
Übungsblatt 5 zur Kommutativen Algebra

Aufgabe 1 (4P) (Artinsche Ringe sind Noethersch I)

Ein Ring heiße artinsch, wenn er als Modul über sich selbst artinsch ist. Sei R ein kommutativer Ring, in dem das Nullideal ein Produkt von endlich vielen maximalen Idealen ist. Zeige, dass dann folgende Bedingungen quivalent sind:

- (a) R ist noethersch.
- (b) R ist artinsch.
- (c) R hat endliche Länge.

Hinweis: Seien m_1, \dots, m_r maximale Ideale von R mit $(0) = m_1 \cdots m_r$. Betrachte die Kette $R \supseteq m_1 \supseteq m_1 m_2 \supseteq \dots \supseteq m_1 \cdots m_r = (0)$ und die zugehörigen Faktoren.

Aufgabe 2 (6P) (Artinsche Ringe sind Noethersch II)

Sei R ein kommutativer artinscher Ring. Zeige:

- (a) Jedes Primideal von R ist maximal.
- (b) Es gibt nur endlich viele maximale Ideale in R .
- (c) In R ist das Nilradikal nilpotent, das heißt es gibt $n \in \mathbb{N}$ mit $\text{Nil}(R)^n = (0)$.

Hinweis: Nimm an, die Aussage stimmt nicht. Da R artinsch ist, können wir $m \in \mathbb{N}$ wählen mit $(\text{Nil } R)^{m+k} = (\text{Nil } R)^m$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Wähle $H \in \{I \subseteq R \text{ Ideal} \mid I (\text{Nil } R)^m \neq 0\}^{\text{min}}$. Finde danach ein Element $x \in H$ mit $(x) = (x) \text{Nil}(R)^m$ und führe dies zum Widerspruch.

Aufgabe 3 (2P) (Artinsche Ringe sind Noethersch III)

Zeige, dass ein kommutativer Ring genau dann artinsch ist, wenn er noethersch ist und Dimension ≤ 0 hat.

Aufgabe 4 (4P) (Zerlegung von artinschen Ringen)

Zeige, dass jeder kommutative artinsche Ring isomorph ist zu einem endlichen direkten Produkt von lokalen artinschen Ringen.

Abgabe bis Freitag, den 20. Mai 2016, 10:00 Uhr in den Briefkasten Nr. 17 neben F411.