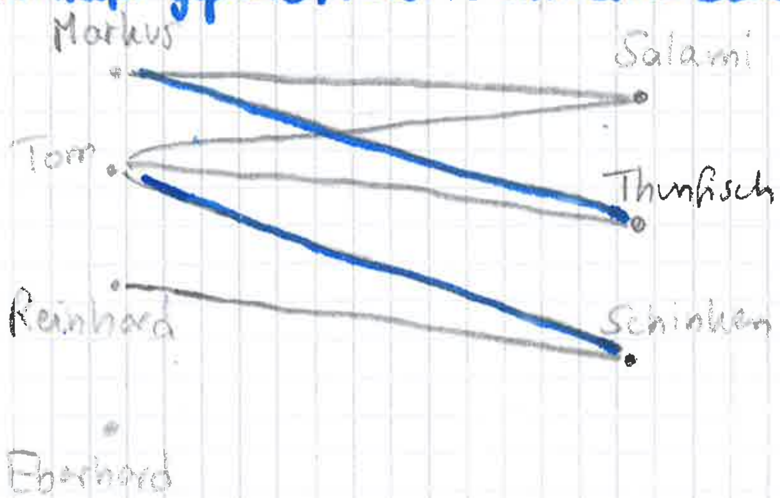
Der Heiratssatz

__Situation:__ Wir laden Freunde ein und kaufen eine Auswahl an Fertigpizzen. Jeder Freund hat gewisse Abneigungen gegen manche Arten von Pizzen. Können wir eine optimale Aufteilung der Pizzen finden, die maximal viele Freunde satt macht (ohne Pizzateilung)

__Formalisieren:__ Wir fassen Freunde und Pizzen als Ecken eines Graphen auf. Mag ein Freund eine Pizza, verbinden wir diese beiden Punkte mit einer Kante. Wir erhalten einen bipartiten Graph. Gesucht ist eine maximale Paarung.

__Definition:__ Sei $G=(V,E)$ ein bipartiter Graph. Eine Menge $M \subseteq E$ von unabhängigen Kanten heißt Paarung von M (d.h. keine Ecke inzidiert zwei Kanten von M). Eine maximale Paarung ist eine Paarung maximaler Mächtigkeit. $x \in V$ heißt gepaart, falls x mit einer Ecke aus M inzidiert.



$M = \{\{\text{Markus}, \text{Thunfisch}\}, \{\text{Tom}, \text{Schinken}\}\}$ ist eine Paarung.

Konvention: Von nun an sei $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph mit $G = A \dot\cup B$ so, dass jedes $e \in E$ eine Ecke aus A mit einer Ecke aus B verbindet. Elemente aus A bezeichnen wir mit a (und aus B mit b)

Definition: Sei $M \subseteq E$ eine Paarung. Ein Weg (für M) $P = x_0 \dots x_k$ in G heißt alternierender Weg, falls

(i) $x_0 \in A$ inzidiert keine Kante in M

(ii) Für $i \in \{0, \dots, k-1\}$ gerade ist $\{x_i, x_{i+1}\} \in E \setminus M$

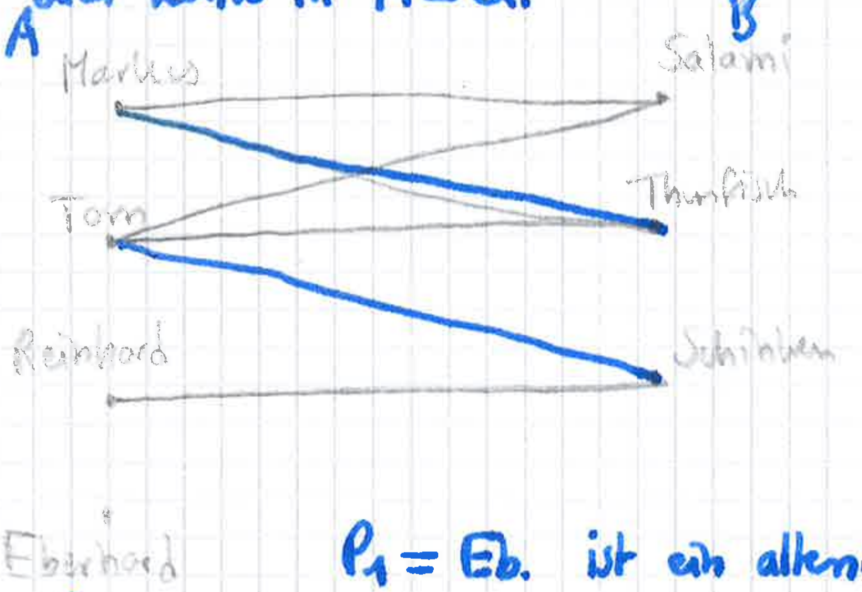
(iii) Für $i \in \{0, \dots, k-1\}$ ungerade ist $\{x_i, x_{i+1}\} \in M$

