Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2015/2016

Tom-Lukas Kriel
Markus Schweighofer

Übungsblatt 14 zur Algorithmischen Algebraischen Geometrie

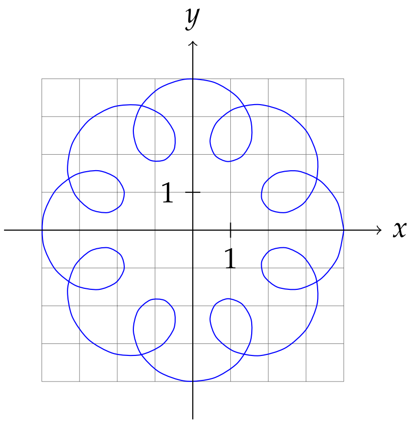
Aufgabe 1. (6P) (Eine Anwendung des Hauptsatzes der Eliminationstheorie)

Erkläre sehr ausführlich und im Detail, warum verschiedene Resultate aus der Vorlesung zusammen mit dem folgenden SINGULAR-Code zeigen, dass

$$\begin{aligned}
&\{(3\cos\varphi + \cos(9\varphi), 3\sin\varphi + \sin(9\varphi)) \mid \varphi \in [0, 2\pi)\} = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \\
&y_1^{18} + 9y_1^{16}y_2^2 - 18y_1^{16} + 36y_1^{14}y_2^4 - 144y_1^{14}y_2^2 + 27y_1^{14} + 84y_1^{12}y_2^6 - 504y_1^{12}y_2^4 \\
&+ 189y_1^{12}y_2^2 + 150y_1^{12} + 126y_1^{10}y_2^8 - 1008y_1^{10}y_2^6 + 567y_1^{10}y_2^4 + 900y_1^{10}y_2^2 + 873y_1^{10} + 126y_1^8y_2^{10} \\
&- 1260y_1^8y_2^8 + 945y_1^8y_2^6 + 2250y_1^8y_2^4 + 4365y_1^8y_2^2 - 34128y_1^8 + 84y_1^6y_2^{12} - 1008y_1^6y_2^{10} + 945y_1^6y_2^8 \\
&+ 3000y_1^6y_2^6 + 8730y_1^6y_2^4 + 1123200y_1^6y_2^2 + 30720y_1^6 + 36y_1^4y_2^{14} - 504y_1^4y_2^{12} + 567y_1^4y_2^{10} + 2250y_1^4y_2^8 \\
&+ 8730y_1^4y_2^6 - 2724192y_1^4y_2^4 + 92160y_1^4y_2^2 + 147456y_1^4 + 9y_1^2y_2^{16} - 144y_1^2y_2^{14} + 189y_1^2y_2^{12} \\
&+ 900y_1^2y_2^{10} + 4365y_1^2y_2^8 + 1123200y_1^2y_2^6 + 92160y_1^2y_2^4 + 294912y_1^2y_2^2 + y_2^{18} - 18y_2^{16} + 27y_2^{14} + 150y_2^{12} \\
&+ 873y_2^{10} - 34128y_2^8 + 30720y_2^6 + 147456y_2^4 - 16777216 = 0\}.
\end{aligned}$$

```
LIB "poly.lib"; // for having the "substitute" command
proc Re(poly p) {return(reduce((p+conj(p))/2,J))} // real part
proc Im(poly p) {return(reduce(-ii*(p-conj(p))/2,J))} // imaginary part

ring R=0,(ii,x0,x1,x2,y1,y2),lp;
ideal J=ii^2+1; // imaginary unit
map conj=R,-ii,x0,x1,x2,y1,y2; // complex conjugation
poly f1=3*x1*x0^8+Re((x1+ii*x2)^9);
poly f2=3*x2*x0^8+Im((x1+ii*x2)^9);
poly g=x1^2+x2^2-x0^2;
ideal I=f1-x0^9*y1,f2-x0^9*y2,g; // homogeneous in the x-variables

/* projective elimination of the x-variables */
ideal G0=groebner(substitute(I,x0,1));
ideal G1=groebner(substitute(I,x1,1));
ideal G2=groebner(substitute(I,x2,1));
int i;
for (i=1; i<=size(G0); i++) {print(variables(G0[i]),"%s");}
for (i=1; i<=size(G1); i++) {print(variables(G1[i]),"%s");}
for (i=1; i<=size(G2); i++) {print(variables(G2[i]),"%s");}
G0[1]==G1[1];
```

```
G0[1]==G2[1];
G0[1]; // the polynomial defining the projection on the y-space

/* exclude solutions at infinity */
groebner(substitute(I,x0,0));

/* exclude non-real solutions */
substitute(f2,x1,y1,x2,y2)==substitute(f1,x1,y2,x2,y1); // detect symmetry
ring A=0,(ii,a,b,c,d),lp;
map conj=A,-ii,a,b,c,d; // complex conjugation
map phi=R,ii,1,a+b*ii,c+d*ii,0,0;
ideal J=ii^2+1; // imaginary unit
ideal K=Im(phi(f1)),Im(phi(f2)),Re(phi(g)),Im(phi(g));
ideal H=groebner(K);
H[1];
```



Aufgabe 2. (7P) (Projektive Elimination im projektiven Raum)

In dieser Aufgabe soll die Eliminationstheorie von $\pi : \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n, (x, y) \mapsto y$ selbstständig erarbeitet werden. Finde eine möglichst große Klasse an Idealen $I \subseteq K[X_0, ..., X_m, Y_0, ..., Y_n]$, für die sich $V_{\mathbb{P}^m,\mathbb{P}^n}(I)$ in $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$ erklären lässt. Versuche den Hauptsatz der Eliminationstheorie auf dieses Setting zu übertragen, d.h. finde eine möglichst genaue Beschreibung von $\pi(V_{\mathbb{P}^m,\mathbb{P}^n}(I))$.

Hinweis: Diese Aufgabe mag schwieriger aussehen als sie ist. Der Reiz der Aufgabe liegt weniger darin, den konkreten Beweis zu führen als die Behauptung aufzustellen. Zudem sei angemerkt, dass man hier nicht die Wohldefiniertheit der aufgestellten Konstruktionen aus dem Auge verlieren sollte.

Aufgabe 3. (3P) (Beispiele projektiver Varietäten)
Seien $m, n \in \mathbb{N}_0$ und $V, W \subseteq \mathbb{P}^n$ projektive K-Varietäten. Zeige, dass

$$Z := \bigcup_{v \in V} \{w \in W \mid v \text{ und } w \text{ sind orthogonal } \} \subseteq \mathbb{P}^n$$

eine projektive K-Varietät ist.

Abgabe bis Mittwoch, den 10. Februar 2015, 11:44 Uhr in die Zettelkästen neben F411.