen wir einen primitiven Vektor $v \in \sigma^\circ \cap N$ und betrachten die zugehörige Ein-Parameter-Untergruppe λ_v . Ist $u_1, \dots, u_r \in S_\sigma$ ein Erzeugendensystem des Monoids S_σ und

$$X_\sigma \rightarrow \mathbb{C}^r, \quad x \mapsto (u_1(x), \dots, u_r(x)) =: (x_1, \dots, x_r)$$

die zugehörige Einbettung gemäß (3.0.3), so wirkt \mathbb{C}^* vermöge λ_v wie folgt auf X (vgl. § 6)

$$t \cdot x = (t^{\langle u_1, v \rangle} x_1, \dots, t^{\langle u_r, v \rangle} x_r).$$

Wegen $v \in \sigma^\circ$ existiert eine Fortsetzung der Wirkung auf \mathbb{C} , und es gilt $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda_v(t) = x_\sigma$ nach 6.11. Dies liefert übrigens einen weiteren Beweis für 12.4. Da v primitiv ist, operiert λ_v bis auf die endlichen Isotropiegruppen exzeptioneller Bahnen frei (vgl. Aufgabe 24.1 für ein Beispiel einer nichttrivialen Isotropie). Es bezeichne F die endliche Untergruppe von $\lambda_v(\mathbb{C}^*)$, die von diesen Isotropiegruppen erzeugt wird. Definiert man Y als den geometrischen Quotienten

$$\varphi: X_{\partial\sigma} \rightarrow Y := X_{\partial\sigma}/\lambda_v(\mathbb{C}^*),$$

so faktorisiert φ über den geometrischen Quotienten $X_{\partial\sigma}/F$ und macht auf diese Weise $X_{\partial\sigma}/F \rightarrow Y$ zu einem \mathbb{C}^* -Prinzipalbündel; vgl. [BaBrFiKp₃, 1.7]. Ersetzt man $X_{\partial\sigma}$ durch $X_{\partial\sigma}/F$, so ändert sich die Schritthomologie nicht: Die zusammenhängende Gruppe \mathbb{C}^* operiert trivial auf $IH^\bullet(X_{\partial\sigma})$, da jedes $t \in \mathbb{C}^*$ homotop zu $1_{\mathbb{C}^*}$ ist (zur Homotopieinvarianz an dieser Stelle vgl. [Bo, Seite 82, Remark]). Also gilt dies auch für $F \subset \mathbb{C}^*$, und mit [Ki, Lemma 2.12] folgt

$$IH^\bullet(X_{\partial\sigma}/F) \cong IH^\bullet(X_{\partial\sigma})^F \cong IH^\bullet(X_{\partial\sigma}).$$

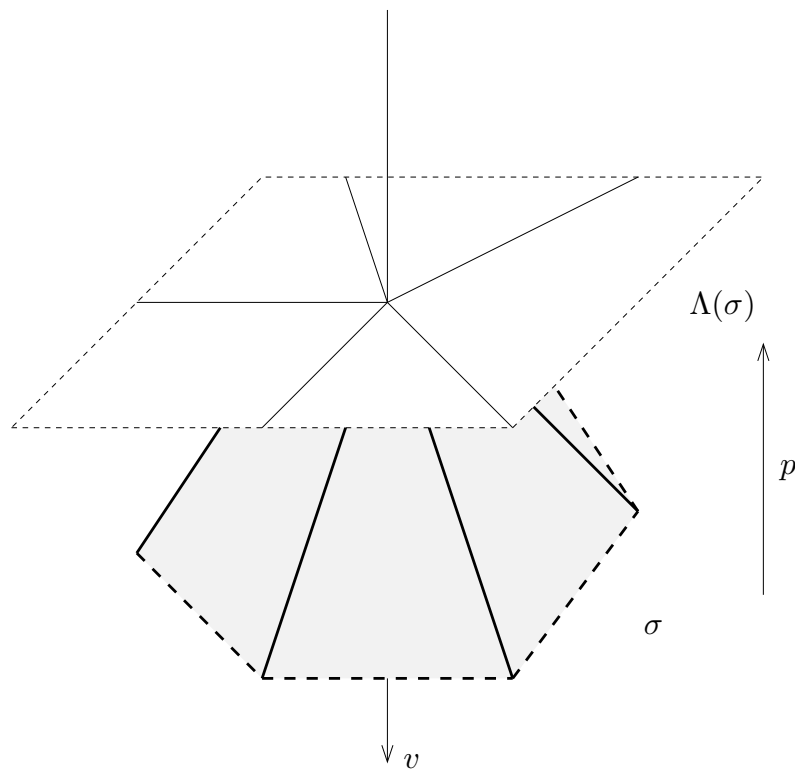
Daher dürfen wir $F = \{1\}$ annehmen, so daß $X_{\partial\sigma} \rightarrow Y$ ein \mathbb{C}^* -Prinzipalbündel ist.

Wir kommen nun zur expliziten Beschreibung der torischen Varietät Y . Dazu seien

$$W := V/\mathbb{R} \cdot v, \quad \mathbb{T}_v := \mathbb{T}/\lambda_v(\mathbb{C}^*), \quad N(v) := N/\mathbb{Z} \cdot v$$

und mit der Projektion $p: V \rightarrow W$

$$(24.9.1) \quad \Lambda := \Lambda(\sigma) := p(\partial\sigma) = \{p(\tau); \tau \in \partial\sigma\}.$$



FIGUR 24.1 Der Fächermorphismus p .

Damit liefert p einen Fächermorphismus $p: (N, \partial\sigma) \rightarrow (N(v), \Lambda)$, und der von p induzierte Morphismus torischer Varietäten ist $\varphi: X_{\partial\sigma} \rightarrow Y = X_{\Lambda}$. Wir wollen dieses \mathbb{C}^* -Bündel durch Hinzunahme eines „unendlich fernen“ Schnittes zu einem Geradenbündel \mathcal{L} über Y ergänzen. Dazu betrachten wir zu dem Fächer, der die „konvexe Hülle“ von σ und $-v$ in V ist, den durch Herausnahme des Kegels σ entstehenden Teilfächer

$$\Sigma := \partial\sigma \cup \{ \tau + \text{keg}(-v); \tau \in \partial\sigma \} .$$

Zum von p induzierten Fächermorphismus $(N, \Sigma) \rightarrow (N(v), \Lambda)$ gehört ein torischer Morphismus $\mathcal{L} \rightarrow Y$. Dieses Geradenbündel auf Y ist nach Konstruktion ample (vgl. 16.17).

Interpretieren wir nun die exakte Schnitttopologiesequenz zum Paar $(\mathcal{L}, X_{\partial\sigma})$:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & IH^{q-1}(X_{\partial\sigma}) & \rightarrow & IH^q(\mathcal{L}, X_{\partial\sigma}) & \rightarrow & IH^q(\mathcal{L}) \rightarrow IH^q(X_{\partial\sigma}) \rightarrow \dots \\ & & & & \uparrow \cong & & \uparrow \cong \\ & & & & IH^{q-2}(Y) & \xrightarrow{\mu(\omega_Y)} & IH^q(Y) \end{array}$$

Der erste senkrecht Pfeil bezeichnet den Thom-Isomorphismus, vgl. [Sp, Th. 5.7.10]; der zweite senkrechte Pfeil folgt aus der Bündelprojektion, vgl. Aufgabe 24.2. Der Homomorphismus

$$\mu(\omega_Y): IH^{q-2}(Y) \rightarrow IH^q(Y)$$

ist die cup-Multiplikation mit $\omega_Y := c_1(\mathcal{L}) \in H^2(Y)$. Insgesamt erhalten wir die „Gysinsequenz“

$$\dots \rightarrow IH^{q-1}(X_{\partial\sigma}) \rightarrow IH^{q-2}(Y) \xrightarrow{\mu(\omega_Y)} IH^q(Y) \rightarrow IH^q(X_{\partial\sigma}) \rightarrow \dots$$

zum Geradenbündel $X_{\partial\sigma} \rightarrow Y$. Da Y projektiv algebraisch und damit vollständig ist, reduziert sich diese Sequenz nach 24.8 für gerade q zu kurzen exakten Sequenzen

$$0 \rightarrow IH^{q-1}(X_{\partial\sigma}) \rightarrow IH^{q-2}(Y) \xrightarrow{\mu(\omega_Y)} IH^q(Y) \rightarrow IH^q(X_{\partial\sigma}) \rightarrow 0.$$

Daher genügt es nach (24.9.0), $\mu(\omega_Y)$ für $q \leq n$ als injektiv nachzuweisen. Nun ist \mathcal{L} ample, eine geeignete Potenz $\mathcal{L}^{\otimes a}$ also sehr ample und somit die Multiplikation mit $c_1(\mathcal{L}^{\otimes a}) = ac_1(\mathcal{L})$ nach dem Harten Lefschetzsatz 23.9 für $q \leq n$ injektiv. Da wir mit reellen Koeffizienten arbeiten, gilt dies auch für die Multiplikation mit ω_Y . ■

Aufgabe 24.1 Für den quadratischen Kegel $X_{\sigma_{12}} \hookrightarrow \mathbb{C}^3$ aus 3.11 zeige man mit dem Vektor $v := (1, 1) \in \sigma_{12}^\circ$ und $\lambda_v: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{T}$, daß die Bahn $V(X_{12}; x, z)$ die Isotropiegruppe \mathbb{Z}_2 hat.

Aufgabe 24.2 Es sei $\pi: \mathcal{L} \rightarrow Y$ ein algebraisches Geradenbündel. Man zeige, daß der induzierte Homomorphismus graduerter Vektorräume $\pi^\bullet: IH^\bullet(Y) \rightarrow IH^\bullet(\mathcal{L})$ ein Isomorphismus ist.

Der Begriff „quasikonvex“ überträgt sich unmittelbar auf Paare, ebenso wie Satz 24.6.

24.10 Satz Für $\sigma \in \Delta^n$ ist das Paar $(X_\sigma, X_{\partial\sigma})$ quasikonvex, i.e.,

$$IH^{\text{odd}}(X_\sigma, X_{\partial\sigma}) = 0.$$

Des weiteren gilt $IH_{\mathbb{T}}^{\text{odd}}(X_\sigma, X_{\partial\sigma}) = 0$.

Beweis Nach (24.9.0) ist $IH^q(X_\sigma) \cong IH^q(X_{\partial\sigma})$ für $q \leq n - 1$ und $IH^q(X_\sigma) = 0$ für $q \geq n$. Daher ist

$$IH^q(X_\sigma, X_{\partial\sigma}) = \begin{cases} 0, & q \leq n \\ IH^{q-1}(X_{\partial\sigma}), & q \geq n + 1. \end{cases}$$

Für den reellen Link L_x zu $x := x_\sigma$ in X_σ ergibt sich mit der Poincarédualität 23.2 und dem Beweis zu 23.6 für die $(2n - 1)$ -dimensionale kompakte orientierbare Pseudomanigfaltigkeit L_x für $q \geq n + 1$

$$IH^{q-1}(X_{\partial\sigma}) \cong IH^{q-1}(L_x) \cong IH^{2n-q}(L_x)^* \cong IH^{2n-q}(X_{\partial\sigma})^* \cong IH^{2n-q}(X_\sigma)^*.$$

Da X_σ nach 24.9 quasikonvex ist, verschwindet $IH^{2n-q}(X_\sigma)$ für ungerade q . Dies liefert $IH^{\text{odd}}(X_\sigma, X_{\partial\sigma}) = 0$.

Für die Untersuchung von $IH_{\mathbb{T}}^{2q+1}(X_\sigma, X_{\partial\sigma})$ verwenden wir die relative Leray-Serre-Spektralsequenz (vgl. [MCl, Prop. 5.4])

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathbb{B}\mathbb{T}) \otimes_{\mathbb{R}} IH^q(X_\sigma, X_{\partial\sigma}) \implies IH_{\mathbb{T}}^{p+q}(X_\sigma, X_{\partial\sigma}).$$

Es reicht der Nachweis, daß die Spektralsequenz auf dem E_2 -Niveau degeneriert. Weil neben $IH^\bullet(X_\sigma, X_{\partial\sigma})$ auch $H^\bullet(\mathbb{B}\mathbb{T})$ keine ungeraddimensionale Kohomologie besitzt, verschwinden alle $E_2^{p,q}$ mit p oder q ungerade. Dies gilt damit auch für alle $E_r^{p,q}$, da sie aus $E_2^{p,q}$ sukzessive durch Untermodul- oder Quotientenbildung entstehen. Folglich sind alle Differentiale $d_r^{p,q}: E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p+r, q-r+1}$ trivial. Dies bedeutet jedoch $E_2^{p,q} \cong IH_{\mathbb{T}}^{p,q}(X)$. ■

24.11 Satz *Zu jedem Fächerraum $(\Delta, \Delta\mathcal{A}^\bullet)$ existiert eine bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte minimale Erweiterungsgarbe $\Delta\mathcal{E}^\bullet$.*

Beweis Wir konstruieren $\mathcal{E}^\bullet = \Delta\mathcal{E}^\bullet$ durch sukzessive Fortsetzung auf alle Kegel σ aus Δ und zeigen dabei gleichzeitig, daß E_σ^\bullet ein endlich erzeugter A_σ^\bullet -Modul und damit $\overline{E}_\sigma^\bullet$ ein endlichdimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum ist.

