Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2016

Tom-Lukas Kriel
Markus Schweighofer

Übungsblatt 3 zur Kommutativen Algebra

Aufgabe 1. (6P) (Saturierung von Lokalisierungen) Sei R ein kommutativer Ring. Wir nennen eine multiplikative Menge $S \subseteq R$ *saturiert*, wenn für alle $a, b \in R$ aus $ab \in S$ schon $a, b \in S$ folgt.

(a) Zeige, dass eine Teilmenge S von R genau dann eine saturierte multiplikative Menge ist, wenn ihr Komplement $R \setminus S$ eine Vereinigung von Primidealen ist.

Von nun an sei $S \subseteq R$ multiplikativ.

(b) Zeige, dass es eine kleinste saturierte multiplikative Obermenge $\widetilde{S} \subseteq R$ von S gibt. Wir bezeichnen diese als die *Saturierung* von S.

(c) Zeige $R \setminus \widetilde{S} = \bigcup\{\mathfrak{p} \in \operatorname{spec} R \mid \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\}$.

(d) Sei nun I ein Ideal von R. Zeige, dass $S := 1 + I := \{1 + i \mid i \in I\} \subseteq R$ multiplikativ ist und zeige

$$\widetilde{S} = \bigcup\{\mathfrak{m} \in (\operatorname{spec} R)^{\max} \mid I \subseteq \mathfrak{m}\}.$$

(e) Sei nun $T \supseteq S$ ebenfalls multiplikativ. Betrachte den kanonischen Ringhomomorphismus $\psi\colon S^{-1}A \to T^{-1}A$, $\frac{x}{s} \mapsto \frac{x}{s}$. Zeige die Äquivalenz folgender Aussagen:

 (i) ψ ist ein Isomorphismus.

 (ii) Für jedes $t \in T$ ist $\frac{t}{1} \in (S^{-1}R)^{\times}$.

 (iii) $T \subseteq \widetilde{S}$

Aufgabe 2. (6P) (Ein Lokal-Global-Prinzip für Noetherzität) Sei R ein kommutativer Ring. Für jedes $x \in R \setminus \{0\}$ besitze R nur endlich viele maximalen Ideale, die x enthalten. Außerdem sei für jedes $\mathfrak{m} \in \operatorname{spec}(R)^{\max}$ der Ring $R_{\mathfrak{m}}$ noethersch. Zeige, dass dann auch R noethersch ist.

Hinweis: Ist $I \neq (0)$ ein Ideal in R, so wähle man $x_0 \in I \setminus \{0\}$ und vergleiche $(x_0)_{\mathfrak{m}}$ mit $I_{\mathfrak{m}}$ für alle $\mathfrak{m} \in (\operatorname{spec} R)^{\max}$.

Aufgabe 3. (6P) (Beispiele von Lokal-Global-Prinzipien) Überprüfe die folgenden Lokal-Global-Prinzipen auf Hieb- und Stichfestigkeit:

(a) Ein Element $p \in R$ ist genau dann prim in R wenn für jedes $\mathfrak{m} \in (\operatorname{spec} R)^{\max}$ das Element $\frac{p}{1}$ im Ring $R_{\mathfrak{m}}$ prim oder eine Einheit ist und es gleichzeitig mindestens ein $\mathfrak{m} \in (\operatorname{spec} R)^{\max}$ gibt, für das $\frac{p}{1}$ im Ring $R_{\mathfrak{m}}$ prim ist.

(b) Zwei Ideale $I, J \subseteq R$ sind genau dann koprim wenn für jedes $\mathfrak{m} \in \operatorname{spec}(R)^{\max}$ schon $I_{\mathfrak{m}}$ und $J_{\mathfrak{m}}$ koprim sind.

(c) Sei R ein Dedekindring mit einem Ideal $I \subsetneq R$. Dann ist I genau dann ein Schnitt von endlich vielen Primidealen wenn auch $I_{\mathfrak{m}} \subseteq R_{\mathfrak{m}}$ für jedes $\mathfrak{m} \in \operatorname{spec}(R)^{\max}$ ein Schnitt von endlich vielen Primidealen ist (wobei der leere Schnitt jeweils der ganze Ring sei).

(d) Ein $\mathbb{Z}$-Modul M heißt divisibel, falls es für jedes $x \in M$ und $n \in \mathbb{N}$ ein $y \in M$ mit $x = ny$ gibt. Ein $\mathbb{Z}$-Modul M ist genau dann in einen divisiblen $\mathbb{Z}$-Modul N einbettbar wenn für jedes $\mathfrak{m} \in (\operatorname{spec} \mathbb{Z})^{\max}$ der kanonische Homomorphimus $M \to M_{\mathfrak{m}}$ eine Einbettung ist.

Abgabe bis Freitag, den 06. Mai 2016, 10:00 Uhr in den Briefkasten Nr. 17 neben F411.