

---

Proseminar Graphentheorie

---

## 1 Kerndaten

### Zielgruppe:

- Bachelor Mathematik 2.-4. Semester
- Master Wirtschaftspädagogik Wahlpflichtfach Mathematik

### Umfang:

- 2 Semesterwochenstunden
- 3 ECTS-Credits

### Anrechenbarkeit:

- Proseminar im Bachelor Mathematik (laut Prüfungsordnung wird im Bachelor Mathematik ein Proseminar benötigt)
- MA-WP-WPF-MAT-5 (bitte bei den Wirtschaftspädagogen rückversichern!)
- nicht im Lehramt Mathematik anrechenbar
- eventuell in anderen Studiengängen (es ist uns unmöglich bei der Vielzahl der Studiengänge den Überblick zu behalten, informieren sie sich in den jeweiligen Prüfungsordnungen und bei den jeweils zuständigen Fachstudienberatern)

### Voraussetzungen:

- keine

### Bedingungen zum Bestehen:

- 70-minütiger Vortrags mit anschließender Diskussion
- Verfassen eines 2-3-seitigen Schriftdokuments in LaTeX
- regelmäßiges Erscheinen
- Erstellen kleiner Resümees über die Vorträge der anderen Teilnehmer

### Dozenten:

- Tom-Lukas Kriel
- Markus Schweighofer

**Wöchentlicher Termin:** wird festgelegt in Abhängigkeit der terminlichen Präferenzen der Dozenten und der Teilnehmer

**Ablauf:** Das Proseminar umfasst bis zu 14 Termine. An jedem dieser Tage hält ein Student einen Vortrag. Der zeitliche Ablauf sollte folgendermaßen aussehen:

- 5 Minuten: Vorlesen einiger Resümees zum Vortrag der letzten Woche
- 70 Minuten: Vortrag eines Studenten
- 15 Minuten: Anschließende Diskussion

**Lernziele:**

- angeleitetes selbstständiges Einarbeiten in ein neues Thema
- Erstellen und Halten eines pädagogisch wertvollen Vortrags
- ein mathematisches Dokument mit  $\LaTeX$  erstellen

## 2 Bestehenskriterien

Das entscheidende Bestehenskriterium ist natürlich einen pädagogischen wertvollen Vortrag in ansprechender mathematischer Darstellung zu halten. Das Schriftdokument und die Resümees müssen angefertigt werden, spielen jedoch eine geringere Rolle. Im Falle eines unzureichenden Vortrags kann das Seminar eventuell doch noch durch ein deutlich umfangreicheres Schriftdokument und einen Kurzvortrag allein vor den Dozenten bestanden werden. Man muss regelmäßig anwesend sein. Von den insgesamt 14 Terminen können 2 ohne Angabe von Gründen verpasst werden. Nur bei besonderer Begründung kann man öfters abwesend sein. Bei unentschuldigter vermehrter Abwesenheit muss ein umfangreicheres Schriftdokument vorgelegt werden. Das Seminar wird wahrscheinlich benotet.

## 3 Erstellen des Vortrags

Die bis zu 14 Themen werden beim Vorbesprechungstermin für das Seminar an die Studenten verteilt. Sollten nicht alle Themen vergeben werden, so werden die verbleibenden eventuell von Tom Kriel übernommen.

Es wird empfohlen mindestens 6 Wochen vor dem eigentlichen Vortrag mit der Vorbereitung anzufangen. Es ist angedacht, dass Studenten sich zur Vorbereitung mindestens zweimal mit Tom Kriel treffen, um etwaige Fragen zu klären und ihr Vortragskonzept zu besprechen. Die Beweise in Euren Quellen werden wahrscheinlich

nicht alle Details ausführen und in vielen Vortragsthemen sind Übungen genannt, deren Lösungen nicht in selbiger Quelle zu finden sind. Stellen, die ihr nicht versteht, können also beim Treffen mit dem Dozenten ausführlich besprochen werden. Ebenso könnt ihr dort Hinweise zur Lösung der Übungen erhalten.