Für $\sigma = \mathfrak{o}$ sei $\mathcal{E}_\sigma^\bullet = \mathbb{R}$ gemäß der Normierung 24.3 (N). Ist nun \mathcal{E}^\bullet auf dem Fächer $\Delta^{<j}$ bereits konstruiert und $\sigma \in \Delta^j$, so ist nach Induktionsvoraussetzung mit allen E_τ^\bullet für $\tau \prec_1 \sigma$ auch der A^\bullet -Untermodul $E_{\partial\sigma}^\bullet$ von $\bigoplus_{\tau \prec_1 \sigma} E_\tau^\bullet$ ein endlich erzeugter A^\bullet -Modul, denn A^\bullet ist noethersch. Trivialerweise ist damit $\overline{E}_{\partial\sigma}^\bullet$ ein endlichdimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum. Also ist

$$(24.11.1) \quad E_\sigma^\bullet := A_\sigma^\bullet \otimes_{\mathbb{R}} \overline{E}_{\partial\sigma}^\bullet$$

ein endlich erzeugter freier A_σ^\bullet -Modul. Zur surjektiven Abbildung $E_{\partial\sigma}^\bullet \twoheadrightarrow \overline{E}_{\partial\sigma}^\bullet$ reeller Vektorräume wähle man einen homogenen Schnitt $s_\sigma: \overline{E}_{\partial\sigma}^\bullet \rightarrow E_{\partial\sigma}^\bullet$. Damit erhält man einen Einschränkungshomomorphismus $E_\sigma^\bullet \rightarrow E_{\partial\sigma}^\bullet$ durch die Komposition mit der skalaren Multiplikation

$$(24.11.2) \quad E_\sigma^\bullet = A_\sigma^\bullet \otimes_{\mathbb{R}} \overline{E}_{\partial\sigma}^\bullet \xrightarrow{\rho_{\partial\sigma}^\sigma(A^\bullet) \otimes s_\sigma} A_{\partial\sigma}^\bullet \otimes_{\mathbb{R}} E_{\partial\sigma}^\bullet \xrightarrow{\cdot} E_{\partial\sigma}^\bullet.$$

Nach diesem Existenzbeweis kommen wir zur *Eindeutigkeit*, wobei wir wieder induktiv vorgehen: Es sei $\mathcal{F}^\bullet = \Delta\mathcal{F}^\bullet$ eine weitere minimale Erweiterungsgarbe. Nach (N) genügt es, aus der Annahme $\mathcal{E}^\bullet|_{\Delta^{<k}} \cong \mathcal{F}^\bullet|_{\Delta^{<k}}$ für $\sigma \in \Delta^k$ einen bereits existierenden Isomorphismus $\varphi: E_{\partial\sigma}^\bullet \rightarrow F_{\partial\sigma}^\bullet$ zu einem Isomorphismus $E_\sigma^\bullet \rightarrow F_\sigma^\bullet$ fortzusetzen. Wählen wir dazu eine homogene Basis (e_1, \dots, e_r) des freien A_σ^\bullet -Moduls E_σ^\bullet . Die Bilder $\varphi(e_j|_{\partial\sigma})$ lassen sich in der nach 24.4 welken Garbe \mathcal{F} zu homogenen Schnitten $f_j \in F_\sigma^\bullet$ mit $\deg e_j = \deg f_j$ fortsetzen. Setzen wir $\varphi_\sigma(e_j) := f_j$, so erhalten wir kommutative Diagramme

$$\begin{array}{ccc} E_\sigma^\bullet & \xrightarrow{\varphi_\sigma} & F_\sigma^\bullet & & \overline{E}_\sigma^\bullet & \xrightarrow{\overline{\varphi}_\sigma} & \overline{F}_\sigma^\bullet \\ \downarrow & & \downarrow & \text{und} & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ E_{\partial\sigma}^\bullet & \xrightarrow{\varphi} & F_{\partial\sigma}^\bullet & & \overline{E}_{\partial\sigma}^\bullet & \xrightarrow{\cong} & \overline{F}_{\partial\sigma}^\bullet \end{array},$$

in denen $\overline{\varphi}_\sigma$ ersichtlich ein Isomorphismus ist; nach Aufgabe 22.1 iii) trifft dies auch auf die Hochhebung φ_σ von φ zu. ■

Damit können wir von „der“ minimalen Erweiterungsgarbe auf dem Fächerraum $(\Delta, \Delta\mathcal{A}^\bullet)$ sprechen.

24.12 Satz Die Garbe $\Delta\mathcal{A}^\bullet$ ist genau dann die minimale Erweiterungsgarbe des Fächer-
raumes $(\Delta, \Delta\mathcal{A}^\bullet)$, wenn Δ simplizial ist. ■

Beweis Es sei \mathcal{A}^\bullet eine minimale Erweiterungsgarbe auf Δ ; durch Induktion über $\dim \sigma$ zeigen wir, daß jedes $\sigma \in \Delta$ simplizial ist. Dazu sei $\partial\sigma$ bereits als simplizialer Fächer erkannt. Sind v_1, \dots, v_s die primitiven Kantenvektoren von σ , so ist $s \leq \dim \sigma$ zu verifizieren. Zunächst ist $\overline{A}_\sigma^\bullet \cong \overline{A}_{\partial\sigma}^\bullet$ und damit $A_\sigma^2 \rightarrow A_{\partial\sigma}^2$ nach Aufgabe 22.1 i), woraus $\dim A_{\partial\sigma}^2 \leq \dim A_\sigma^2 = \dim \sigma$ folgt. Andererseits existieren eindeutig bestimmte stückweise lineare Funktionen $f_1, \dots, f_s \in A_{\partial\sigma}^2$ mit $f_i(v_j) = \delta_{ij}$, da jeder Kegel in $\partial\sigma$ simplizial ist. Weil die f_i über \mathbb{R} linear unabhängig sind, folgt schließlich $s \leq \dim A_{\partial\sigma}^2$.

Für simpliziales Δ ist umgekehrt nur (LME) zu zeigen, daß also $\overline{A}_\sigma^\bullet \rightarrow \overline{A}_{\partial\sigma}^\bullet$ für simpliziales σ ein Isomorphismus ist. Genauer hat man

$$\overline{A}_\sigma^\bullet = \overline{A}_\sigma^0 \cong \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \overline{A}_{\partial\sigma}^\bullet \cong \overline{A}_{\partial\sigma}^0 \oplus \overline{A}_{\partial\sigma}^{\geq 2} \cong \mathbb{R} \oplus \overline{A}_{\partial\sigma}^{\geq 2},$$

so daß es darum geht, $\overline{A}_{\partial\sigma}^{2q} = 0$ für alle $q \geq 1$ zu verifizieren. Wir gehen durch Induktion über $\dim \sigma =: d$ vor. Zu $f \in A_{\partial\sigma}^{2q}$ sind nach geeigneter Modifikation $h \in \mathfrak{m}_{A^\bullet}$ und g aus $A_{\partial\sigma}^\bullet$ mit $f = hg$ zu finden. Sind $\tau =: \tau_1, \dots, \tau_d$ die Facetten von σ , so sind $\tau \cap \tau_2, \dots, \tau \cap \tau_d$ die Facetten von τ , da σ simplizial ist, und $\partial\tau = \mathfrak{S}(\tau \cap \tau_2, \dots, \tau \cap \tau_d)$. Man setze $f_j := f|_{\tau_j}$; dabei sei ohne Einschränkung $f_1 = 0$. Denn f_1 läßt sich zu einem $f_1^\sigma \in A_\sigma^{2q}$ fortsetzen; dabei bestimmen f und $f - f_1^\sigma$ die gleiche Restklasse in $\overline{A}_{\partial\sigma}^{2q}$. Zu

$$A_{(\sigma, \tau)}^\bullet := \{g \in A_\sigma^\bullet; g|_\tau = 0\}$$

existiert ersichtlich ein $h \in A^2 \subset \mathfrak{m}_{A^\bullet}$ mit $A_{(\sigma, \tau)}^\bullet = hA_\sigma^\bullet$. Es sei nun $i \geq 2$. Zunächst gilt $A_{(\tau, \tau \cap \tau_i)}^\bullet = hA_{\tau_i}^\bullet$. Also existieren Zerlegungen $f_i = hg_i$ mit $g_i \in A_{\tau_i}^\bullet$. Nach Konstruktion stimmen g_i und g_j auf $\tau_i \cap \tau_j$ überein, so daß $\tilde{g} := (g_i)_{i \geq 2}$ ein Element von $A_{\partial\tau}^\bullet$ definiert. Aus der Induktionsvoraussetzung $\overline{A}_\tau^\bullet \cong \overline{A}_{\partial\tau}^\bullet$ folgt $A_\tau^\bullet \rightarrow A_{\partial\tau}^\bullet$ nach Aufgabe 22.1 i). Ist $g_1 \in A_\tau^\bullet$ eine Fortsetzung von \tilde{g} auf $\tau = \tau_1$, so liegt $g := (g_j)_{j=1, \dots, d}$ in $A_{\partial\sigma}^\bullet$, und nach Konstruktion gilt $f = hg \in \mathfrak{m}_{A^\bullet} A_{\partial\sigma}^\bullet$. ■

Die Einführung der minimalen Erweiterungsgarben motiviert sich aus folgendem Beispiel:

24.13 Theorem Für jeden rationalen Fächerraum $(\Delta, \Delta\mathcal{A}^\bullet)$ ist $\Delta\mathcal{IH}_\mathbb{T}^\bullet$ die minimale Erweiterungsgarbe.

Beweis Eigenschaft (N) ergibt sich aus folgender Beziehung, die Beispiel 21.4 1) und die Regularität von \mathbb{T} verwendet:

$$\mathcal{IH}_\mathbb{T}^\bullet(\mathfrak{o}) = IH_\mathbb{T}^\bullet(X_\mathfrak{o}) = H_\mathbb{T}^\bullet(\mathbb{T}) = \mathbb{R}^\bullet.$$

Zu (PF): Für den Nachweis, daß $IH_\mathbb{T}^\bullet(X_\sigma)$ für $\sigma \in \Delta$ ein freier A_σ^\bullet -Modul ist, wählen wir gemäß 3.19 4) äquivariante Zerlegungen

$$\mathbb{T} = \mathbb{T}_\sigma \times \mathbb{T}' \quad \text{und} \quad X_\sigma = Z_\sigma \times \mathbb{T}'$$

mit der Isotropiegruppe \mathbb{T}_σ des Fußpunktes von X_σ . Damit folgt aus der Künnethformel der Schnitttopologie (vgl. [Bo, V.10.19]), wenn man wie am Ende von § 23 angegeben berücksichtigt, daß sich $IH_{\mathbb{T}}^q(X) = \lim_{\infty \leftarrow j} IH^q(X_j)$ für festes q über ein festes j berechnen läßt:

$$\begin{aligned} IH_{\mathbb{T}}^q(X_\sigma) &= IH_{\mathbb{T}_\sigma \times \mathbb{T}'}^q(Z_\sigma \times \mathbb{T}') = IH^q\left(\left((Z_\sigma)_{\mathbb{T}_\sigma, j} \times (\mathbb{T}')_{\mathbb{T}'}\right)\right) \\ &= \bigoplus_{i+\ell=q} IH^i\left((Z_\sigma)_{\mathbb{T}_\sigma, j}\right) \otimes_{\mathbb{R}} H^\ell(\mathbb{T}'_{\mathbb{T}'}) = IH^q\left((Z_\sigma)_{\mathbb{T}_\sigma, j}\right) = IH_{\mathbb{T}}^q(Z_\sigma). \end{aligned}$$

Also kann man ohne Einschränkung $\dim \sigma = n$ annehmen. Dies bedeutet gleichzeitig $A^\bullet = A_\sigma^\bullet$. Mit 24.9 folgt aus 24.6, daß $IH_{\mathbb{T}}^\bullet(X_\sigma)$ ein freier $H^\bullet(\mathbb{B}\mathbb{T})$ -Modul ist. Nach 21.3 ist schließlich $H^\bullet(\mathbb{B}\mathbb{T})$ mit $A^\bullet = A_\sigma^\bullet$ identifizierbar.

Zu (LME): Ohne Einschränkung sei $\sigma \in \Delta^n$. Wir betrachten folgendes kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} IH_{\mathbb{T}}^\bullet(X_\sigma) & \xrightarrow{\alpha} & \overline{IH_{\mathbb{T}}^\bullet(X_\sigma)} & \xrightarrow{\beta} & IH^\bullet(X_\sigma) & \xrightarrow{\gamma} & \tau_{<n} IH^\bullet(X_{\partial\sigma}) \\ \downarrow & & \downarrow \vartheta & & \downarrow & & \parallel \\ IH_{\mathbb{T}}^\bullet(X_{\partial\sigma}) & \xrightarrow{\psi} & \overline{IH_{\mathbb{T}}^\bullet(X_{\partial\sigma})} & \xrightarrow{\psi} & IH^\bullet(X_{\partial\sigma}) & \supset & \tau_{<n} IH^\bullet(X_{\partial\sigma}) \end{array},$$

in dem zu zeigen ist, daß ϑ bijektiv ist. Dabei werden β und ψ durch die Inklusion einer beliebigen Faser $X \hookrightarrow X_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{B}\mathbb{T}$ induziert, vgl. 24.5. Da X_σ nach 24.9 quasikonvex ist, ergibt sich β nach 24.6 als ein Isomorphismus. Ebenso ist γ gemäß 23.6 ein Isomorphismus.

Wegen der Kommutativität des Diagrammes ist nun ersichtlich $\psi \circ \vartheta$ und damit ϑ injektiv. Die Surjektivität von ϑ ist evident, wenn sie für φ nachgewiesen ist. Für ungerades q ist das nach 24.2 trivial. Für gerades q reicht es, $IH_{\mathbb{T}}^{q+1}(X_\sigma, X_{\partial\sigma}) = 0$ zu verifizieren, was in 24.10 geschehen ist. ■

Ersetzt man in dem (nicht aufgenommenen) Beweis von 22.19 die Garbe $\Delta\mathcal{A}^\bullet$ durch die welke Garbe $\Delta\mathcal{E}^\bullet$, so erhält man ganz analog:

24.14 Theorem *Ein volldimensional erzeugter Fächer ist genau dann quasikonvex, wenn $|\partial\Delta|$ eine reelle Homologiemannigfaltigkeit ist. ■*

Damit überträgt sich auch Korollar 22.20 auf nichtsimpliciale Fächer.

24.15 Korollar *Eine Verfeinerung eines Fächers ist genau dann quasikonvex, wenn der Fächer selbst es ist. ■*

Aufgabe 24.3 Für eine Verfeinerung $f: \Delta' \rightarrow \Delta$ von Fächern existiert eine direkte Summenzerlegung von \mathcal{A}^\bullet -Moduln

$$(24.3.1) \quad f_0(\Delta'\mathcal{E}^\bullet) \cong \Delta\mathcal{E}^\bullet \oplus \mathcal{G},$$

vgl. [BaBrFiKp5, 2.5]. Man leite daraus für rationale Fächer ab:

- i) $IH_{\mathbb{T}}^\bullet(X_\Delta)$ ist ein direkter Summand von $IH_{\mathbb{T}}^\bullet(X_{\Delta'})$;

ii) ist Δ quasikonvex, so ist $IH^\bullet(X_\Delta)$ ein direkter Summand von $IH^\bullet(X_{\Delta'})$.

Aufgabe 24.4 Es sei $U \subseteq X_\Delta$ invariant. Man zeige $IH_{\mathbb{T}}^{\text{odd}}(X, U) = 0$.

Aufgabe 24.5 Der Kegel $\sigma = \text{keg}(\rho_1, \dots, \rho_4)$ im \mathbb{R}^3 mit quadratischer Grundfläche sei durch $\rho_i := \text{keg}(e_i)$ für $i = 1, 2, 3$ und $\rho_4 := \text{keg}(e_1 - e_2 + e_3)$ gegeben. Mit den gemäß (21.21.0) definierten Funktionen $\chi_i \in A_{\partial\sigma}^2$ vom Grad 2 zeige man:

$$E_\sigma^\bullet = A^\bullet \otimes A^\bullet \chi_4 \quad \text{und} \quad \overline{E}_\sigma^\bullet = \mathbb{R}^\bullet \otimes \mathbb{R}^\bullet \overline{\chi}_4.$$

25. Virtuelle Schnittthomologie eines Fächers

Die über die Bettizahlen der zugehörigen Varietät eingeführten Invarianten eines rationalen Fächers werden nun auf nichtrationale Fächer übertragen. Die rekursive Berechnung für quasikonvexe Fächer über eine Global-aus-Lokal-Formel und eine Lokal-aus-Global-Formel wird soweit formalisiert, daß die Rolle des Harten Lefschetzsatzes transparent wird. Dies suggeriert eine kombinatorische Version dieses Satzes, die zur Zeit im allgemeinen Falle allerdings noch im Stadium der Vermutung bleibt.³⁹⁾

In diesem Abschnitt seien Δ stets ein volldimensional erzeugter, *nicht notwendig rationaler* Fächer in V und $\mathcal{E} := {}_{\Delta}\mathcal{E}$ die minimale Erweiterungsgarbe von $(\Delta, {}_{\Delta}\mathcal{A}^{\bullet})$.

