
Übungsblatt 4 zur Algorithmischen Algebraischen Geometrie

Auf dem ganzen Blatt sei K ein Körper, C ein algebraisch abgeschlossener Oberkörper und $\mathbb{A}^n := C^n$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe 1. (5P) (Kreuzprodukt von irreduziblen Varietäten)

Beweise oder widerlege: Für einen beliebigen Körper K und einen beliebigen algebraisch abgeschlossenen Oberkörper C gilt: Seien $V \subseteq \mathbb{A}^m$ und $W \subseteq \mathbb{A}^n$ irreduzible affine K -Varietäten. Dann ist $V \times W \subseteq \mathbb{A}^{m+n}$ ebenfalls eine irreduzible affine K -Varietät.

Aufgabe 2. (5P) (Berechnungen zum Zariskiabschluss)

Berechne den \mathbb{R} -Zariskiabschluss in \mathbb{C}^2 der folgenden Mengen:

- (a) $\{(n, 2^n) \mid n \in \mathbb{N}\}$
- (b) $\{(n, n^2) \mid n \in \mathbb{N}\}$
- (c) $\left\{v \mid n \in \mathbb{N}, v = \left(n, \left(\sqrt{2} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^n\right), \|v\| < 50\right\}$

Aufgabe 3. (2P) (Affine Varietäten sind quasikompakt)

Ist M eine Menge, so nennt man eine Menge \mathcal{U} von Teilmengen von M mit $M = \bigcup \mathcal{U}$ eine *Überdeckung* von M . Ist dabei M sogar ein topologischer Raum und besteht \mathcal{U} nur aus offenen Teilmengen von M , so nennt man \mathcal{U} eine *offene Überdeckung* von M . Ein topologischer Raum heißt *quasikompakt*, wenn es für jede offene Überdeckung \mathcal{U} eine endliche Überdeckung $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ von M gibt („endliche Teilüberdeckung“). Zeige, dass jeder noethersche topologische Raum quasikompakt ist.

Aufgabe 4. (4P) (Was ist $V(I : J)$?)

Überzeuge Dich davon, dass für alle Ideale I, J in einem kommutativen Ring A auch $I : J = \{a \in A \mid \forall b \in J : ab \in I\}$ wieder ein Ideal von A ist und zeige dann:

- (a) Seien V und W K -Untervarietäten von \mathbb{A}^n . Dann ist $V = (V \cap W) \cup \overline{V \setminus W}$
- (b) Für Ideale $I, J \subseteq K[X]$ gilt $\overline{V(I) \setminus V(J)} \subseteq V(I : J) \subseteq V(I)$.
- (c) Für Ideale $I, J \subseteq K[X]$ gilt $V(I) = V(I + J) \cup V(I : J)$.

Abgabe bis Mittwoch, den 18. November 2015, 11:44 Uhr in die Zettelkästen neben F411.