**Universität Konstanz**
**Fachbereich Mathematik und Statistik**
**Wintersemester 2015/2016**

Tom-Lukas Kriel
Markus Schweighofer

# Übungsblatt 5 zur Algorithmischen Algebraischen Geometrie

**Aufgabe 1. (4P)** (Ein Rechenbeispiel für Irreduzibilität von Varietäten)

Sei $K = \mathbb{C}$. Zeige, dass $V(X^2 - Y^2) \subseteq \mathbb{C}^2$ nicht irreduzibel ist. Zeige, dass $V(X^2 + Y^2 - Z^2) \subseteq \mathbb{C}^3$ irreduzibel ist.

**Hinweis:** Verwende das Kriterium von Eisenstein.

**Aufgabe 2. (4P)** (Maximale Ideale und Varietäten)

Sei $K$ ein Körper, $C$ der algebraische Abschluss von $K$ und $M$ die Menge der maximalen Ideale von $K[X_1, ..., X_n]$. Zeige, dass $V(\mathfrak{m})$ für jedes $\mathfrak{m} \in M$ endlich ist. Beweise ferner

$$\bigcup_{\mathfrak{m} \in M} V(\mathfrak{m}) = C^n$$

und dass die obige Vereinigung disjunkt ist. Folgere, dass in einer affinen Algebra Radikalideale immer Schnitte von maximalen Idealen sind.

**Aufgabe 3. (4P)** (Parametrisch definierte Varietäten sind irreduzibel)

Seien $0 \leq r \leq n$ und $p_1, \ldots, p_r \in K[X_{r+1}, \ldots, X_n]$. Betrachte das Ideal

$$I := (X_1 - p_1, \ldots, X_r - p_r) \subseteq K[X_1, \ldots, X_n].$$

(a) Zeige $I \cap K[X_{r+1}, \ldots, X_n] = (0)$.

(b) Zeige, dass $I$ ein Primideal ist.

(c) Zeige, dass $V(I)$ irreduzibel ist.

**Aufgabe 4. (4P)** (Trennen von Varietäten)

Sei $K$ ein Körper, $V_1, ..., V_m$ affine $K$-Untervarietäten von $\mathbb{A}^n$ und $k_1, ..., k_m \in K$ paarweise verschieden. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) Die $V_i$ sind paarweise disjunkt.

(b) Es gibt $f \in K[X_1, ..., X_n]$ derart, dass $V_i \subseteq V(f - k_i)$ für alle $i \in \{1, ..., m\}$.

**Hinweis:** Benutze den Chinesischen Restsatz.

**Abgabe bis Mittwoch, den 25. November 2015, 11:44 Uhr in die Zettelkästen neben F411.**