Wir hatten einen rationalen Fächer Δ „quasikonvex“ genannt, wenn die Freiheitsbedingung von 24.6 erfüllt ist. In Anbetracht von Theorem 24.13 ist daher folgende Verallgemeinerung zulässig:

25.1 Definition *Der Fächer Δ heie (virtuell) quasikonvex, wenn der A^{\bullet} -modul $\mathcal{E}^{\bullet}(\Delta) = E_{\Delta}^{\bullet}$ frei ist.*

Wieder läßt sich diese Eigenschaft charakterisieren:

25.2 Satz *Die folgenden Eigenschaften des Fächers Δ sind äquivalent:*

- 1) Δ ist quasikonvex.
- 2) $\tilde{H}^{\bullet}(\Delta, \partial\Delta; \mathcal{E}^{\bullet}) = 0$.
- 3) Für alle $\sigma \in \Delta$ ist $\tilde{H}^{\bullet}(\Delta/\sigma, \partial\Delta/\sigma; \mathbb{R}) = 0$.
- 4) Der topologische Raum $|\partial\Delta|$ ist eine reelle Homologiemannigfaltigkeit.

Beweis Die Äquivalenz 1) \iff 2) ergibt sich als eine unmittelbare Verallgemeinerung des (ausgeführten bzw. zitierten) Beweises von 22.2. Für die Beziehung 2) \iff 3) beachte man zunächst, daß E_{σ}^{\bullet} ein freier A_{σ}^{\bullet} -Modul, aber $E_{\partial\sigma}^{\bullet}$ ein Torsionsmodul ist. Daher verschwindet kein $K_{\sigma}(\mathcal{E}^{\bullet})$. Also läßt sich Formel (22.12.1) anwenden. Für 3) \iff 4) benutzt man schließlich den Beweis von 22.17 und 22.18 mit der nach 24.4 werten Garbe \mathcal{E}^{\bullet} . ■

Ist Δ nun quasikonvex und zusätzlich rational, so wissen wir aus 24.13 und 24.6 für die Schnittthomologie

$$IH^{\bullet}(X_{\Delta}) \cong \overline{E}_{\Delta}^{\bullet}.$$

³⁹⁾ **Zusatz beim Nachdruck:** Nachdem K. Karu Vermutung 25.12 bewiesen hat, vgl. die Literatur in [BaBrFiKp] Tohoku Math. J. 57, 273 – 292 (2005), ist die Voraussetzung der Rationalität an die Fächer obsolet.

Dies legt folgende Verallgemeinerung nahe:

25.3 Definition *Unter der virtuellen (reellen) Schnittthomologie $IH^\bullet(\Delta)$ des quasikonvexen Fächers Δ verstehen wir den graduierten Vektorraum $\overline{E}_\Delta^\bullet$; die zugehörigen Dimensionen heißen die virtuellen Bettizahlen von Δ .*

Zur rekursiven Berechnung der virtuellen Bettizahlen verwenden wir das Poincarépolynom

$$IP_\Delta := \sum_{j \geq 0} \dim_{\mathbb{R}}(\overline{E}_\Delta^j) T^j \in \mathbb{N}[T],$$

wobei wir die Abkürzung $IP_\sigma := IP_{\mathfrak{S}(\sigma)}$ verwenden.

Der erste Schritt zur Berechnung ist das folgende Resultat:

25.4 Global-aus-Lokal-Formel *Ist der Fächer Δ quasikonvex, so gilt für die Poincaréreihe*

$$(25.4.1) \quad IP_\Delta = \sum_{\sigma \in \Delta \setminus \partial\Delta} (T^2 - 1)^{\text{codim } \sigma} IP_\sigma .$$

Beweis Nach 25.2 2) ist der Komplex $C^\bullet(\Delta, \partial\Delta; \mathcal{E})$ azyklisch. Wie im Beweis von 22.5 2) folgt daraus die Behauptung. ■

Analog kann man für quasikonvexes Δ zeigen:

$$(25.4.2) \quad IP_{(\Delta, \partial\Delta)} = \sum_{\sigma \in \Delta} (T^2 - 1)^{\text{codim } \sigma} IP_\sigma .$$

Damit bleiben die lokalen Poincaréreihen IP_σ zu bestimmen. Dies ist einfach für simpliziale Kegel:

25.5 Bemerkung *Ist σ simplizial, so ist $IP_\sigma = 1$. Insbesondere ist also $IP_\sigma = 1$ für $\sigma \in \Delta^{\leq 2}$.*

Beweis Für simpliziales σ gilt $E_\sigma^\bullet \cong A_\sigma^\bullet$ nach 21.6. Also ist $\overline{E}_\sigma^\bullet \cong \overline{A}_\sigma^\bullet = \mathbb{R}^\bullet$. ■

Für den zweiten Schritt zur Berechnung der virtuellen Bettizahlen ordnen wir wie im Beweis von 24.9 einem Kegel $\sigma \in \Delta^j$ mit $j \geq 1$ einen polytopischen Fächer $\Lambda(\sigma)$ zu, wobei V durch den j -dimensionalen Vektorraum V_σ zu ersetzen ist: Zu fixiertem $v \in \sigma^\circ \cap N_\sigma$ seien

$$W_\sigma := V_\sigma / \mathbb{R} \cdot v, \quad \mathbb{T}_v := \mathbb{T}_\sigma / \lambda_v(\mathbb{C}^*), \quad N(v) := N_\sigma / \mathbb{Z} \cdot v$$

mit der Projektion $p: V_\sigma \rightarrow W_\sigma$ und dem Fächer $\Lambda(\sigma) := p(\partial\sigma)$.

25.6 Lokal-aus-Global-Formel *Ist $\sigma \in \Delta^j$ rational mit $j \geq 1$, so gilt*

$$IP_\sigma = \tau_{<j}((1 - T^2) IP_{\Lambda(\sigma)}) .$$

Beweis Zunächst gilt $\overline{E}_\sigma^\bullet \cong \overline{E}_{\partial\sigma}^\bullet$ nach (LME). Da $\Lambda := \Lambda(\sigma)$ als vollständiger Fächer quasikonvex ist, ergibt sich weiter $E_{\partial\sigma}^\bullet = G_\Lambda^\bullet$ mit der minimalen Erweiterungsgarbe $\mathcal{G} := {}_\Lambda \mathcal{E}^\bullet$ zu Λ . Die behauptete Formel bedeutet damit:

$$(25.6.1) \quad \dim \overline{E}_\sigma^q = \dim \overline{E}_{\partial\sigma}^q \stackrel{!}{=} \begin{cases} \dim \overline{G}_\Lambda^q - \dim \overline{G}_\Lambda^{q-2} & \text{für } q \leq j-1 \\ 0 & \text{für } q \geq j. \end{cases}$$

Dies soll nunmehr verifiziert werden. Dazu sei $\tilde{\psi}: V_\sigma \rightarrow \mathbb{R}$ linear mit $\tilde{\psi}(v) = -1$. Die Funktion $\psi := \tilde{\psi} \circ (p|_{\partial\sigma})^{-1}: W_\sigma \rightarrow \mathbb{R}$ ist stückweise linear und streng konkav, und es gelten nach Identifikation von $B^\bullet := S^\bullet(W_\sigma^*)$ mit $p^{-1}(B^\bullet)$ in A^\bullet

$$A_\sigma^\bullet = S^\bullet(V_\sigma^*) = B^\bullet[\tilde{\psi}] \quad \text{und} \quad \mathfrak{m}_{A_\sigma^\bullet} = A_\sigma^\bullet \mathfrak{m}_{B^\bullet} + A_\sigma^\bullet \tilde{\psi}.$$

Damit erhalten wir für jedes q einen Isomorphismus reeller Vektorräume

$$(25.6.2) \quad \overline{E}_{\partial\sigma}^q \cong \overline{G}_\Lambda^q / \psi \overline{G}_\Lambda^{q-2}.$$

Da Λ projektiv algebraisch ist (und nur dafür wurde σ als rational vorausgesetzt), existiert nach 24.13 wie im Beweis von 24.9 ein Diagramm

$$(25.6.3) \quad \begin{array}{ccc} \overline{G}_\Lambda^{q-2} & \xrightarrow{\mu(\psi)} & \overline{G}_\Lambda^q \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ IH^{q-2}(X_\Lambda) & \xrightarrow{\mu(\omega_\Lambda)} & IH^q(X_\Lambda) \end{array} .$$

Die Funktion ψ gehört wie im Beweis von 24.9 zu einem Geradenbündel \mathcal{L} auf X_Λ . Die Chernklasse $c_1(\mathcal{L}) \in H^2(X_\Lambda; \mathbb{Z})$ läßt sich zu einer „äquivarianten Chernklasse“ $c_1^\mathbb{T}(\mathcal{L}) = c_1(\mathcal{L}_\mathbb{T}) \in H_\mathbb{T}^2(X_\Lambda; \mathbb{Z})$ hochheben, für die mit dem Isomorphismus aus Aufgabe 21.2 nach [BaBrFiKp₃, 1.8] gilt:

$$A_\Lambda^2 \cong H_\mathbb{T}^2(X_\Lambda) \rightarrow H^2(X_\Lambda), \quad \psi \mapsto c_1^\mathbb{T}(\mathcal{L}) \mapsto c_1(\mathcal{L}).$$

Daher kommutiert das Diagramm (25.6.3), und wir können den harten Lefschetzsatz 23.9 anwenden, nach dem die Abbildung $\mu(\omega_\Lambda): IH^{q-2}(X_\Lambda) \rightarrow IH^q(X_\Lambda)$ für $q \leq j$ injektiv und für $q \geq j$ surjektiv ist, so daß (25.6.1) aus (25.6.2) folgt. ■

25.7 Korollar *Ist der Fächer Δ rational und quasikonvex, so gilt*

$$IH^{\text{odd}}(\Delta) = 0 = IH_c^{\text{odd}}(\Delta).$$

Beweis Man erhält das Resultat für abgeschlossene Träger durch Rekursion über 25.4 und 25.6. Für kompakte Träger wendet man die Poincarédualität der Schnitttopologie (23.2.1) an. ■

25.8 Beispiel Ist Δ quasikonvex, so gilt

$$\overline{E}_{(\Delta, \partial\Delta)}^{2q} \cong \begin{cases} 0, & q \geq n+1 \\ \mathbb{R} & q = n \\ \mathbb{R}^{k(\Delta)-n} & q = n-2 \end{cases} .$$

Beweis Wir führen Induktion über $n = \dim \Delta$ durch. Der Fall $n = 0$ ist trivial, nach Induktionsvoraussetzung erfüllen alle (vollständigen) $\Lambda(\sigma)$ die analoge Behauptung. Zunächst folgt aus (25.4.2):

$$\tau_{\geq 2n-2} IP_{(\Delta, \partial\Delta)} = (T^{2n} - nT^{2n-2}) IP_0 + \sum_{\rho \in \Delta^1} T^{2n-2} IP_\rho + \sum_{r \geq 2} \sum_{\sigma \in \Delta^r} T^{2n-2r} IP_\sigma.$$

Wenn σ rational ist, läßt sich 25.6 anwenden; mit 25.5 folgt aus den Induktionsvoraussetzung:

$$\tau_{\geq 2n-2} IP_{(\Delta, \partial\Delta)} = (k(\Delta) - n)T^{2n-2} + T^{2n}.$$

Wenn σ nicht rational ist, so fehlt nur der Nachweis, daß IP_σ vom Grade höchstens $2r - 4$ ist. Auf den vollständigen Fächer $\Lambda := \Lambda(\sigma)$ der Dimension $r - 1$ wenden wir im Beweis von 25.6 die Formel (25.15.2) an: Die darstellende Funktion ψ liegt nicht in $A^2 \cdot E_\Lambda^0$, da ihre Einschränkung auf das Einsgerüst nicht global linear ist. Folglich ist $\mu(\psi): \overline{E}_\Lambda^0 \rightarrow \overline{E}_\Lambda^2$ injektiv, nach (25.15.2) also die duale Abbildung $\overline{E}_\Lambda^{2r-4} \rightarrow \overline{E}_\Lambda^{2r-2}$ surjektiv. Damit hat IP_σ für $r \geq 2$ in der Tat höchstens den Grad $2r - 4$. ■

Ist Δ sogar vollständig, so liefert 25.8 mit der Poincarédualität 23.2:

$$\overline{E}_\Delta^0 \cong \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \overline{E}_\Delta^2 \cong \mathbb{R}^{k(\Delta)-n}.$$

Über die Schnittbettizahlen erhält man auch Informationen zu den üblichen Bettizahlen: Es bezeichne $s(\Delta)$ die komplexe Dimension der abgeschlossenen invarianten Untervarietät aller Punkte, in denen X_Δ keine rationale Homologiemannigfaltigkeit ist. Damit ist $s(\Delta)$ gleichzeitig die maximale Kodimension eines nicht simplizialen Kegels in Δ . Der leeren Menge ordnen wir dabei die Dimension -1 zu.

In [BaBrFiKp₂, § 13] wird für die Trägerfamilien $\varphi = c, \text{cld}$ gezeigt:

25.9 Satz *Es sei U eine offene Teilmenge der torischen Varietät X_Δ mit höchstens $(n - 1 + s)$ -dimensionalem Komplement für ein $s \geq s(\Delta)$. Dann ist der Vergleichshomomorphismus*

$$\alpha_\varphi^j: H_\varphi^j|_U(U) \rightarrow IH_\varphi^j(X)$$

surjektiv für $j = n + s$ und bijektiv für $j \geq n + s + 1$. Ist $n + s$ gerade, so bleibt die Behauptung korrekt, wenn in allen Abschätzungen n durch $n - 1$ ersetzt wird. ■

Eine duale Aussage gilt für den Vergleichshomomorphismus ω_φ^j mit der Homologie.

25.10 Beispiel Die lokalen Bettizahlen $b_{x_\sigma}^j(X_\sigma)$ zu einem rationalen Kegel $\sigma \in \Delta^n$ verschwinden für ungerade $j \geq n + 1 + s(\sigma)$.