Der Vortrag soll 60-70 Minuten dauern und als Medium nur die Tafel benutzen. Beamervorträge sind also verboten. Nach Rücksprache mit dem Dozenten kann auch eine Folie für ein aufwendiges Bild benutzt werden. Der Sinn dieser Maßnahme ist, das Vortragstempo zu bremsen. Es ist sehr schwierig bei Beamervorträgen in der Mathematik nicht zu schnell zu werden. Das passiert selbst erfahrenen Mathematikern allzu oft.

Generell ist anzumerken, dass der Sinn des Vortrags ist, Euer Thema den anderen Studenten zu vermitteln. Der Vortrag ist also nicht gedacht, euer Wissen abzuprüfen und zu schauen, wie gut ihr selbst euer Thema verstanden habt. Die maßgeblichen Punkte für die Bewertung eures Vortrages sind daher wie gut verständlich ihr euer Thema darstellt und mathematische Korrektheit. Daher ist es oft besser die Zeit für ein einfaches Beispiel als ein schönes aber schweres Korollar zu verwenden. Das Ziel soll also nicht sein, den Professor zu beeindrucken (dafür ist in höheren Semestern noch genug Gelegenheit).

Wir schlagen folgende Richtlinie für einen Zeitplan vor:

- 2 Wochen: Das Thema sichten und versuchen alle Beweise zu verstehen und Übungen zu lösen
- 1 Woche: Treffen mit dem Dozenten, um übrige Unklarheiten zu klären und die Beweise zu den Übungen finalisieren
- 1 Woche: Konzeption des Vortrags
- 1 Woche: Üben des Vortrags und Treffen mit dem Dozenten, um den Vortrag durchzugehen
- 1 Woche: Änderungen einarbeiten und nochmals üben

Es ist sehr wichtig, den Vortrag frühzeitig in einem freien Raum an der Tafel zu proben. Beim Vortrag vergeht die Zeit wie im Fluge. Häufig überschätzt man die Menge, die man an der Tafel in einer Stunde präsentieren kann, um mindestens das doppelte. Zudem ist das Seminar keine Vorlesung mit Skript. Deshalb muss das Tempo deutlich langsamer sein als in den Vorlesungen, da die Studenten nach Möglichkeit fast alles direkt verstehen sollen. Eine ausführliche Nachbereitung zu Hause wird kaum erfolgen. Außerdem kann Zeit auch für Zwischenfragen aufgebraucht werden.

## 4 Resümees

Es wird weder eine Prüfung am Ende des Semesters noch Übungsblätter geben. Um eine gewisse Spannung zu erhalten und äußere Anreize zu setzen, die Vorträge der

anderen Studenten konzentriert mitzuverfolgen, soll jeder Student nach jedem Vortrag eine kleine informelle Zusammenfassung desselben schreiben. Der Umfang soll zwischen einer viertel und halben Seite liegen. Ziel soll weniger eine intensive Nachbereitung des Stoffes mit Hilfe der Quellen sein, sondern eher das Rekapitulieren, was man aus dem Vortrag mitgenommen und gelernt hat. Der Zeitaufwand zum Erstellen soll ungefähr 10–15 Minuten betragen. Auf mathematische Vollständigkeit muss dabei nicht so viel Wert gelegt werden, der Text soll eher den Charakter eines mündlich vorgetragenen Resümees haben.

Der Inhalt der Resümees hat **keinen** Einfluss auf das Bestehen der Veranstaltung und soll auch nicht dazu dienen den Stand eures Wissens herauszufinden. Die Resümees sollen am Vortrag des nächsten Seminartermins abgegeben werden. Am Anfang der nächsten Stunde werden dann ein paar dieser vorgelesen, wobei der jeweilige Autor genannt wird. Am Ende der Stunde werden die Resümees dem Vortragenden der letzten Woche ausgehändigt. Diese sollen ihm einen Eindruck vermitteln, wie gut die Studenten Teile seines Vortrages verstanden haben und wiedergeben können.

