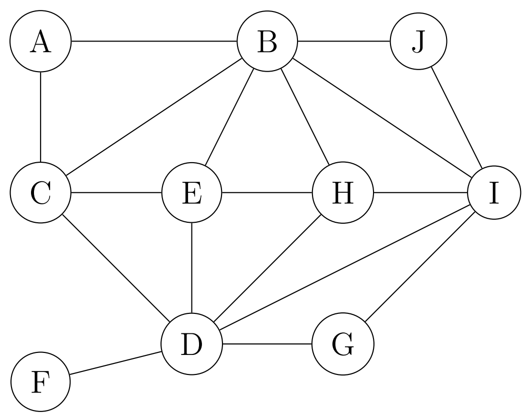
Graphentheorie David Sawall

Chromatische Zahl

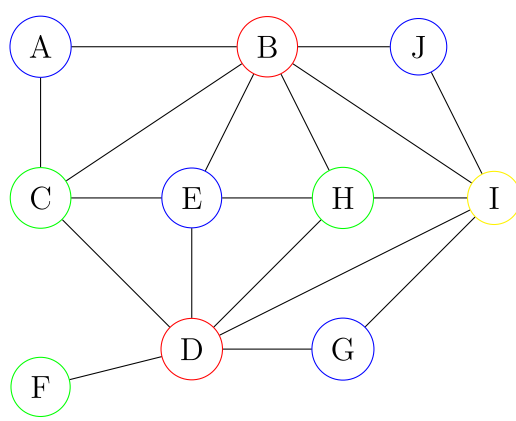
Inhaltsverzeichnis

1 Motivation

Um die Länder auf einer Landkarte zu färben, will man so wenig Farben, wie möglich verwenden. So eine Färbung kann mit Hilfe der Färbung eines Graphen erfolgen, der als Knoten die Landflächen und als Kanten die Grenzen der Länder auf der Karte besitzt.



$$\Downarrow$$



2 Eckenfärbung

Sei in diesem Kapitel $G = (V, E)$ ein Graph.

2.1 Definitionen und Bemerkungen

2.1.1 Definition

Sei S eine Menge. Eine Abbildung $c : V \to S$ mit $c(v) \neq c(w)$ für je zwei benachbarte Ecken $v, w \in V$ heißt „Eckenfärbung" von G. Die Elemente von S werden als „Farben" bezeichnet.

2.1.2 Bemerkung

(i) Da uns lediglich die Mächtigkeit von S interessiert, schreiben wir $S = \{1, \ldots, k\}$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$.

(ii) Eine Eckenfärbung von G mit k Farben wird auch k-Färbung von G genannt.

(iii) Sei $c : V \to \{1 \ldots k\}$ eine Eckenfärbung von G. Dann heißen die Urbilder $c^{-1}(\{i\})$ für $i \in \{1 \ldots k\}$ „Farbklassen" von G.

2.1.3 Definition

Das kleinste $k \in \mathbb{N}_0$, sodass G eine k-Färbung besitzt, heißt „chromatische Zahl" von G, welche mit $\chi(G)$ notiert wird.

2.1.4 Proposition

Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $m \in \mathbb{N}_0$ Kanten, so gilt

$$\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + 1/4}\,.$$

Beweis: Sei $c : V \to \{1, \ldots, k\}$ eine Eckenfärbung von G mit $k = \chi(G)$ Farben. G hat zwischen je zwei verschiedenen Farbklassen mindestens eine Kante, sonst könnten diese Farbklassen gleich gefärbt werden und dies stünde im Widerspruch zur Wahl der Färbung von G. Es gilt

$$m \leq \frac{(k-1)k}{2},$$

da es $\binom{k}{2}$ 2-er Paare von Farbklassen gibt. Durch Umstellen folgt:

$$\chi(G) = k \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}\,.$$

□

2.2 Bestimmungsalgorithmus und Proposition

In diesem Unterabschnitt wird ein Algorithmus zum Finden einer Eckenfärbung eines Graphen beschrieben.

2.2.1 Algorithmus

Definiere $n := |G|$. Als Erstes wird eine Eckenaufzählung $v_1, \dots v_n$ aus Ecken von G konstruiert, welche jede Ecke genau einmal enthält. Dazu wird als v_n eine Ecke mit minimalem Grad in G gewählt, als v_{n-1} eine Ecke mit minimalem Grad in $G - v_n$ gewählt, usw. Damit besitzt jede Ecke $v_i \, (i \in \{1, \dots, n\})$ minimalen Grad in $G[v_1, \dots, v_i]$. Nun wird jede Ecke $v_i \, (i \in \{1, \dots, n\})$ nacheinander, bei v_1 beginnend, mit der kleinst möglichen Farbe $c(v_i) \in \mathbb{N}$ gefärbt, die kein Nachbar $v_j \in N(v_i)$ mit $j < i$ bereits trägt.