Beweis Die lokale Bettizahl $b_{x_\sigma}^j(X_\sigma)$ ist über die Kohomologie als Dimension von $H_c^j(X_\sigma)$ definierbar. In der Schnittthomologietheorie verschwindet die Zahl $Ib_{x_\sigma}^j(X_\sigma) = \dim IH_c^j(X_\sigma)$ nach 25.7 für ungerades j . Daher folgt die Behauptung aus 25.9. ■

25.11 Korollar *Für rationale quasikonvexe Fächer Δ ist IP_Δ eine kombinatorische Invariante.*

Beweis Im simplizialen Fall wurde die Behauptung in 22.7 gezeigt. Für einen induktiven Beweis sei die Behauptung für höchstens $(n - 1)$ -dimensionale Varietäten nachgewiesen. Ist nun $\sigma \neq \sigma \in \Delta$, so ist der kombinatorische Typ von $\Lambda(\sigma)$ durch σ festgelegt, so daß jedes IP_σ nach 25.6 und damit dann auch IP_Δ nach 25.4 eine kombinatorische Invariante ist. ■

Die Formel aus 25.6 läßt sich auch für nichtrationale Fächer Δ der Dimension 3 beweisen. Dies ist ein erster Hinweis auf folgende Vermutung:

25.12 Vermutung 1: Allgemeine Lokal-aus-Global-Formel Die Formel aus 25.6 gilt auch für nicht rationale Fächer.

Wie die Rolle des Diagramms (25.6.3) im Beweis von 25.6 zeigt, ergibt sich Vermutung 25.12, wenn folgende Vermutung zu beweisen ist:

25.13 Vermutung 2: Kombinatorischer harter Lefschetzsatz für minimale Erweiterungsgerben Ist Δ ein vollständiger Fächer und $\psi \in \mathcal{A}^2(\Delta)$ bezüglich Δ streng konkav, so ist der von der Multiplikation $\mu(\psi): \Delta \mathcal{E}^{\bullet-2} \rightarrow \Delta \mathcal{E}^\bullet$ induzierte Vektorraumhomomorphismus

$$\overline{E}_\Delta^{q-2} \rightarrow \overline{E}_\Delta^q$$

injektiv für $q \leq n + 1$ und surjektiv für $q \geq n + 1$.

Diese Vermutung läßt sich auf den Beweis der Surjektivität (äquivalent dazu: der Injektivität) reduzieren. Dazu verwendet man eine kombinatorische Poincarédualität auf vollständigen Fächern Δ , die durch eine duale Paarung⁴⁰⁾

$$(25.15.1) \quad E_\Delta^\bullet \times E_\Delta^\bullet \rightarrow A^\bullet[-2n]$$

gegeben ist. Wir wollen andeuten, wie sich eine solche Dualität für einen n -dimensionalen vollständigen Fächer Δ rekursiv aus der Gültigkeit der Poincarédualität für alle Fächer $\Lambda(\sigma)$ mit $\sigma \in \Delta$ ergibt; wir erinnern daran, daß alle $\Lambda(\sigma)$ vollständig und niederdimensional sind.

Für *simpliziales* vollständiges Δ ist die Situation wegen $\Delta \mathcal{E}^\bullet \cong \Delta \mathcal{A}^\bullet$ gemäß 21.8 vergleichsweise einfach: Durch

$$\Delta \mathcal{A}^\bullet \times \Delta \mathcal{A}^\bullet \rightarrow \Delta \mathcal{A}, \quad (f, g) \mapsto fg$$

ist $\Delta \mathcal{A}^\bullet$ eine graduierte Garbe von kommutativen assoziativen \mathbb{R} -Algebren. Mit einer zusätzlichen Auswertung erhalten wir eine Paarung

$$A_\Delta^\bullet \times A_\Delta^\bullet \rightarrow A_\Delta^\bullet \xrightarrow{\varepsilon} A^\bullet[-2n],$$

von der zu zeigen ist, daß sie dual ist. Für eine explizite Konstruktion einer solchen Linearform (vom Grad 0) fixieren wir zunächst eine Volumenform ω auf $V = |\Delta|$.

⁴⁰⁾ definiert durch $\tau_{=j}(A^\bullet[-2n]) = A^{j-2n}$

Für jeden Kegel σ wählen wir dann eine Basis (e_1, \dots, e_n) aus Kantenvektoren mit $\omega(e_1, \dots, e_n) = 1$. Es bezeichne (ℓ_1, \dots, ℓ_n) die duale Basis, weiter sei $f_\sigma := \ell_1 \cdots \ell_n$. Damit definieren wir ε sogar im relativen Fall als die Komposition

$$E_{(\Delta, \partial\Delta)}^\bullet \cong A_{(\Delta, \partial\Delta)}^\bullet \subset \bigoplus_{\sigma \in \Delta^n} A_\sigma^\bullet \longrightarrow Q(A^\bullet), \quad f = (f_\sigma)_{\sigma \in \Delta^n} \longmapsto \sum_{\sigma \in \Delta^n} \frac{f_\sigma}{h_\sigma},$$

die das von den $1/h_\sigma$ erzeugte homogene gebrochene Ideal (vom Grad $-2n$) in den Quotientenkörper $Q(A^\bullet)$ abbildet. Zu zeigen ist nunmehr, daß die rationale Function $\varepsilon(f) = \sum_{\sigma} f_\sigma/h_\sigma$ sogar regulär ist. Die Nenner sind Produkte von Linearformen ℓ_τ , die auf den Facetten $\tau \in \Delta^{n-1}$ verschwinden, und da ein solcher Faktor ℓ_τ in keinem Nenner h_σ außer für $\tau < \sigma$ auftritt, genügt es zu verifizieren, daß $\sum_{\sigma \succ \tau} f_\sigma/h_\sigma$ längs $\overset{\circ}{\tau}$ regulär ist. Wenn τ in $\partial\Delta$ liegt, dann verschwindet die zugehörige Funktion f_σ auf τ und ist somit durch ℓ_τ teilbar. Folglich sei nun τ eine gemeinsame Seite zweier Kegel σ^+ und σ^- in Δ^n . Es reicht aus, den Beitrag $f^+/h^+ + f^-/h^-$ dieser beiden Kegel zur Gesamtsumme zu untersuchen. Wir können die Basis von σ^+ so anordnen, daß e_1, \dots, e_{n-1} die Facette τ erzeugen und daß $\omega(e_1, \dots, e_{n-1}, e_n^+) = 1$ gilt. Ergänzen wir e_1, \dots, e_{n-1} zu einer Basis von σ^- , dann liefert der Vektor e_n^- , der die verbleibende Kante von σ^- erzeugt, die „falsche“ Orientierung im Vergleich zur ursprünglichen Basiswahl zu σ^- , also gilt $\omega(e_1, \dots, e_{n-1}, e_n^-) = -1$. Damit folgt $e_n^+ + e_n^- = \sum_{j=1}^{n-1} r_j e_j$ und somit

$$\ell_j^- = \ell_j^+ - r_j \ell_n^+ \quad \text{für } 1 \leq j \leq n-1 \quad \text{und} \quad \ell_n^- = -\ell_n^+,$$

wobei $(\ell_1^-, \dots, \ell_n^-)$ die duale Basis von $(e_1, \dots, e_{n-1}, e_n^-)$ (mit $\ell_\tau = \pm \ell_n^\pm$) ist. Es ergibt sich mit $\prod := \prod_{j=1}^{n-1}$:

$$\frac{f^- h^+ + f^+ h^-}{h^+ h^-} = - \frac{f^- \prod \ell_j^+ + f^+ \prod \ell_j^-}{\ell_n^+ \prod (\ell_j^+ \ell_j^-)}.$$

Der Zähler ist von der Gestalt $f^- \prod \ell_j^+ - f^+ \prod (\ell_j^+ - r_j \ell_n^+)$. Weil auf τ die Linearform ℓ_n^+ verschwindet und $f^+ = f^-$ gilt, muß ℓ_n^+ den Zähler teilen.

Für nichtsimpliciales Δ haben wir zunächst auf $\Delta \mathcal{E}^\bullet$ eine Multiplikation einzuführen, von der allerdings wegen der dabei auftretenden Willkür keine Assoziativität zu erwarten ist:

25.14 Lemma *Die multiplikative Struktur auf $\Delta \mathcal{E}^\bullet|_{\Delta \leq 2}$ läßt sich so fortsetzen, daß $\Delta \mathcal{E}^\bullet$ auf ganz Δ eine Garbe von kommutativen, nicht notwendig assoziativen \mathbb{R} -Algebren wird.*

Beweis Es sei $\sigma \in \Delta$ ein minimaler Kegel, für den auf E_σ^\bullet noch keine Multiplikation erklärt ist; wir haben eine solche so einzuführen, daß die Einschränkungabbildung $\mathcal{E}^\bullet(\sigma) \rightarrow \mathcal{E}^\bullet(\partial\sigma) = E_{\partial\sigma}^\bullet$ ein Homomorphismus wird. Ohne Einschränkung sei $\sigma \in \Delta^n$. Für ein $v \in \sigma^\circ$ bezeichne B^\bullet das Bild der kanonischen Inklusion

$$S^\bullet((V/\mathbb{R}v)^*) \hookrightarrow S^\bullet(V^*) = A^\bullet.$$

Dann ist $E_{\partial\sigma}^\bullet$ ein freier B^\bullet -Modul (vgl. den Beweis von 25.6). Mit einem Schnitt $s: \overline{E}_{\partial\sigma}^\bullet \rightarrow E_{\partial\sigma}^\bullet$ wie in (24.11.2) erhält man eine Zerlegung der Einschränkungabbildung (wegen $A^\bullet = A_\sigma^\bullet$) in der Form

$$E_\sigma^\bullet = A^\bullet \otimes_{\mathbb{R}} \overline{E}_{\partial\sigma}^\bullet \xrightarrow{1 \otimes s} A^\bullet \otimes_{\mathbb{R}} E_{\partial\sigma}^\bullet \rightarrow A^\bullet \otimes_{B^\bullet} E_{\partial\sigma}^\bullet =: F_\sigma^\bullet \xrightarrow{\beta} A^\bullet \otimes_{A^\bullet} E_{\partial\sigma}^\bullet = E_{\partial\sigma}^\bullet .$$

Die Komposition der beiden ersten Abbildungen werde fortan mit α bezeichnet. Wenn man eine direkte Zerlegung $F_\sigma^\bullet = \alpha(E_\sigma^\bullet) \oplus K^\bullet$ in A^\bullet -Moduln mit $\alpha(E_\sigma^\bullet) \cong E_\sigma^\bullet$ und $\beta(K^\bullet) = 0$ finden kann, dann liefert die Projektion $F_\sigma^\bullet \rightarrow \alpha(E_\sigma^\bullet)$ mit dem auf F_σ^\bullet bereits aus den Vorgaben existierenden Produkt ein solches auf E_σ^\bullet durch die Komposition

$$E_\sigma^\bullet \times E_\sigma^\bullet \xrightarrow{\alpha \times \alpha} F_\sigma^\bullet \times F_\sigma^\bullet \rightarrow F_\sigma^\bullet \twoheadrightarrow \alpha(E_\sigma^\bullet) \cong E_\sigma^\bullet .$$

In der Tat ist die Teilabbildung $\alpha: E_\sigma^\bullet \rightarrow F_\sigma^\bullet$ injektiv mit einem direkten Komplement $F_\sigma^\bullet = \alpha(E_\sigma^\bullet) \oplus K^\bullet$: Ist c_1, \dots, c_r eine Basis des freien A^\bullet -Moduls E_σ^\bullet , so ist $\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_r$ eine \mathbb{R} -Basis von $\overline{E}_\sigma^\bullet$ nach Aufgabe 22.1 i). Der Homomorphismus $\bar{\alpha}$ faktorisiert $\overline{E}_\sigma^\bullet \cong \overline{E}_{\partial\sigma}^\bullet$ und ist somit injektiv: Ergänzt man $\overline{\alpha}(c_1), \dots, \overline{\alpha}(c_r)$ durch $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_t$ zu einer Basis von $\overline{F}_\sigma^\bullet$, so hat K^\bullet in dem freien A^\bullet -Modul F_σ^\bullet die Basis f_1, \dots, f_t , wobei die f_j ohne Einschränkung homogen gewählt seien. Da ${}_{\Delta} \mathcal{E}^\bullet$ welk ist läßt sich jedes $\beta(f_j)$ zu einem $g_j \in E_\sigma^\bullet$ fortsetzen. Ersetzt man K^\bullet durch $\sum A^\bullet (f_j - \alpha(g_j))$, so sieht man, daß ohne Einschränkung $\beta(K^\bullet) = 0$ gilt. ■

Damit läßt sich die gesuchte Paarung (25.15.1) konstruieren, denn es steht 25.6 zur Verfügung, so daß wie in 25.8 gilt

$$\overline{E}_\Delta^j = \begin{cases} \mathbb{R}, & j = 2n \\ 0, & j \geq 2n + 1 \end{cases} .$$

Für die Auswertungsabbildung ε verwenden wir die (bis auf reelles Vielfache eindeutige) Linearform $\varepsilon \in \text{Hom}^{A^\bullet}(E_\Delta^\bullet, A^\bullet[-2n])$ vom Grad 0 auf dem freien A^\bullet -Modul E_Δ^\bullet ; sie bildet insbesondere $E_\Delta^{\leq 2n}$ auf 0 ab. Mit Hilfe des in 25.14 gewählten Produktes erhalten wir damit die Paarung

$$(25.15.1) \quad E_\Delta^\bullet \times E_\Delta^\bullet \rightarrow E_\Delta^\bullet \xrightarrow{\varepsilon} A^\bullet[-2n] .$$

In [BaBrFiKp₅] wird nun folgende kombinatorische Poincarédualität gezeigt:

25.15 Theorem *Ist Δ ein vollständiger Fächer der Dimension n , so ist die Paarung*

$$E_\Delta^\bullet \times E_\Delta^\bullet \rightarrow A^\bullet[-2n]$$

dual.

