
Übungsblatt 6 zur Algorithmischen Algebraischen Geometrie

Aufgabe 1. (3P) (Isomorphie endlicher Varietäten)

Schreibe die Polynome $f := X_1^2 X_2 X_3^3 - 2X_1 X_2^2 X_3 + 3X_2 X_3 + 1$, $g := 5X_1^2 X_2 X_3^3 + 2X_1 X_2^2 X_3 - 3X_2 X_3 + 3$ und $h := X_1^2 X_2 X_3^3 + 2X_1 X_2^2 X_3 - X_2$ aus $\mathbb{Q}[X_1, X_2, X_3]$ bezüglich

- (a) der lexikographischen Ordnung,
- (b) der gradlexikographischen Ordnung und
- (c) der gradrückwärtslexikographischen Ordnung

jeweils so, dass größere Monome weiter links und kleinere Monome weiter rechts stehen. Bestimme jeweils Leitmonom, Leitkoeffizient und Leitterm.

Aufgabe 2. (4P) (Isomorphie von Varietäten)

Zeige:

- (a) Zwei isomorphe affine K -Varietäten haben jeweils gleich viele irreduzible Komponenten.
- (b) $\mathbb{A} \not\cong \mathbb{A}^2$
- (c) Seien V_1 und V_2 affine K -Untervarietäten von \mathbb{A}^m und W_1 und W_2 affine K -Untervarietäten von \mathbb{A}^n mit $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $W_1 \cap W_2 = \emptyset$, $V_1 \cong W_1$ und $V_2 \cong W_2$. Dann gilt $V_1 \cup V_2 \cong W_1 \cup W_2$.

Aufgabe 3. (3P) (Bijektive Morphismen und Isomorphismen)

Beweise oder widerlege: Ist $K = \mathbb{C}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper und sind V und W affine K -Varietäten, für die es von V nach W und von W nach V jeweils einen bijektiven Morphismus gibt, so $V \cong W$.

Aufgabe 4. (6P) (Morphismen und Koordinatenringe)

Sei $\varphi: V \rightarrow W$ ein Morphismus affiner K -Varietäten und $\varphi^*: K[W] \rightarrow K[V]$ der dazu duale K -Algebrenhomomorphismus. Zeige oder widerlege durch ein Gegenbeispiel:

- (a) φ injektiv $\implies \varphi^*$ surjektiv
- (b) φ surjektiv $\implies \varphi^*$ injektiv
- (c) φ^* injektiv $\implies \varphi$ surjektiv
- (d) φ^* surjektiv $\implies \varphi$ injektiv

Abgabe bis Mittwoch, den 2. Dezember 2015, 11:44 Uhr in die Zettelkästen neben F411.