2.2.2 Definition

Die kleinste Zahl $k \in \mathbb{N}_0$, für die G eine Eckenaufzählung hat, in der jede Ecke zu weniger als k früheren Ecken in der Eckenaufzählung benachbart ist, wird „Reihenzahl" von G $col(G)$ genannt.

2.2.3 Proposition

Für jeden Graphen $G = (V, E)$ gilt

$$\chi(G) \leq col(G) = max\{\delta(H) | H \subseteq G\} + 1$$

Beweis: $\chi(G) \leq col(G)$ ist klar. Der Algorithmus liefert, dass stets

$$col(G) \leq max\{\delta(H) | H \subseteq G\}$$

gilt, da $col(G) \leq \delta(G[v_1, \dots, v_i]) + 1$ für alle $i \in \{1, \dots, |G|\}$ gilt. Weiter gilt für jedes $H \subseteq G$ jedoch $col(G) \geq col(H)$ und $col(H) \geq \delta(H) + 1$, da bei jeder Eckenaufzählung von H die Anzahl der „vorherigen" Nachbarn der letzten Ecke einfach deren Grad in H ist, also mindestens $\delta(H)$. □

3 Kantenfärbung

Sei in diesem Kapitel $G = (V, E)$ wieder ein Graph.

3.1 Definitionen und Bemerkung

3.1.1 Definition

Sei S eine Menge. Eine Abbildung $c : E \to S$ mit $c(e) \neq c(f)$ für je zwei benachbarte Kanten $e, f \in E$ heißt „Kantenfärbung" von G. Die Elemente von S werden wieder als „Farben" bezeichnet.

3.1.2 Definition

Das kleinste $k \in \mathbb{N}_0$, sodass G eine Kantenfärbung besitzt, heißt „kantenchromatische Zahl“ von G, welche mit $\chi'(G)$ notiert wird.

3.1.3 Bemerkung

Da uns lediglich die Mächtigkeit von S interessiert, schreiben wir $S = \{1, \ldots, k\}$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$.

3.2 Satz

Für jeden bipartiten Graphen $G = (V, E)$ gilt $\chi(G) = \Delta(G)$.
Beweis: Der Beweis wird per vollständiger Induktion nach $||G||$ geführt.

Induktionsanfang: $||G|| = 0$: Klar.

Induktionsvoraussetzung: Für ein G mit $||G|| \geq 0$, gilt $\chi(G) = \Delta(G)$.

Induktionsschritt: Sei G mit $||G|| \geq 1$.
Wähle eine Kante $xy \in E(G) \quad (x, y \in V(G))$ und eine Kantenfärbung

$$c : E(G - xy) \to \{1, \ldots, \Delta(G)\}.$$

Kanten der Farbe $\alpha \in \{1, \ldots, \Delta(G)\}$ werden im Beweis „α-Kanten“ genannt.
In $G - xy$ haben x und y jeweils höchstens $\Delta(G) - 1$ inzidente Kanten. Daher können $\alpha, \beta \in \{1, \ldots, \Delta(G)\}$ gefunden werden, sodass x mit keiner α-Kante und y mit keiner β-Kante inzidiert.

$\alpha = \beta$: Wird xy mit α gefärbt, so ist die gewünschte Δ-Kantenfärbung von G gefunden.

$\alpha \neq \beta$: Ohne Einschränkung ist x mit einer β-Kante inzident. Diese Kante wird zu einem maximalen in x beginnenden Kantenzug W fortgesetzt, dessen Kanten abwechselnd mit α und β gefärbt sind. Da kein solcher Kantenzug eine Ecke öfter als einmal enthält, existiert W und ist insbesondere ein Weg.

Weiter gilt $y \notin W$, da sonst W in einer α-Kante in y enden würde und $W + xy$ wäre dann ein ungerader Kreis, dies ist jedoch unmöglich, da G bipartit ist und in einem bipartiten Graph keine ungerade Kreise existieren.

Nun werden die Farben α und β in W vertauscht. Wegen der Wahl von α und da W maximal ist, sind nun immernoch in ganz $G - xy$ keine gleichfarbigen Kanten benachbart.

Somit ist eine $\Delta(G)$-Kantenfärbung von G, bei der x und y nicht mit einer

β-Kanten inzidieren, gefunden. Nun wird xy mit β gefärbt. Also ist eine $\Delta(G)$-Kantenfärbung für G gefunden.

Es gilt $\chi(g) \leq \Delta(G)$ und somit $\chi(g) = \Delta(G)$, da $\chi(g) \geq \Delta(G)$ offensichtlich gelten muss. □

4 Literatur

Graphentheorie, dritte Auflage, Reinhard Diestel, Springer-Verlag, 2006