Mit anderen Worten: Die Determinante dieser bilinearen Abbildung zum freien A^\bullet -Modul E_Δ^\bullet ist eine Einheit in A^\bullet . Dies gilt sogar allgemeiner in einer relativen Version für equivariant formale Fächer Δ , wo für $E_{(\Delta, \partial\Delta)}^\bullet := \ker(\rho_{\partial\Delta}^\Delta: E_\Delta^\bullet \rightarrow E_{\partial\Delta}^\bullet)$ eine Dualität

$$E_\Delta^\bullet \times E_{(\Delta, \partial\Delta)}^\bullet \rightarrow A^\bullet[-2n]$$

konstruiert wird. Damit läßt sich rekursiv zunächst eine lokale relative Poincarédualität für $\sigma \in \Delta^n$ zeigen, wenn 25.15 für den vollständigen $(n - 1)$ -dimensionalen Fächer $\Lambda(\sigma)$ gezeigt ist. Daraus läßt sich die globale relative Poincarédualität für n -dimensionales quasikonvexes Δ ableiten. Dabei übernimmt $E_{(\Delta, \partial\Delta)}^\bullet$ die Rolle der kompakt getragenen Kohomologie im Falle rationaler Fächer. Im vollständigen Fall reduziert sich das relative Ergebnis ersichtlich auf 25.15. ■

Nun können wir auf die angekündigte Reduktion von Vermutung 2 zurückkommen: Die Paarung (25.15.1) induziert eine duale Paarung

$$(25.15.2) \quad \overline{E}_\Delta^\bullet \times \overline{E}_{(\Delta, \partial\Delta)}^\bullet \rightarrow \overline{A}^\bullet[-2n] \cong A^0 = \mathbb{R}$$

reeller Vektorräume. Die zugehörige Multiplikation $\overline{\mu(\psi)}$ ist selbstadjungiert, also ist der Homomorphismus $\overline{E}_\Delta^{q-2} \rightarrow \overline{E}_{(\Delta, \partial\Delta)}^q$ genau dann injektiv, wenn die duale Abbildung $\overline{E}_\Delta^{2n-q} \rightarrow \overline{E}_{(\Delta, \partial\Delta)}^{2n-q+2}$ surjektiv ist.

Die genauere Analyse des Beweises von 25.4 zeigt nun, daß folgende, für rationale Fächer auf Grund des harten Lefschetzsatzes erfüllte *lokale Verschwindungsbedingung* $\mathbf{V}(\sigma)$ an alle $\sigma \neq \sigma \in \Delta$ entscheidend ist:

$$\mathbf{V}(\sigma) \quad \overline{E}_\sigma^q = 0 \text{ für alle } q \geq \dim \sigma .$$

Damit ist Vermutung 2 eine Konsequenz von

25.16 Vermutung 3 Für jeden von \mathfrak{o} verschiedenen Kegel σ in V gilt $\mathbf{V}(\sigma)$.

Schließlich weisen wir noch auf eine numerische Form der Poincarédualität hin:

25.17 Relative Poincarédualität Ist Δ ein (nicht notwendig rationaler) quasikonvexer Fächer, so gilt

$$P_{(\Delta, \partial\Delta)}(t) = t^{2n} P_\Delta\left(\frac{1}{t}\right) .$$

Beweis Aus (25.15.2) folgt $b_q(\Delta, \partial\Delta) = b_{2n-q}(\Delta)$ und damit

$$t^{2n} P_{(\Delta, \partial\Delta)}\left(\frac{1}{t}\right) = t^{2n} \sum_{q=0}^{2n} b_q(\Delta, \partial\Delta) t^{-q} = \sum_{q=0}^{2n} b_{2n-q}(\Delta) t^{2n-q} = P_\Delta(t) . \blacksquare$$

Bibliographie

- [AC] A'Campo, Annette: Quotients of Toric Varieties with Curve Lifting Property. arXiv:math.AG0003204 29 Mar 2000
- [AdWei] Adkins, William A. und Steven H. Weintraub: Algebra - An Approach via Module Theory. GTM 136, Springer Verlag 1992
- [AG] Vorlesung über Algebraische Geometrie. 1997/98 von L. Kaup an der Universität Konstanz gehalten. Konstanzer Schr. in Math. und Inf. 74
- [AlPu] Allday, Chris, und Volker Puppe: Cohomological Methods in Transformation Groups. Cambridge Stud. in adv. Math. 32 Cambridge 1993
- [AtMac] Atiyah, M.F. und I.G. Macdonald: Introduction to Commutative Algebra. Addison Wesley 1969
- [Au] Audin, M.: The Topology of Torus Actions on Symplectic Manifolds. Birkhäuser Verlag. Basel, Boston (1991)
- [BaBrFiGaKp] Barthel, Gottfried, Jean-Paul Brasselet, Karl-Heinz Fieseler, Ofer Gabber, Ludger Kaup: Relèvement de cycles algébriques et homomorphismes associés en homologie d'intersection. Ann. of Math. **141**, 147 – 1179 (1955)
- [BaBrFiKp] Barthel, Gottfried, Jean-Paul Brasselet, Karl-Heinz Fieseler, Ludger Kaup: Diviseurs invariants et homomorphisme de Poincaré. Tôhoku Math. J. **48**, 363 – 390 (1996)
- [BaBrFiKp₂] Barthel, Gottfried, Jean-Paul Brasselet, Karl-Heinz Fieseler, Ludger Kaup: Zur Homologie torischer Varietäten. Unveröffentlichtes Manuskript. Konstanz 1998
- [BaBrFiKp₃] Barthel, Gottfried, Jean-Paul Brasselet, Karl-Heinz Fieseler, Ludger Kaup: Equivariant Intersection Cohomology of Toric Varieties. In: Contemporary Mathematics **241**: Algebraic Geometry: Hirzebruch 70. Herausgeber: P. Pragacz, M. Szurek, J. Wiśniewski. AMS 1999.
- [BaBrFiKp₄] Barthel, Gottfried, Jean-Paul Brasselet, Karl-Heinz Fieseler, Ludger Kaup: Equivariant Intersection Cohomology of Toric Varieties. Erweiterte Version von 3). UUDM. Report 1938:34. Dep. of Math. Uppsala University 1998
- [BaBrFiKp₅] Barthel, Gottfried, Jean-Paul Brasselet, Karl-Heinz Fieseler, Ludger Kaup: Combinatorial Intersection Cohomology for Fans. Tôhoku Math. J. **54**, 1 – 41 (2002)
- [BeBeDe] Beilinson, A.A., Joseph Bernstein und P. Deligne: Faisceaux pervers. Astérisque 100 (1982)
- [BiLe] Billera, L.J. und C.W. Lee: A Proof of the Sufficiency of McMullen's Condition for f -Vectors of Simplicial Convex Polytopes. J. Combin. Theory (A) **31**, 237 – 255 (1981)
- [Bn] Brion, Michel: The Structure of the Polytope Algebra. Tôhoku Math. J. **49**, 1 – 32 (1997)
- [Bo] Borel, Armand et al.: Intersection Cohomology. Birkhäuser, Boston, Basel, Stuttgart (1984)
- [Bou] Bourbaki, N.: Espaces vectoriels topologiques, Chap. I/II . Hermann Paris 1953

-
- [Br] Bredon, Glen E.: Sheaf Theory. McGraw Hill, New York (1967)
- [Bra] Brasselet, Jean-Paul: Aspects combinatoires des singularités. In Lê Dung Tran, K. Saito und Bernhard Teissier (Herausgeber): Singularity Theory (Trieste 1991), World Scientific, Singapur 1995
- [BriVe] Brion, Michel und Michèle Vergne: An Equivariant Riemann-Roch Theorem for Complete Simplicial Toric Varieties. *J. reine angew. Math.* 482), 67 – 92 (1997)
- [BruHe] Bruns, Winfried und Jürgen Herzog: Cohen-Macaulay Rings. Cambridge Stud. in Adv. Math. Cambridge 1993
- [Bt] Berchtold, Florian: Morphismen zwischen torischen Varietäten. Dissertation Konstanz 2000
- [CaEi] Cartan, Henry, und Samuel Eilenberg: Homological Algebra. Princeton Univ. Press Princeton 1956
- [De] Deligne, Pierre: Poids dans la Cohomologie des Variétés Algébriques. In: Proc. Int. Cong. Math. 1974 Vancouver, Vol. 1 79 – 86 (1975)
- [DuFoNo] Dubrovin, B.A., A.T. Fomenko und S.P. Novikov: Modern Geometry — Methods and Applications. Part II. GTM **104**. Springer Verlag 1985
- [EiStr] Eilenberg, Samuel und Norman Steenrod: Foundations of Algebraic Topology. Princeton Univ. Press (1952)
- [Ew] Ewald, Günter: Combinatorial Convexity and Algebraic Geometry. Graduate Texts in Math. 1996 Springer Verlag
- [Fei] Feichtner, Eva Maria: Rational versus Real Cohomology Algebras of Low-dimensional Toric Varieties. Erscheint demnächst.
- [Fi] Fieseler, Karl-Heinz: Rational Intersection Cohomology of Projective Toric Varieties. *J. reine angew. Math.* **413**, 88 – 98 (1991)
- [Fis] Fischli, Stephan: On Toric Varieties. Dissertation Bern 1992
- [Fr] Franz, Matthias: Zur Homologie torischer Varietäten. Unveröffentlichtes Manuskript Konstanz 2000
- [Fr₂] Franz, Matthias: Koszul Duality and Equivariant Cohomology for Tori. XXX XXX XXX XXX
- [Fu] Fulton, William: Introduction to Toric Varieties. Ann. of Math. Studies 131, Princeton Univ. Press 1993
- [Fu₂] Fulton, William: Intersection Theory. *Ergebn. Math.* 3. Folge Band 2 Springer Verlag 1984
- [FuMPh] Fulton, William und Robert MacPherson: Categorical Framework for the Study of Singular Varieties. *Memoirs Am. Math. Soc.* **243**, 1981
- [FuSf] Fulton, William und Bernd Sturmfels: Intersection Theory on Toric Varieties. *Topology* **36**, 335 – 353 (1997)
- [GoKoMcP] Goresky, Marc, Robert Kottwitz und Robert MacPherson: Equivariant Cohomology, Koszul Duality, and the Localization Theorem. *Inv. math.* **131**, 25 – 83 (1998)
- [GoMcP] Goresky, Marc und Robert MacPherson: Intersection Homology II. *Inv. Math.* **71**, 77 – 129 (1983)
- [Gb] Greenberg, Marvin: Lectures on Algebraic Topology. Benjamin, New York 1967

-
- [Gi] Giesecke, Burghart: Simpliziale Zerlegung abzählbarer analytischer Räume. *Mathem. Zeitschr.* **83**, 177 – 213 (1964)
- [Gu] Gubeladze, Joseph: The Isomorphism Problem for Commutative Monoid Rings. *J. of Pure and Appl. Algebra* **129**, 35 – 65 (1998)
- [GrHa] Griffiths, Phillip, und Joseph Harris: *Principles of Algebraic Geometry*. John Wiley & Sons, New York (1978)
- [Ha] Hartshorne, Robin: *Algebraic Geometry*. Springer Verlag 1977
- [He] Herzog, J.: Generators and Relations of Abelian Semigroups and Semigroup Rings. *Man. Math.* **3**, 175 – 193 (1970)
- [HiWy] Hilton, Peter J. and S Wylie: *Homology Theory*. Cambridge Univ. Press 1960
- [Ho] Hochschild, Gerhard P.: *Basic Theory of Algebraic Groups and Lie Algebras*. GTM **75**, Springer Verlag 1981
- [Hz] Hirzebruch, Friedrich: Über eine Klasse von einfach-zusammenhängenden komplexen Mannigfaltigkeiten. *Math. Ann.* **124**, 77 – 86 (1951)
- [Jo] Jordan, Arno: *Homology and Cohomology of Toric Varieties*. Dissertation Konstanz 1997. *Konstanzer Math. Schr.* 57
- [Ki] Kirwan, Frances: Intersection Homology and Torus Actions. *J. Amer. Math. Soc.* **1**, 385 – 400 (1988)
- [KpKp] Kaup, Ludger und Burchard Kaup: *Holomorphic Functions of Several Variables*. de Gruyter Studies in Math. **3**, 1983
- [KpWe] Kaup, Ludger und Hans Günther Weidner: Mayer-Vietoris Sequenzen und Lefschetzsätze für mehrfache Hyperflächenschnitte in der Homotopie. *Math. Zeitschr.* **142**, 143 – 269 (1975)
- [Ku] Kultze, R.: *Garbentheorie*. Teubner 1970
- [La] Laufer, Henry B.: *Normal Two-dimensional Singularities*. Ann. of Math. Studies Princeton 1971
- [MCl] McCleary, John: *User's Guide to Spectral Sequences*. Math. Lecture Ser. **12**, Publish or Perish, Inc. 1985
- [MCo] McConnell, Marc: *Intersection Cohomology of Toric Varieties*. Preprint 1998, zugänglich über <http://www.math.okstate.edu/~mmconn/>, 1998
- [McM] McMullen, Peter: Weights on Polytopes. *Journ. of Discr. and Comp. Geometry* **15**, 363 – 388 (1996)
- [Od] Oda, Tadao: The Intersection Cohomology and Toric Varieties. In: T. Hibi (Herausgeber): *Modern Aspects of Combinatorial Structure and Convex Polytopes*. RIMS Kokyuroko **857**, 99 – 112 (1994)
- [Od₂] Oda, Tadao: *Convex Bodies and Algebraic Geometry*. Springer Verlag 1988
- [Pe] Perron, Oskar: *Die Lehre von den Kettenbrüchen*, Chelsea Publ. Comp. New York; Nachdruck des Textes von 1929
- [Pk] Peskine, Christian: *An Algebraic Introduction to Complex Projective Geometry I*. Cambridge Univ. Press 1996
- [Pr] Prill, David: Local Classification of Quotients of Complex Manifolds by Discontinuous Groups. *Duke Math. J.* **31**, 375 – 386 (1964)

-
- [Re] Rentsch, Hans-Georg: Divisoren und Differentialformen auf torischen Varietäten. Dissertation Bochum 1991;
- [Sa] Saito, Morihiko: Introduction to Mixed Hodge Modules. *Astérisque* 179/80, 145 – 162 (1989)
- [SaWa] Sampson, J.H. und G. Washnitzer: Cohomology of Monoidal Transformations. *Ann. Math.* **69**, 605 – 629 (1959)
- [ScheSt] Scheja, Günter und Uwe Storch: Lehrbuch der Algebra Teil 2. Teubner 1988
- [Se] Serre, Jean-Pierre: Géométrie algébrique et Géométrie analytique. *Ann. Inst. Fourier* **6**, 1 – 42 (1956)
- [Se₂] Serre, Jean-Pierre: Prolongement de faisceaux analytiques cohérents. *Ann. Inst. Fourier* **16**, 363 – 374 (1966)
- [Sh] Shavarevich, Igor R.: Basic Algebraic Geometry. Springer Verlag Berlin 1977
- [Sp] Spanier, Edwin H.: Algebraic Topology. McGraw-Hill Inc 1966
- [St] Stanley R.: Generalized H-vectors, Intersection Cohomology of Toric Varieties and Related Results. *Adv. Stud. in Pure Math.* **11**, 187 – 213 (1987)
- [St₂] Stanley R.: The Number of Faces of a Simplicial Convex Polytope. *Advances in Math.* **35**, 236 – 238 (1980)
- [Ste] Steenbrink, J.H.M.: Mixed Hodge Structures on the Vanishing Cohomology. In: P. Holm (Ed.) *Real and Complex Singularities*. Oslo 1976. 525 – 564, Sijthoff & Noordhoff Int. Publ. 1977
- [Sto] Storch, Uwe: Fastfaktorielle Ringe. *Schriftenreihe Math. Inst. Univ. Münster* Nr. **37**, 1967
- [Su] Sumihiro, H.: Equivariant Completion I. *Math. Kyoto Univ.* **14**, 1 – 28 (1974)
- [tD] tom Dieck, Tammo: Topologie. de Gruyter, Berlin 1991
- [Wa] Wagner, Heinke: Gewichtete projektive Räume und Reflexive Polytope. Diplomarbeit Bochum 1995
- [Ze] Zeeman, E.C.: A Proof of the Comparison Theorem for Spectral Sequences. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **53**, 57 – 62 (1957)
- [Zie] Ziegler, Günter M.: Lectures on Polytopes. *GTM 152* Springer Verlag 1995

