Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2015/2016

Tom-Lukas Kriel
Markus Schweighofer

Übungsblatt 2 zur Algorithmischen Algebraischen Geometrie

Aufgabe 1. (2P) (Unendlichkeit algebraisch abgeschlossener Körper)

Zeige, dass jeder algebraisch abgeschlossene Körper unendlich ist.

Aufgabe 2. (5P) (Wann sind Hauptideale Radikalideale?)

(a) Seien K ein Körper, $m \in \mathbb{N}_0$, $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{N}$, $f_1, \dots, f_m \in K[X_1, ..., X_n]$ paarweise nichtassoziiert und irreduzibel und $f := f_1^{\alpha_1} \cdots f_m^{\alpha_n}$. Zeige, dass dann $\sqrt{(f)} = (f_1 \cdots f_m)$ gilt.

(b) Sei K ein vollkommener Körper und C ein algebraisch abgeschlossener Oberkörper von K. Sei $f \in K[X] \setminus \{0\}$. Zeige, dass das von f in $K[X]$ erzeugte Ideal genau dann ein Radikalideal ist, wenn f in C nur einfache Nullstellen hat.

Aufgabe 3. (4P) (Ein Hilbertscher Nullstellensatz für lineare Polynome)

Seien $\ell_1, \dots, \ell_s \in K[X_1, \dots, X_n]$ linear, das heißt vom Grad ≤ 1. Zeige, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

(a) $V(\ell_1, \dots, \ell_s) \cap K^n = \emptyset$

(b) $V(\ell_1, \dots, \ell_s) = \emptyset$

(c) Es gibt $a_1, \dots, a_s \in K$ mit $1 = a_1\ell_1 + \cdots + a_s\ell_s$.

Benutze dabei *nicht* den Hilbertschen Nullstellensatz, sondern Lineare Algebra.

Aufgabe 4. (5P) (Nullstellenmengen in nicht algebraisch abgeschlossenen Körpern)

Sei K ein nicht algebraisch abgeschlossener Körper. Seien $m \in \mathbb{N}_0$ und $f_1, ..., f_m \in K[X_1, ..., X_n]$. Zeige, dass es $f \in K[X_1, ..., X_n]$ gibt mit

$$\{x \in K^n \mid f_1(x) = ... = f_m(x) = 0\} = \{x \in K^n \mid f(x) = 0\}.$$

Hinweis: Es sei $d \in \mathbb{N}$ und $g = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i \in K[X]$ mit $a_1, \dots, a_d \in K$ und $a_d \neq 0$ ein Polynom, welches in K keine Nullstelle besitzt. Betrachte die *Homogenisierung* $g^* := \sum_{i=0}^{d} a_i X^i Y^{d-i} \in K[X, Y]$ von g und zeige, dass g^* in K^2 nur $(0, 0)$ als Nullstelle besitzt. Konstruiere jetzt für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ ein Polynom in $K[X_1, ..., X_n]$, welches nur $(0, ..., 0)$ als Nullstelle in K^n besitzt. Benutze ein solches Polynom für Deine Konstruktion der benötigten Gleichung.

Abgabe bis Mittwoch, den 4. November 2015, 11:44 Uhr in die Zettelkästen neben F411.