## 5 Das Schriftdokument

Das Schriftdokument soll ungefähr 2–3 Seiten umfassen und den Studenten mit dem Gebrauch von  $\text{\LaTeX}$  vertraut machen, das quasi allen neueren mathematischen Veröffentlichungen und Skripten als Grundlage dient. Der Text muss keine vollständige schriftliche Ausarbeitung des Themas sein, sondern kann sich auch nur auf Teilaspekte fokussieren. Hier soll auf mathematische Präzision geachtet werden. Das Schriftdokument hat sehr geringen Einfluss auf das Bestehen des Seminars. Abgabe soll spätestens 3 Wochen nach dem eigenen Vortrag sein.

## 6 Literatur

Wir halten uns im Wesentlichen an das Buch von Reinhard Diestel. Die Studenten werden gebeten, sich vor dem Beginn des Seminars mit dem 0. Kapitel des Buches zu beschäftigen und mit Graphen und den gängigsten Definitionen vertraut zu machen: Die folgende Tabelle soll veranschaulichen, was im voraus gelesen werden sollte.

| Lesen   | Muss nicht gelesen werden              |
|---|--|
| Kapitel 0.1 mit allen Definitionen                          |  |
| Kapitel 0.2 mit Proposition 0.2.1                           | Proposition 0.2.2                      |
| Kapitel 0.3 bis vor Proposition 0.3.1, Definition Kantenzug | Proposition 0.3.1 bis Korollar 0.3.5   |
| Kapitel 0.4 bis vor Proposition 0.4.2                       | Proposition 0.4.2 und was danach kommt |
| Kapitel 0.5 bis einschließlich Satz 0.5.1                   | Korollar 0.5.2 und was danach kommt    |
|   | Kapitel 0.6-Kapitel 0.10               |

## 7 Themenübersicht

- (i) **Der Heiratssatz**
- (ii) **Der Satz von Gale-Shapley**
- (iii) **Der Satz von Cantor-Bernstein**
- (iv) **Der Satz von Menger**
- (v) **2-zusammenhängende Graphen**
- (vi) **Flüsse**
- (vii) **Hamiltonkreise**
- (viii) **Chromatische Zahl**
- (ix) **Freundschaftsgraph**
- (x) **Der Satz von Turan**
- (xi) **Das Unendlichkeitslemma von König**
- (xii) **Der Satz von Ramsey**
- (xiii) **Zufallsgraphen I**
- (xiv) **Zufallsgraphen II**

Es folgt eine Beschreibung der Vortragsthemen. Die "optionalen Bestandteile des Vortrags" sind als Anregung gedacht und sollen nur in die Präsentation aufgenommen werden, wenn ausreichend Zeit vorhanden ist. Es ist ratsam, den Vortrag so zu gestalten, dass man sie notfalls weglassen kann, wenn man mehr Zeit verbraucht als geplant. Oft ist es auch nützlich einfache Beispiele für die Hauptresultate/Definitionen zu geben. Dies ist unter dem Punkt "optionalen Bestandteile des Vortrags" meist nicht aufgeführt, ist aber häufig wichtiger als noch ein weiteres Resultat zu präsentieren. Studenten, welche nicht unten aufgeführte Teile aus dem Buch von Diestel oder auch aus anderen Quellen in den Vortrag einbauen zu wollen, können dies nach Absprache mit den Dozenten gerne tun, MÜSSEN aber unbedingt darauf achten, dass diese Punkte nicht bei anderen Vorträgen aufgeführt sind. Die "Hauptbestandteile des Vortrags" sollen auf jeden Fall im Vortrag besprochen werden. Im Allgemeinen sollen die im Vortrag vorgestellten Resultate bewiesen werden (insbesondere die Hauptbestandteile).