Symbolverzeichnis

V^*	dualer Vektorraum zu V	4
$\langle -, - \rangle$	Auswertungsabbildung	4
I	abgeschlossenes Einheitsintervall	4
\mathfrak{o}	Nullkegel	4
$A + A'$	Minkowskisumme konvexer Mengen A und A'	4
$A - A'$	$A + (-A')$	4
$\text{lin } A$	von A erzeugter reeller Untervektorraum	4
$\dim A$	Dimension des von A erzeugten Untervektorraumes	4
$\text{keg}(A)$	von A erzeugter (konvexer) Kegel	4
$\mathfrak{K}(V)$	Verband der abgeschlossenen Kegel in V	5
$\langle A, B \rangle$	$\{\langle a, b \rangle; a \in A, b \in B\}$	5
A^\vee	Dual zu A	5
$H^{\geq 0}(u)$	positiver Halbraum der Linearform u	5
A^\perp	Orthogonal zu A	5
$H(u)$	durch $u \in V^*$ in V definierte Hyperebene $N(V; u)$	5
$H^{=0}(u)$	durch $u \in V^*$ in V definierte Hyperebene $N(V; u)$	5
A°	Kern bzw. relatives Inneres von A	6
∂A	relativer Rand von A	6
$\mathfrak{K}_p(V)$	Verband der polyedrischen Kegel in V	8
$F \prec C$	F ist Seite von C	11
$\mathfrak{S}(C)$	Seitenverband von C	11
$F \prec_1 C$	F ist Facette von C	11
Kamm C	maximaler Untervektorraum von C	11
$\# A$	Anzahl der Elemente von A	11
Stern(D)	Stern der Seite D	13
$x(t)$	$\langle t, x \rangle$	16
$C \oplus C'$	direkte Summe von Kegeln	16
N	Gitter in V	19
(e_1, \dots, e_n)	Basis von N und $N_{\mathbb{R}}$	19
M	$\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$, duales Gitter zu N	19
(f_1, \dots, f_n)	zu (e_1, \dots, e_n) duale Basis von M und $M_{\mathbb{R}}$	19
(e_1^*, \dots, e_n^*)	Basis von M und $M_{\mathbb{R}}$	19
$N_{\mathbb{R}}$	$N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$	19
$M_{\mathbb{R}}$	$M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$	19

$\sigma, \tau, \rho, \gamma$	N -Kegel	19
$\mathfrak{K}_N(V)$	Verband der N -Kegel in V	20
S_σ	zu σ assoziierte Halbgruppe $M \cap \sigma^\vee$	21
$\varphi_{\mathbb{R}}$	$\varphi \otimes \text{id}_{\mathbb{R}}$	25
$ \sigma $	Träger von σ	25
$S(\varphi)$	zum Kegelmorphismus φ assoziierter Halbgruppenmorphismus	25
$\mathbb{C}[T]$	$\mathbb{C}[T_1, \dots, T_r]$	29
$\text{Sp}(A)$	Maximalspektrum von A	29
$\mathbb{C}[S]$	$\bigoplus_{u \in S} \chi^u$ zur Halbgruppe S assoziierte \mathbb{C} -Algebra	29
$\mathbb{C}[T^{\pm 1}]$	Laurentalgebra $\mathbb{C}[T_1^{\pm 1}, \dots, T_n^{\pm 1}]$	30
T^α	$T_1^{a_1} \dots T_r^{a_r}$	30
$\text{Hom}_{\text{Hgr}}(S, \mathbb{C})$	Halbgruppenhomomorphismen von S nach (\mathbb{C}, \cdot)	30
$\mathbb{C}(S)$	Quotientenkörper von $\mathbb{C}[S]$	30
A_σ	die zu σ assoziierte Algebra $\mathbb{C}[S_\sigma]$	33
X_σ	die zu σ assoziierte affin algebraische Varietät $\text{Sp}(\mathbb{C}[S_\sigma])$	33
T_i	χ^{f_i} kanonisches Erzeugendes von A_σ	33
\mathbb{T}_N	algebraischer Torus zu N	33
\mathbb{T}, \mathbb{T}^n	algebraischer Torus der Dimension n	33
$\langle \alpha, \mu \rangle$	$\sum_{i=1}^r a_i u_i \in S$	35
$j_{\sigma\tau}: X_\tau \rightarrow X_\sigma$	zu $\tau \prec \sigma$: Inklusion der Hauptmenge X_τ	37
X_f	$X \setminus N(f)$ Hauptmenge	37
$(A_\sigma)_f$	Lokalisierung von A_σ nach f	38
$X_\sigma \times X_{\sigma'}$	cartesisches Produkt	40
Δ	N -Fächer	43
$\mathfrak{S}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$	Seitenfächer von $\sigma_1, \dots, \sigma_r$	43
Δ^j	Menge der j -Kegel	43
$\Delta^{\leq j}$	Fächer der höchstens j -dimensionalen Kegel	43
$\Delta^{\geq j}$	Menge der mindestens j -dimensionalen Kegel	43
Δ^{\max}	Menge der maximalen Kegel	43
v_i	primitiver Fächervektor oder davon erzeugter Kegel	43
$\Lambda \prec \Delta$	Λ ist Teilfächer von Δ	43
Δ_{reg}	Teilfächer der regulären Kegel	44
Δ_s	Teilfächer der simplizialen Kegel	44
$\partial\sigma$	Randfächer des Kegels σ	44
X_Δ	torische Varietät zum Fächer Δ	44
$\mathcal{O}(X)$	Algebra der regulären Funktionen auf X	45
\mathbb{B}_0	dichte Bahn in X_Δ	51

$ \Lambda $	Träger einer Teilmenge Λ eines Fächers	51
$f_j(\Delta)$	Anzahl der j -dimensionalen Kegel von Δ	52
FAN	Kategorie der Fächer	52
TOV	Kategorie der torischen Varietäten	52
$\text{konv}(A)$	konvexe Hülle von A	54
\mathfrak{P}	Menge der Polytope in V	54
\mathfrak{P}_0	Menge der Polytope K in V mit $0 \in \overset{\circ}{K}$	54
$H^{\geq a}(u)$	durch $u \geq a$ definierter Halbraum in V	54
$S \not\cong K$	S ist eigentliche Seite des Polytops K	55
$\mathfrak{S}(K)$	Seitenverband des Polytops K	55
K^j	Menge der j -dimensionalen Seiten des Polytops K	55
$\mathfrak{S}^{-1}(K)$	Menge der Facetten des Polytops K	55
$F \prec_1 K$	F ist Facette des Polytops K	55
$f_j(K)$	Anzahl der j -dimensionalen Seiten des Polytops K	56
$\text{aff } A$	von A in V erzeugter affiner Unterraum	56
$C(\ell, n)$	zyklisches Polytop mit ℓ Ecken im \mathbb{R}^n	57
$D(\ell, n)$	definierende Punkte von $C(\ell, n)$	57
K^\vee	zu K duales Polytop	63
K^\wedge	polares Polytop $-K^\vee$	63
S^*	zu S duale Seite im dualen Polytop	64
Δ^K	zum Polytop K in V assoziierter Fächer	65
Δ_K	Fächer zum Polytop K in V^*	67
x_σ	Fußpunkt von X_σ	74
1-PUG	Ein-Parameter-Untergruppe	76
$N_{\mathbb{T}}$	Ein-Parameter-Untergruppen von \mathbb{T}	76
$M_{\mathbb{T}}$	Charaktergruppe von \mathbb{T}	76
$\mathbb{X}(\mathbb{T})$	Charaktergruppe von X	76
λ_v	durch $v \in N$ gegebene 1-PUG	76
χ^u	durch $u \in M$ gegebener Charakter	76
\mathfrak{X}_Δ	Verband der invarianten affinen Karten von X	83
$ \mathfrak{D} $	Trägermenge des Mengensystems \mathfrak{D}	83
$\mathfrak{B}(\mathfrak{D})$	Boolesche Algebra zu \mathfrak{D}	83
σ^0	Kern von σ	83
\mathbb{Z}_m	zyklische Gruppe der Ordnung m	84
\mathbb{B}_σ	zu σ gehörige abgeschlossene Bahn	84
\mathbb{T}_{x_σ}	Isotropiegruppe zu x_σ in \mathbb{T}	86

\mathbb{V}_σ	Ab schluß $\overline{\mathbb{B}}_\sigma$ der Bahn zu σ	87
N_τ	in $\text{lin } \tau$ von N induziertes Gitter	92
N/τ	Gitter N/N_τ	92
Δ/τ	von $\text{Stern}(\tau)$ erzeugter Quotientenfächer	93
$\overline{\sigma}$	Restklasse $\pi\sigma$ von σ	93
$\mathbb{V}(\tau)$	torische Varietät, isomorph zum Bahnabschluß $\overline{\mathbb{B}}_\tau$	94
$\mathbb{T}(\tau)$	($\text{codim } \tau$)-dimensionaler Torus zu Δ/τ in N/τ	94
$M(\tau)$	zu N/τ duales Untergitter $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N/\tau, \mathbb{Z}) = M \cap \tau^\perp$ von M	94
$\text{Fix } \lambda_v$	Fixpunktmenge von λ_v	96
$C(Y)$	affiner Kegel über der projektiven Varietät Y	103
μ_λ	Diagonalmatrizen­gruppe der Ordnung λ	103
$\mu_{\lambda\kappa}$	Matrizen­gruppe der Ordnung λ	104
$H_j^{\text{cl d}}(U; G)$	Homologie mit abgeschlossenen Trägern	111
${}_X \mathcal{H}_j^G$	Garbe der j -ten lokalen Homologie von X mit Koeffizienten in G	111
${}_X \mathcal{H}_{j,x}^G$	j -te lokale Homologie in x	111
$S(X)$	Singularitätenmenge von X	112
$\text{Tor}^R(G, G')$	Torsionsprodukt der R -Moduln G und G'	113
$k(\Delta)$	Kantenzahl von Δ	114
Δ_a	Fächer zur Hirzebruchschen Σ -Fläche Σ_a	118
Σ_a	Hirzebruchsche Σ -Fläche	118
$\mathbb{C}_{(x_1, \dots, x_n)}^n$	Vektorraum \mathbb{C}^n mit Koordinaten (x_1, \dots, x_n)	120
(a_1, \dots, a_k)	regulärer Fächerzahlenzyklus	124
$C \cdot C'$	Schnittzahl der Kurven C und C'	128
$b_j(T)$	j -te Bettizahl	131
$e(T)$	topologische Eulercharakteristik	131
$\text{Ext}(G, G')$	Extensionsmodul von G' mit G	134
$[p/q]$	obere Gaußklammer	137
$s(\rho)\Delta$	stellare Unterteilung von Δ bezüglich $\rho \in \Delta^1$	142
m_σ	Multiplizität $[N_\sigma: \Gamma_\sigma]$ für simpliziales σ	143
$\pi_1(X)$	Fundamentalgruppe von X	146
N_Δ	von den Kegeln von Δ herausgeschnittenes Untergitter von N	148
$\text{Tors } G$	Torsionsgruppe von G	149
$b_j(C_\bullet)$	Bettizahl des graduierten Moduls C_\bullet	152
$e(C_\bullet)$	Eulercharakteristik des Komplexes C_\bullet	152
P_X	Poincarépolynom der Varietät X	154
\mathcal{P}_X	virtuelles Poincarépolynom	154

(VP 1) – (VP 4)	Axiome und Eigenschaften virtueller Poincarépolynome	154
$H_c^\bullet(X; \mathbb{Q})$	rationale Kohomologie von X mit kompakten Trägern	157
(W 1) – (W 2)	Bedingungen an die Gewichtsfiltrierung	160
$\text{gr}_W^j(G)$	graduierter assoziierter Modul zum filtrierten Modul G	160
$\text{Div}_W(X)$	Gruppe der Weildivisoren	162
$\text{Div}_H(X)$	Gruppe der Hauptdivisoren	162
$\text{div}(f)$	Hauptdivisor zu f	162
$ D_u $	Träger von D_u	162
v_ρ	primitiver Gittervektor auf der Kante ρ	162
$\text{Div}_W^\mathbb{T}(X)$	Gruppe der invarianten Weildivisoren	163
W_{χ^u}	Gewichtsraum zum Charakter χ^u	164
$\text{Div}_C(X)$	Gruppe der Cartierdivisoren	164
$\text{Div}_C^\mathbb{T}(X)$	Gruppe der invarianten Cartierdivisoren	164
${}_X\mathcal{R}$	Garbe der rationalen Funktionen auf X	165
\mathcal{O}_D	zum Divisor D assoziierte Garbe rationaler Funktionen	165
$\mu(f)$	Multiplikation mit f	165
X_g	Hauptmenge zu $g \in \mathcal{O}(X)$	165
L_f	Lokalisierung des Moduls L nach $f \in R$	166
h_D	Trägerfunktion zum Divisor D	168
U_{ij}	$U_i \cap U_j$	170
$\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}'$	Tensorprodukt von Geradenbündeln	171
$\text{Pic}(X)$	Picardgruppe	171
$\Gamma(X; (\mathcal{L}, g_{ij}))$	Vektorraum der globalen Schnitte im Geradenbündel \mathcal{L}	172
$\text{ClDiv}_W(X)$	Gruppe der Weildivisorenklassen	173
$A_{n-1}(X)$	$(n-1)$ -te Chowgruppe	173
R^*	Einheitengruppe des Integritätsbereiches R	173
$\text{ClDiv}_C(X)$	Gruppe der Cartierdivisorenklassen	174
$v_Y(s)$	Vielfachheit des Schnittes s längs Y	174
$\mathbb{P}_n \mathcal{O}(-1)$	Garbe zum tautologischen Bündel	174
P_D	Polyeder zu D	180
φ_D	zum Divisor D assoziierter Morphismus in einen \mathbb{P}_r	186
$(\mathbb{P}_r)_{z_\sigma}$	Hauptmenge bezüglich der Koordinate z_σ	186
z_σ	Koordinate zu u_σ	186
D_P	vom Polytop P bestimmter Cartierdivisor	191
$[D]$	zu einem Cartierdivisor assoziierter Weildivisor	194
$D \cdot V$	Schnittzykel	194
$D _V$	Einschränkung des Cartierdivisors D auf V	194

