Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2016

Tom-Lukas Kriel
Markus Schweighofer

Übungsblatt 8 zur Kommutativen Algebra

Aufgabe 1. (4P) (Primärzerlegung berechnen) Zeige, dass das Ideal (X^2, XY) im Ring $\mathbb{R}[X,Y]$ mehrere unverkürzbare Primärzerlegungen hat.

Aufgabe 2 (4P) (Eindeutigkeit der Zerlegung eines kommutativen artinschen Rings) Zeige, dass die Zerlegung von kommutativen artinschen Ringen in lokale artinsche Ringe von Aufgabe 4 auf Blatt 5 beziehungsweise aus 3.2.11 (vergleiche auch Aufgabe 3 auf Blatt 5 und 2.3.2) bis auf Isomorphie und Reihenfolge der Faktoren eindeutig ist: Sind $\prod_{i=1}^m A_i \cong \prod_{j=1}^n B_j$ zueinander isomorphe Produkte von kommutativen lokalen artinschen Ringen A_i und B_j, so gilt $m = n$ und es gibt $\sigma \in S_n$ mit $A_i \cong B_{\sigma(j)}$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$.

Hinweis: Verwende die Eindeutigkeit der Primärzerlegung von (0) in A.

Aufgabe 3 (4P) (Annihilatoren und Schnitt von primären Idealen)
Sei R ein kommutativer Ring, $I \subseteq R$ ein Ideal und

$$I = P_1 \cap \dots \cap P_m \cap Q_1 \cap \dots \cap Q_n$$

eine unverkürzbare Primärzerlegung von I mit zugehörigen Primidealen $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_m, \mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_n$. Es gelte $\{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_m\} \subseteq \{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_m, \mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_n\}^{\min}$.

(a) Zeige, dass ein $f \in R$ existiert mit $f \notin \mathfrak{p}_i$ für alle $i \in \{1, \dots, m\}$ und $f \in \mathfrak{q}_j$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$.

(b) Betrachte die multiplikative Menge $S := \{1, f, f^2, ...\} \subseteq R$. Zeige

$$P_1 \cap \dots \cap P_m = \iota^{-1}(S^{-1}I),$$

wobei $\iota \colon R \to S^{-1}R$ der kanonische Ringhomomorphismus sei.

(c) Sei R noethersch und f wie in (a). Zeige, dass dann $P_1 \cap \dots \cap P_m$ der Annihilator einer Restklasse einer Potenz von f modulo I ist.

Aufgabe 4 (4P) (symbolische Potenz) Sei R ein noetherscher Ring und $\mathfrak{p}$ ein Primideal in R. Dann definiere für $n \in \mathbb{N}$ die symbolische Potenz $\mathfrak{p}^{(n)} = \iota^{-1}((\mathfrak{p}^n)_\mathfrak{p})$, wobei $\iota : R \to R_\mathfrak{p}$ der kanonische Ringhomomorphismus sei. Zeige:

(a) $(\mathfrak{p}^n)_\mathfrak{p}$ ist $\mathfrak{p}_\mathfrak{p}$-primär.

(b) $\mathfrak{p}^{(n)}$ ist $\mathfrak{p}$-primär.

(c) $\mathfrak{p}^{(n)}$ ist die $\mathfrak{p}$-primäre Komponente in jeder Primärzerlegung von $\mathfrak{p}^n$.

(d) $\mathfrak{p}^{(m+n)}$ ist die $\mathfrak{p}$-primäre Komponente in jeder Primärzerlegung von $\mathfrak{p}^{(m)}\mathfrak{p}^{(n)}$.

(e) Es gilt genau dann $\mathfrak{p}^{(n)} = \mathfrak{p}^n$, wenn $\mathfrak{p}^n$ primär ist.

Hinweis: Für (b) kann man sich überlegen, dass Urbilder von primären Idealen unter Ringhomomorphismen wieder primär sind.

Abgabe bis Freitag, den 3. Juni 2016, 10:00 Uhr in den Briefkasten Nr. 17 neben F411.