## 7.1 Der Heiratssatz

- Literatur: Graphentheorie (Diestel) Kapitel 1.1
- Hauptbestandteile des Vortrags: Beweis des Satzes von König (Satz 1.1.1), Beweis des Satzes von Hall (Satz 1.1.2., entweder den ersten oder zweiten Beweis)
- Optionale Bestandteile des Vortrags: Übung 5 (den Satz von Hall aus dem Satz von König herleiten), Übung 8 (gilt der Heiratssatz auch für unendliche Graphen?), Korollar 1.1.3

## 7.2 Der Satz von Gale & Shapley

- Literatur: Graphentheorie (Diestel) Kapitel 1.1 (Zusatzquelle)
- Hauptbestandteile des Vortrags: Beschreibung eines Algorithmus, um eine maximale Paarung in einem bipartiten Graphen zu finden (Übung 1 und Übung 2), Satz 1.1.4 von Gale & Shapley
- Optionale Bestandteile des Vortrags: Übung 12 (finde einen bipartiten Graph mit Präferenzliste, für den keine maximale Paarung stabil ist; finde einen nicht bipartiten Graph mit Präferenzlisten, für den es keine stabile Paarung gibt), Übung 14 (alle stabilen Paarungen verfügen über dieselben Eckenmengen), Übung 15 (Der Gale-Shapley-Algorithmus liefert für  $A$  das bestmögliche Resultat (siehe Zusatzquelle))

## 7.3 Der Satz von Cantor-Bernstein

- Literatur: Graphentheorie (Diestel) Kapitel 1.1 und Kapitel 0.8 (Zusatzquelle)
- Hauptbestandteile des Vortrags: Übung 3 von Kapitel 1 (Beweis des Satzes von Cantor-Bernstein anhand von unendlichen Graphen, Zusatzquelle), Beweis des Satzes von Euler (Satz 0.8.1)
- Optionale Bestandteile des Vortrags: Übung 8 von Kapitel 1 (Partitionen und gemeinsame Repräsentantensysteme) Korollar 1.1.5 (benötigt Korollar 1.1.3. des ersten Vortrags),

## 7.4 Der Satz von Menger

- Literatur: Graphentheorie (Diestel) Kapitel 2.3
- Hauptbestandteile des Vortrags: Beweis des Satzes von Menger (Satz 2.3.1, wir raten zum Zweiten Beweis im Buch), Korollar 2.3.4, Korollar 2.3.5 (i), Satz 2.3.6 (i)
- Optionale Bestandteile des Vortrags: Korollar 2.3.5 (ii), Satz 2.3.6 (ii), Übung 18

## 7.5 2-zusammenhängende Mengen

- Literatur: Graphentheorie (Diestel) Kapitel 2.1
- Hauptbestandteile des Vortrags: Proposition 2.1.1, Definition von Blöcken und die Tatsache, dass jede Kante in genau einem Block liegt und sich zwei Blöcke genau in einem Punkt, einer Artikulation schneiden
- Optionale Bestandteile des Vortrags: Lemma 2.1.2 (i), Lemma 2.1.3 ohne (iii), Proposition 2.1.4, Übung 21, Übung 22

## 7.6 Flüsse

- Literatur: Graphentheorie (Diestel) Kapitel 5.1, 5.2
- Hauptbestandteile des Vortrags: Einführen von Flüssen, Satz 5.2.2 von Ford-Fulkerson (ohne Schlingen und Multikanten), Übung 3 (Kantenversion des Satzes von Menger)
- Optionale Bestandteile des Vortrags: Übung 12

## 7.7 Hamiltonkreise

- Literatur: Graphentheorie (Diestel) Kapitel 8.1
- Hauptbestandteile des Vortrags: Satz 8.1.1, Proposition 8.1.2
- Optionale Bestandteile des Vortrags: Satz 8.1.3, Übung 1, Übung 3

## 7.8 Chromatische Zahl

- Literatur: Graphentheorie (Diestel) Einleitung Kapitel 4, Kapitel 4.2, 4.3
- Hauptbestandteile des Vortrags: Greedy-Algorithmus zur Findung einer Eckenfärbung (Kapitel 4.2.1) in Verbindung mit Proposition 4.2.2, Satz 4.3.2 von Vizing
- Optionale Bestandteile des Vortrags: Lemma 4.2.3, Proposition 4.3.1 (mit der trivialen Richtung von Proposition 0.6.1)