$K(\gamma \setminus \sigma)$	Indexmenge zu $\gamma^1 \setminus \sigma^1$	195
$\rho(\gamma)$	einziges Element aus $K(\gamma \setminus \sigma)$ für simpliziales γ	196
$\text{Ch}_j(X)$	j -te Chowgruppe	197
$\text{Ch}_\bullet(X)$	$\bigoplus_{k=0}^n \text{Ch}_k(X)$	197
$Z_j(X)$	Gruppe der j -Zykel von X	197
$D \sim D'$	rational äquivalente Divisoren	197
$D \cdot V$	Schnittzykelklasse	197
$(D \cdot C)$	Schnittzahl	198
$\text{Rat}_k^{\mathbb{T}}(X_\Delta)$	zu 0 rational äquivalente invariante Klassen in $Z_k(X)$	203
$\text{Ch}_\bullet(X; R)$	$\text{Ch}_\bullet(X) \otimes_{\mathbb{Z}} R$	203
$\text{Ch}^j(X; R)$	$\text{Ch}_{n-j}(X; R)$	203
$\text{Ch}^\bullet(X; R)$	$\bigoplus_k \text{Ch}^j(X; R)$	203
$\text{Ch}_\bullet(X; \mathbb{Q})^G$	G -invariante Chowklassen	205
$I_G(Y)$	Stabilisator einer Menge Y in G	205
$\tau_i := \bigcap_{j \geq i, \dim \sigma_{ij} \geq n-1} \sigma_j$	zur Ordnung auf Δ^n assoziierte Seite von σ_i	206
$f(\Delta)$	f -Vektor des Fächers Δ	209
$h_j(\Delta)$	$\sum_{i=j}^n (-1)^{i-j} \binom{i}{j} f_{n-i}(\Delta)$	209
$h_j(P)$	$h_j(\Delta^P)$	210
$\text{Ch}^j(X; R)$	kohomologische Chowgruppe	212
R^\bullet	Polynomring $R[D_1, \dots, D_k]$	212
V_σ	$\text{lin } \sigma$	218
or_τ^σ	Orientierung von σ bezüglich der Facette τ	218
$\mathbb{Z}_{(p)}$	Lokalisierung von \mathbb{Z} nach p	227
$e_{u,v}^\infty(p)$	Bettizahl der Charakteristik p zu $E_{u,v}^\infty(\mathbb{Z}_p)$	227
$[t]$	obere Gaußklammer $\min\{m \in \mathbb{Z}; m \geq t\}$	227
E_i^j	$\bigoplus_{u+v=i} E_{u,v}^j$	228
$C(r)$	erweiterter Komplex $C \otimes_R \mathbb{Z}_r$	228
$g_j(P)$	g -Vektor zum Polytop P	238
$a^{\langle j \rangle}$	j -te Pseudopotenz von a	238
$[t]$	untere Gaußklammer	239
$\mathbb{C}^{(\infty)}$	Raum der endlichen Folgen in \mathbb{C}	243
ET	universelles \mathbb{T} -Bündel	243
\mathbb{IP}_∞	projektiver Raum unendlicher Dimension	243
BT	klassifizierender Raum zu \mathbb{T}	243
$X_{\mathbb{T}}$	zu $\text{ET} \rightarrow \text{BT}$ assoziiertes \mathbb{T} -Bündel mit Faser X	243
$H_{\mathbb{T}}^\bullet(X)$	äquivariante reellwertige Kohomologie der \mathbb{T} -Varietät X	244

A^\bullet	reelle symmetrische Algebra über V^*	244
\mathbb{R}^\bullet	graduierter \mathbb{R} -Vektorraum, der nur in Grad 0 lebt	245
A_σ^\bullet	symmetrische Algebra zu V_σ^*	246
$\mathcal{A}^\bullet(\Delta)$	Algebra der Δ -stückweise polynomialen Funktionen auf $ \Delta $	246
$\mathcal{A}^\bullet(\sigma)$	Algebra der Δ -stückweise polynomialen Funktionen auf σ	246
\mathfrak{m}_{A^\bullet}	Ideal der in $0 \in V$ verschwindenden Polynome	249
$A^\bullet \tilde{\otimes}_{\mathbb{R}} L^\bullet$	getwistetes Tensorprodukt	249
$\tau_{<j}, \tau_{\leq j}, \tau_{=j}$	Trunktions-Operatoren	252
$I(\Delta)$	Ideal in $\mathbb{R}[\rho_1, \dots, \rho_k]$, erzeugt von $\rho_{i_1} \cdots \rho_{i_\ell}$ mit $\text{keg}(\rho_{i_1}, \dots, \rho_{i_\ell}) \notin \Delta$	255
${}_\Delta \mathcal{SR}$	Stanley-Reisner-Garbe	256
$(C^\bullet(\Delta), \delta^\bullet)$	Kokettenkomplex zu Δ	259
$\partial\Delta$	Randfächer des volldimensional erzeugten Fächers Δ	259
$(\tilde{C}^\bullet(\Delta, \partial\Delta), \delta^\bullet)$	augmentierter relativer Komplex zu Δ	259
$\overset{\circ}{\Delta}$	Inneres des volldimensional erzeugten Fächers Δ	259
$P_{A^\bullet(\Delta)}$	Poincaréreihe von $\mathcal{A}^\bullet(\Delta)$	262
\mathcal{I}^σ	charakteristische Garbe von σ	264
$C^\bullet(\Delta, \Lambda; \mathcal{G})$	relativer Kokettenkomplex zur Garbe \mathcal{G} auf dem Fächer Δ	265
$\tilde{C}^\bullet(\Delta, \partial\Delta; \mathcal{G})$	augmentierter relativer Kokettenkomplex zur Garbe \mathcal{G} auf Δ	265
$Z(\Delta)$	Abbildungskegel über $S_{\partial\Delta} \hookrightarrow S_\Delta$	267
\cap	Schnittprodukt	269
$IH^\bullet(Z)$	Schnitthomologie zur mittleren Toleranz	270
α, ω	die Poincarédualität faktorisierende Vergleichshomomorphismen mit IH^\bullet	270
$S(Z)$	Singularitätenmenge von Z	270
$IH_c^\bullet(Z)$	Schnitthomologie mit kompakten Trägern	270
S_{m-2k}	Stratum in einer Pseudomannigfaltigkeit	271
$c(L_z)$	topologischer Kegel über L_z	272
L_z	Link von z	272
\mathcal{IH}_z^j	j -te lokale Schnitthomologie in z	272
ω_X	Chernklasse $c_1(\mathbb{P}_\ell \mathcal{O}(1) _X)$	274
$E_j \mathbb{T}$	$(\mathbb{C}^{j+1} \setminus \{0\})^n$ als Prinzipalbündel über $(\mathbb{P}_j)^n$	274
$X_{\mathbb{T}, j}$	assoziertes Bündel mit Faser X	274
$IH_{\mathbb{T}}^q(X)$	q -te \mathbb{T} -äquivariante Schnitthomologie von X	274
$\Lambda(\sigma)$	zu σ assoziierter polytopischer Fächer im $\mathbb{R}^{\dim \sigma - 1}$	279
$IH^\bullet(\Delta)$	virtuelle Schnitthomologie des Fächers Δ	287
IP_Δ	Poincarépolynom zur virtuellen Schnitthomologie von Δ	287
IP_σ	$IP_{\mathfrak{S}(\sigma)}$	287

$s(\Delta)$	komplexe Dimension des \mathbb{Q} -singulären Ortes von X_Δ	289
$b_{x_\sigma}^j(X_\sigma)$	lokale Bettizahl im Punkt x_σ	289
$A^\bullet[r]$	verschobener graduierter Modul mit $\tau_{=j}(A^\bullet[r]) = A^{j+r}$	290
$\mathbf{V}(\sigma)$	Verschwindungsbedingung zum harten Lefschetzsatz	293

Index

- Abbildung, äquivariante 40
 Abbildungsgrad 204
 Additivität der Eulercharakteristik 131, 158
 – des virtuellen Poincarépolynoms . . 154
 affiner Fächer 43, 89
 – Kegel über Y 103
 affines Bündel 197
 affine torische Varietät 33, 165
 – Varietät 89
 Algebra der Laurentpolynome 30
 Algebrhomomorphismus, monomialer . 41
 algebraischer Torus 33
 – – zu N 33
 –, symmetrische 244
 ample Divisor 190ff.
 ATV 79
 Außenwinkel von K an S 66
 Aufblasen eines Punktes 92, 97
 – von Δ 135
 – – Singularitäten 135
 – – X_Δ 135
 ausgezeichnete Umgebung 272
 Auswertungsabbildung 4
 azyklische Garbe 265, 267
 azyklischer Komplex 260
 Bahn 86
 Bahnabschluß 86, 94, 96
 Bahnenzerlegung 85f.
 – von x_σ 85f.
 Basispunkt 51
 Beispiele, elementare
 16f., 21f., 33-36, 39, 44, 49, 103
 Bettizahl
 131, 133, 151f., 160, 209f., 212, 220, 227, 262
 Bettizahlbedingung 251
 –, lokale 289
 –, virtuelle 287
 Bündel, tautologisches 170f., 244
 Billera 239
 Bipyramide 56
 birationale Abbildung 126
 birationaler Morphismus 42
 Boolesche Algebra 83
 – – von X 85
 Borel 243
 Äquivalenz von Funktoren 218
 – – Kategorien 26, 31, 41, 53, 77, 79
 cap-Produkt 269
 Cartierdivisor . . . 164, 166, 179f., 194, 196
 Cartierdivisoren, Gruppe der 164
 Cartierdivisorenklassengruppe 178f.
 –, invarianter 164f., 169, 191
 Charakter 76
 Charaktergruppe 77
 – von \mathbb{T} 76
 charakteristische Garbe 264
 Chernklasse 274
 Chowgruppe 197, 205, 207f., 237, 256
 Chowkohomologie 203, 212
 Chowring 128, 132, 203, 263
 cup-Produkt 269, 274
 Danilov 212, 237, 262
 Übergangsfunktion 170
 definierender Punkt von $C(\ell, n)$ 57
 Deformation 250
 Deformationsretrakt 147
 Dehn-Sommerville-Gleichungen 214
 dicke Bahn 88
 Dieudonné 219
 diophantische Gleichung 22
 direkte Summe von Fächern 45
 – – – Kegeln 16
 Divisorenklassengruppe 149
 Divisor 162
 –, ample 190ff.
 – eines rationalen Schnittes 174
 – – Schnittes 121
 –, kanonischer 130
 –, sehr ample 190, 192
 Dreiecksprisma 257, 263
 Δ -stückweise polynomiale Funktion . 246
 duale Paarung 270f.

- dualer Graph 128
 – Kegel 5, 9, 21
 – Vektorraum 4
 duales Gitter 19
 – Polytop 63
 äquivalente Fächerzykeln 118
 äquivariante Abbildung 40
 – Kohomologie 243f.
 – Produktzerlegung 40, 88
 – Schnitthomologie 274f.
 äquivariant formal 278
 – formaler Fächer 254, 268
 echte Seite 11, 55
 Ecke 55
 eigentliche Modifikation 135
 eigentlicher Morphismus 97f., 204
 eigentlich schneiden 194, 198, 203
 Einbettung 187, 271
 Einbettungskriterium 187
 Eindeutigkeit der Auflösung 135
 einfaches Polytop 68, 161
 einfach zusammenhängend 150
 Einheitswurzelgruppe 103f., 108
 Ein-Parameter-Untergruppe 76, 79, 96
 elementare Beispiele
 16f., 21f., 33-36, 39, 44, 49, 103
 Elementarteiler 114
 Elementarteilersatz 26
 erzeugende Unterhalbgruppe 24
 erzeugt von globalen Schnitten 185f.
 Eulercharakteristik 131, 152ff., 157f.
 –, holomorphe 132, 152
 – mit kompakten Trägern 157
 Eulersche Polyederformel 56
 exzeptioneller Divisor 139
 Facette 55, 199
 – eines Kegels 11
 faktoriell 167
 faktorielle Varietät 115
 FAN 50, 52f.
 fasertreu 171
 fastfaktoriell 116, 167
 Fächer 43
 –, äquivariant formaler 254, 268
 Fächerisomorphismus 72
 –, mehrfach projektiver 68
 Fächermorphismus 49, 77, 91
 –, N - 43
 –, nicht entarteter 114, 151, 163
 –, polytopischer 67, 72f., 192
 –, projektiver 68
 –, quasikonvexer 278, 281, 284, 286
 Fächerraum 52, 91, 277
 –, regulärer 75, 115
 –, simplizialer
 110, 116, 160, 166, 247, 257, 263, 267, 283
 Fächertopologie 52, 83, 91
 –, volldimensional erzeugt
 180, 257, 259f., 267
 –, vollständiger 66, 72, 100, 249
 Fächerzahlenzyklus 124, 132
 –, regulärer 127, 137
 Fächerzykeln, äquivalente 118
 Fächerzyklus 126
 –, regulärer 118, 123
 – zu Δ 118
 Filtrierung 159, 202, 271
 Fixpunkt
 74, 96, 100, 111, 114f., 139, 153, 253, 255
 Fixpunktbedingung 253
 Fixpunktvarietät 251
 Fläche 118
 Fortsetzung eines Morphismus 78
 Fortsetzungssatz 78
 Fourier-Motzkin-Elimination 9
 Franz 219, 227
 freier Modul 251, 253, 261, 278
 Freiheitsbedingung 251, 253, 278
 Fußpunkt 74, 85, 94
 Fundamentalbereich 23
 Fundamentalgruppe 145f., 148, 151
 – des Torus 146
 –, konkave 182
 –, Δ -stückweise polynomiale 246
 Funktion, Δ -streng konkave 186
 f -Vektor 56, 155, 209, 239