## 7.9 Friendship problem

- Literatur: Graph theory (Bondy-Murty) Kapitel 3.1 (in Englisch)
- Hauptbestandteile des Vortrags: Friendship Theorem 3.1, Übung 3.1.2,
- Optionale Bestandteile des Vortrags: Übung 3.1.12, wie kann man die Länge des kürzesten Weges zwischen zwei Punkten  $x$  und  $y$  mit der Adjazenzmatrix ausrechnen?, Proposition 0.6.1 (Diestel) ohne Spannbäume zu benutzen

## 7.10 Der Satz von Turan

- Literatur: Graphentheorie (Diestel) Kapitel 6.1, Kapitel 0.7
- Hauptbestandteile des Vortrags: Satz 6.1.1 von Turan (erster Beweis), Abschätzung für Turanzahl auf Seite 192 und Lemma 6.1.4/Übung 9
- Optionale Bestandteile des Vortrags: zweiter Beweis des Satzes von Turan, Einführung Minoren und Proposition 6.2.1

## 7.11 Spannbäume und das Unendlichkeitslemma von König

- Literatur: Graph theory (de Zeeuw), Graphentheorie (Diestel) Kapitel 7.1, <https://www.math.uni-hamburg.de/home/schacht/lehre/SS13/GT/Ch8prelims.pdf>
- Hauptbestandteile des Vortrags: Algorithmus zur Gewinnung eines Spannbaums (Proposition 2.2.1 in Graph Theory von de Zeeuw, wir benutzen einen anderen Beweis und zeigen per Induktion, dass je zwei Punkte nur durch genau einen Weg verbunden sind), Königs Unendlichkeitslemma Lemma 7.1.3
- Optionale Bestandteile des Vortrags: Übung 12 (Diestel), Zeige: abzählbare zusammenhängende Graphen enthalten einen Spannbaum (mit Königs Lemma), Proposition 8.2.1 in Schacht-Skript, Greedy Tree Algorithmus (de Zeeuw, Theorem 2.4.1)

## 7.12 Der Satz von Ramsey

- Literatur: Graphentheorie (Diestel) Kapitel 7.1
- Hauptbestandteile des Vortrags: Satz von Ramsey 7.1.1, Satz 7.1.2, Satz 7.1.4
- Optionale Bestandteile des Vortrags: Übung 7

## 7.13 Zufallsgraphen I

- Literatur: Graphentheorie (Diestel) Kapitel 9.1, Kapitel 9.2, Kapitel 9.3
- Hauptbestandteile des Vortrags: Allgemeine Einführung in Zufallsgraphen und probabilistische Methode, Satz 9.2.2 von Erdős und Satz 9.3.5 sollen bewiesen werden (aufgrund der Fülle des Materials können hier evtl. manche Beweise auch nur grob skizziert werden). Die oben beschriebenen Themen sollen in 2 Vorträgen behandelt werden. Beide Vortragende müssen sich also sehr genau abstimmen und verantwortungsvoll planen. Die Einteilung des Themas in zwei Hälften soll eigenständig (mit Absprache mit den Dozenten) erfolgen.

## 7.14 Zufallsgraphen II

- Literatur: Graphentheorie (Diestel) Kapitel 9.1, Kapitel 9.2, Kapitel 9.3
- Hauptbestandteile des Vortrags: Allgemeine Einführung in Zufallsgraphen und probabilistische Methode, Satz 9.2.2 von Erdős und Satz 9.3.5 sollen bewiesen werden (aufgrund der Fülle des Materials können hier evtl. manche Beweise auch nur grob skizziert werden). Die oben beschriebenen Themen sollen in 2 Vorträgen behandelt werden. Beide Vortragende müssen sich also sehr genau abstimmen und verantwortungsvoll planen. Die Einteilung des Themas in zwei Hälften soll eigenständig (mit Absprache mit den Dozenten) erfolgen.