GAGA-Prinzip	122	Hermitesche Normalform	22
Gale	59	Hilbertbasis	22
ganzahlige Homologiemannigfaltigkeit	115	– von S	23
Garbe	111, 117, 247, 264	Hironaka	155
–, assoziiert zu einem Divisor	165	Hirzebruch-Jung-Kettenbruch	138
–, azyklische	265, 267	Hirzebruchsche Σ -Fläche	118, 121, 133
–, charakteristische	264	holomorphe Eulercharakteristik	132, 152
– der j -ten lokalen Homologie	111	Homogenitätsbedingung	164
– – rationalen Funktionen	165	Homologie	132
–, invertierbare	172	Homologiegruppe	208
–, lokal freie	165	Homologiemannigfaltigkeit	52, 113, 267
–, welche	264	–, ganzzahlige	115
gerade-kodimensionales Stratum	271	–, rationale	116f.
Geradenbündel	120, 170f., 281	– mit abgeschlossenen Trägern	111
–, triviales	170	– – Tori	42
Geradheitsbedingung von Gale	59	Homomorphismus von Geradenbündeln	171
getwistetes Tensorprodukt	249	– – Tori	39
Gewicht	164	Homotopieinvariante	152
– projektiver Raum	109	h -Vektor	209, 214, 258
gewichtet projektiver Raum	108f.	Hyperebene	6, 54
Gewichtsfiltrierung	159	Hyperwürfel	68
Gewichtsraum	164	Ideal, maximales	249
Gewichtszерlegung	164	idealtheoretisch vollst. Durchschnitt	42
Gitter	19	injektiver Morphismus	42
–, duales	19	Inneres eines Fächers	260
glatt	75	– – Kegels	10, 79
glatte Fläche	126	Intervall in einem Fächer	90
Global-aus-Lokal-Formel	287	Invariante, kombinatorische	155, 256, 263, 289
globale Schnitte, erzeugt von	185	invarianter Cartierdivisor	165, 169, 191
Gordan	23	– Divisor	163
graduierter R -Modul	159	invariante Teilmenge	85
gradweise endlich erzeugt	228	inverses Geradenbündel	171
Graph, dualer	128	invertierbare Garbe	172
Gruppe der 1-PUGs	76f.	irreduzible Komponente	90
g -Theorem	239	Ishida	268
gute Umgebung	111	Isomorphismus affiner torischer Algebren	41
g -Vektor	238	– – torischer Varietäten	41
Gysinsequenz	281	– von Geradenbündeln	171
Halbgruppe	21, 29	– – Kegeln	25, 41
Halbraum	5, 54	– – Varietäten	42
harter Lefschetzsatz	215, 274	– – Verbänden	87
Hauptdivisor	162, 212	Isotropiegruppe	86
Hauptmenge	37, 165		

- Jurkiewicz 212, 237, 262
- Kamm eines Kegels 11
- kanonische Produktzerlegung 40
- kanonischer Divisor 130
- Kantenvektor 43
- Kantenzahl eines Fächers 114
- Kante von C 11
- Kategorie 26
- der affinen torischen Varietäten 41
- – Gitterfächer 50
- – Gitterunterhalbgruppen 31
- – Laurent-Teilalgebren 31, 41
- Kegel 4
- , affiner über Y 103
- , dualer 5, 9, 21
- , e^* -spitzer 61
- kegelförmig 4
- Kegelmorphismus 25, 37, 79
- , N - 19
- , polyedrischer 8
- , projektiver 257
- , projektiver quadratischer 49
- , quadratischer
- 17, 21, 34, 36, 39, 48f., 52, 114, 281
- , rationaler polyedrischer 19
- , simplizialer 20, 107
- , spitzer 13, 16
- Kern einer Menge 6
- eines Kegels 83
- Kettenbruch 138
- Künnethformel
- 150, 153, 168, 216, 251, 253, 273, 278
- der lokalen Homologie 113
- für Divisoren 168
- klassifizierender Raum 243
- kleine Untergruppe 110
- Kohomologie 212, 256, 263
- , äquivariante 243
- mit kompakten Trägern 157
- kollinear 66
- kombinatorisch äquivalent 52, 60, 70, 72
- kombinatorische Invariante
- 52, 155, 256, 263, 289
- kombinatorischer harter Lefschetzsatz 290
- kompakte Teilmenge 5
- Kompaktifizierung einer T -Varietät 100
- Komplex, azyklischer 260
- komplexe Topologie 29
- Komponente, irreduzible 90
- konkav 186
- konkave Funktion 182
- Konkavitätskriterium 183
- konstruierbare Menge 84
- Kontraktionskriterium 100
- konvexe Hülle einer Menge 54
- – eines Fächers 51, 73
- Menge 4
- konvexer Träger 161
- Koordinaten 29, 33
- Korang 150
- Koszulkomplex 261
- Kozykelbedingung 170
- Kurvenüberdeckungseigenschaft 100, 249
- Kurvenfortsetzungseigenschaft 97
- Laurentalgebra 30, 42
- Laurentpolynom 30, 33
- Lee 239
- Lefschetzsatz, harter 215
- Lemma von Gordan 23
- Leray-Serre-Spektralsequenz 249, 281
- Link 272
- lokal abgeschlossen 84, 86, 88
- Lokal-aus-Global-Formel 287, 290
- lokale Bettizahl 289
- Homologie 110f., 113f.
- Schnitthomologie 272
- Trivialisierung 170
- freie Garbe 165
- Lokalisierung 38, 227
- Lokalisierungslemma 173, 201
- Lokalisierungssatz 251
- Macaulay 238
- Mannigfaltigkeit 75
- maximaler Kegel 43
- maximales Ideal 249
- Mayer-Vietoris-Sequenz 134, 153, 158, 247

McMullen Vermutung	214, 239	Nullkegel	4, 88
mehrfach projektiver Fächer	68	Nullschnitt	121
metrische Topologie	78	offene Einbettung	44
minimale Auflösung	135, 140f.	Oktaeder	263
– Erweiterungsgarbe	277, 282f.	Ordnung auf Δ^n	206
minimales Modell	250	Orientierung	218
Minkowskisumme	4, 8, 67, 142	Orientierungsgarbe	112
Modell, minimales	250	orthogonaler Vektorraum zu A	5
Modul, freier	251, 253, 278	orthogonale Seite	15
Moment-Kurve	57	\mathbb{P}_1 -Bündel	121
monomialer Algebromorphismus	29	p -Gruppe	231
– Morphismus	31	Picardgruppe	171f., 178
Morphismus algebraischer Gruppen	39, 77	platonischer Körper	55f.
–, eigentlicher	204	\mathbb{P}_n	182
–, schwach eigentlicher	100	Poincarédualität	116f., 158, 269, 290, 292f.
–, torischer	39	Poincaréhomomorphismus	214
– torischer Varietäten	37, 50	Poincarépolynom	154, 262f., 287
– von Fächern	49	–, virtuelles	154f., 159
– – Gitterkegeln	25	Poincaréreihe	262
– – Kegeln	25	polares Polytop	63
– – Unterhalbgruppen	26	Polyeder	60, 180
Moving Lemma	213	polyedrischer Kegel	8
Multiplikativität	154, 157	Polytop	44, 54, 60, 69, 72f., 182, 191
Multiplizität	136	–, duales	63
– des Kegels σ	143	–, einfaches	68, 161
M-Vektor	238f.	polytopischer Fächer	67, 70, 72f., 192
Nagata	155	–, N -	61
Nakai-Moishezon-Kriterium	200	–, N -rationales	61
Neilsche Parabel	42	–, polares	63
Newton-Polytop	80	–, rationales	63
N -Fächer	43	–, reflexives	64
nicht entarteter Fächer	114, 151, 163	–, simpliziales	58
Niederblasen einer Kurve	92, 97	–, zyklisches	57, 59f., 239f.
N -Kegel	19	Prägarbe	111, 117, 247
Noether, Max	132	Primdivisor	162, 196f.
Noethersche Formel	128	primitiver Fächervektor	43
normale Pseudomannigfaltigkeit	272	– Gittervektor	19
normaler Ring	30	Primzahl, relevante	225
normale Varietät	33, 42	Prinzipalbündel	279
Normalisierung	42, 273	Prisma	56
N -Polytop	61	Produkt	107
– -rationaler Kegel	19	Produktformel für Fundamentalgruppen	146
N -rationales Polytop	61		

-
- torischer Varietäten 45, 48
 - Produktzerlegung, äquivariante 40
 - , kanonische 40
 - projektiv algebraische Varietät 192
 - projektive Ebene 100, 122
 - projektiver Fächer 68
 - Kegel 257
 - quadratischer Kegel 49, 89
 - Raum 47, 68, 89, 166
 - Varietät 70, 191
 - Pseudomannigfaltigkeit 270ff.
 - Pseudopotenz 238
 - pull-back 197
 - push-forward 204
 - pushout 149
 - Pyramide 56
 - \mathbb{Q} -faktoriell 116
 - quadratischer Kegel
 - 17, 21, 34, 36, 39, 48f., 52, 114, 281
 - Quadrik 188
 - quasikonvexer Fächer 278, 281, 284, 286
 - Quotient 205
 - Quotientenfächer 92, 94
 - Quotientengitter 94
 - Quotientensingularität 102, 107, 109
 - Rand eines Polytops 63
 - Randfächer 44, 89, 259
 - Rang 152
 - einer lokal freien Garbe 165
 - eines Gitters 151
 - rational äquivalent 197
 - rationale Homologiemannigfaltigkeit
 - 116f., 212
 - Normalkurve 57, 102
 - rationaler Doppelpunkt 139
 - polyedrischer Kegel 19
 - Schnitt 130, 171, 174
 - rationales Polytop 63, 65
 - Varietät 38
 - Raum, klassifizierender 243
 - Reduktionsbedingung 251, 253, 278
 - Reflexion 110
 - reflexives Polytop 64
 - regulärer Fächer 75, 115
 - Fächerzahlenzyklus 125, 127, 137
 - Fächerzyklus 118, 123
 - Kegel 35
 - Schnitt 172
 - reguläre Unterteilung 139f., 142
 - Varietät 35, 86, 115
 - rein vom Gewicht j 160
 - relativer Rand 6
 - relatives Inneres von A 6
 - relevante Primzahl 225
 - R -regulär 208
 - saturiert 30
 - saturierte Hülle 42
 - Unterhalbgruppe 24
 - Satz, harter Lefschetz- 274
 - von Hahn-Banach 6f.
 - – Hironaka 155
 - – Jurkiewicz-Danilov 212, 237, 249, 262
 - – Macaulay 239
 - – Nagata 100, 155
 - – Sumihiro 81, 100
 - – van Kampen 149
 - schälbar 207, 209
 - Schälung 207
 - Schönhardtfigur 73
 - Schlegeldiagramm 44
 - Schnitt 171
 - Schnittkohomologie 269, 273
 - , äquivariante 274f.
 - , lokale 272
 - , virtuelle 287
 - in einem Bündel 121
 - Schnittkohomologie 160
 - Schnittmatrix 132
 - Schnittprodukt 198, 269f.
 - , rationaler 130, 171, 174
 - , regulärer 172
 - Schnittzahl 198
 - von Kurven 128
 - Schnittzykel 194, 203
 - Schnittzyklus 197
 - schwach eigentlicher Morhismus 100

Segrekegel	37	symmetrische Algebra	244
sehr ample Divisor	190, 192	tautologisches Bündel	170f., 244
Seite, echte	55	\mathbb{T} -Bündel, universelles	243
– eines Kegels	11	Teilfächer	43
– – Polytops	55	Tensorprodukt	171
Seitenfächer	43	–, getwistetetes	249
– eines Kegels	90	– von Geradenbündeln	171
Seitenmorphismus	25, 37, 40	Térouanne	219
Seitenverband	11	Thom-Isomorphismus	280
Seitenzahl	52, 56	Toleranz	269
–, uneigentliche	55	–, komplexe	29
Selbstschnittzahl	129f., 137	–, metrische	78
Separationssatz	23	torische Fläche	100, 118, 122, 127
Simplex	20, 57	torischer Morphismus	39, 41
simpliziale Auflösung	141	– Spektralsequenz	217
simplizialer Fächer		– Varietät	46
110, 116, 160, 166, 247, 257, 263, 267, 283		Torsion	221, 226, 236
– Kegel	20, 107	torsionsfrei	149, 257
simpliziales Polytop	55, 58	torsionsfreie Gruppe	27
– Unterteilung	141f.	Torsionsgruppe	149
Singularität	270	Torus, algebraischer	33
Singularitätenauflösung	135, 139	Toruswirkung	39, 50
singularitätenfrei	96	TOV	52f.
Singularitätenmenge	90	\mathbb{T} -Prinzipalbündel	243
Smith-Normalform	28	transversal	271
Spektralsequenz	234	– schneiden	128
Spektralsequenz, torische	217	Träger eines Divisors	162
Spektrum	29	– – Fächers, konvexer	161
spitzer Kegel	13, 16	– eines Kegels	25
Stabilisator	205	Trägerfunktion	72f., 167, 180, 191
Standardkubus	210	– eines Divisors	168
Standardwürfel	70	–, streng konkave	72
Stanley-Reisner-Garbe	256	triviales Geradenbündel	170
– – Ring	212, 255, 263	Trunkierung	252
starker Deformationsretrakt	111	Umgebung, ausgezeichnete	272
stellare Unterteilung	142f.	uneigentliche Seite	55
Stern	13, 87, 89, 93	unimodulare Abbildung	20, 25
Stützhyperbene	55	– Transformation	118
Stützvektor	14	universelle Eigenschaft	45
Stratum	271	Universelles Koeffiziententheorem	
streng konkave Trägerfunktion	72, 192	113, 134, 150, 219	
Sullivan	250	– \mathbb{T} -Bündel	243
Sumihiro	81, 100	Untergitter von endlichem Index	105f.

-
- Untergruppe, kleine 110
 - Unterhalbgruppe, erzeugende 24
 - , saturierte 24
 - Unterteilung 50, 72
 - eines Fächers 135
 - – Kegels 25
 - , simpliziale 141
 - Vandermonde-Determinante 58
 - Varietät, affine 89
 - – torische 33, 165
 - , faktorielle 115
 - , projektiv algebraische 192
 - , projektive 191
 - , \mathbb{Q} -faktorielle 116
 - , rationale 38
 - , reguläre 75, 86, 115
 - , singularitätenfreie 75
 - , \mathbb{T} - 51
 - , torische 46
 - , vollständige 100, 192
 - Vektorraum, dualer 4
 - , zu A orthogonaler 5
 - Verband 8, 10, 63, 87, 93
 - Verbandsisomorphismus 64, 93
 - von Kegeln 20
 - Verfeinerung 66, 284
 - Verheftungslemma 44
 - Veronese-Einbettung von \mathbb{P}^{n-1} 108
 - Verschwindungsbedingung 253, 278, 293
 - Vervollständigung einer \mathbb{T} -Varietät 100
 - eines Fächers 52, 100
 - Vielfachheit 162
 - eines Schnittes 174
 - virtuell 286
 - virtuelle Bettizahl 287
 - Schnitthomologie 287
 - virtuelles Poincarépolynom 154f., 159
 - volldimensionaler Kegel 6
 - volldimensional erzeugter Fächer
 - 180, 257, 259f., 267
 - vollständiger Fächer 51, 66, 72, 100, 249
 - vollständige Varietät 98, 100, 160, 192
 - Weihnachtsstern 72, 126
 - Weildivisor 162, 166
 - Weildivisorenklassen 173
 - Weildivisorenklassengruppe 178
 - , invarianter 163
 - welke Garbe 264
 - Wörterbuch 42, 53, 82, 89, 101, 117, 193
 - Würfel 141, 179
 - Whitneyschirm 272
 - Wirkung von \mathbb{T} auf $\mathbb{C}[M]$ 164
 - – \mathbb{T}_N auf X_Δ 50
 - Zariskitopologie 145
 - Zerlegungssatz 274, 284
 - für welche Garben 265
 - zusammenziehbar 145f., 148
 - zyklisches Polytop 57, 59f., 239f.