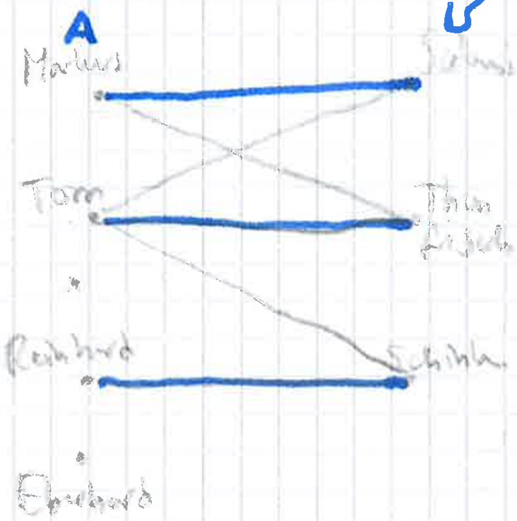
Erfüllt P auch die folgende Bedingung, heißt er Verbesserungsweg.

(iv) $x_k \in B$ inzidiert keine Kante in M.

Ist P ein Verbesserungsweg und Q die Menge seiner Kanten, so ist $M \triangle Q$ eine Paarung und $|M \triangle Q| = |M| + 1$.

Beweis: Sei $y \notin P$. So inzidiert y mit denselben Kanten in $M \triangle Q$ wie in M. Ist $y \in P$, so inzidiert y genau mit einer Kante in $M \triangle Q$.





$P_1 = $ Eb. ist ein alternierender Weg

$P_2 = $ Re. Sc. To. Th. Ma. Sa. ist ein Verbesserungsweg

<u>Definition:</u> $U \subseteq V$ heißt Eckenüberdeckung von E, wenn jede Kante aus E mit einer Ecke aus U inzidiert.

<u>Satz von König:</u> Die größte Mächtigkeit einer Paarung ~~ist~~ von G ist die kleinste Mächtigkeit einer ~~Paarung~~ Eckenüberdeckung von E.
<u>Beweis:</u> Sei M Paarung max. Mächtigkeit ~~und U eine~~.
Ist U Eckenüberdeckung, so muss U ~~ein~~ zu jeder Kante e in M eine Ecke inzident zu ~~der~~ e enthalten, also $|M| \leq |U|$.
~~Sei~~ Zu jedem $e \in M$ wählen wir eine inzidente Ecke aus, ihre ~~Element~~ Ecke in B, falls dort ein alternierender Weg endet und sonst ihre Ecke in A. Sei U die Menge dieser Ecken.
<u>Zwischenbehauptung:</u> Jede Ecke $b \in B$, in welcher ein alternierender Weg P endet, liegt in U.
Fall 1: b inzidiert zu einer Kante in M. Klar
Fall 2: b inzidiert zu keiner Kante in M. Dann ist P ein Verbesserungsweg (↯ zu M maximal) ◇
Sei nun $ab \in E$. Zeige $U \cap \{a,b\} \neq \emptyset$. ~~Sei also~~ Sei also $a \notin U$.
Inzidiert a zu keiner Kante in M, so ist $P = ab$ ein alternierender Weg, also $b \in U$ nach Zwischenbehauptung.
Ist a gepaart, so gibt es $b' \in B$ mit $ab' \in M$. Da $a \notin U$, endet ein alternierender Weg P in b. Nun ist Pb oder $Pb'ab$ ein in b endender alternierender Weg. Also $b \in U$ nach Zwischenbehauptung.

<u>Heiratssatz:</u> G hat eine Paarung M mit $|M| = |A|$, genau dann wenn für alle $S \subseteq A$ schon $|N(S)| \geq |S|$ gilt.

<u>Beweis:</u> „$\Leftarrow$" Sei $U = U_A \cup U_B$ eine minimale Kantenüberdeckung mit $U_A \subseteq A$, $U_B \subseteq B$. ~~Wir hätten gerne $U_B = \emptyset$.~~
Setze $W = A \setminus U_A$. Es gilt $N(W) \subseteq U_B$, da U Kantenüberdeckung.
Es ist $|U_B| \geq |N(W)| \geq |W|$. Es folgt
$|A| = |U_A| + |W| \leq |U_A| + |U_B| = |U|$. ~~Offenbar ist A auch eine~~ A ist also Kantenüberdeckung und wegen Obigem minimal.
Nach dem Satz von König existiert eine Paarung M mit $|M| = |A|$
„$\Rightarrow$" Ist M Paarung, so $|S| = |\{b \in B \mid \exists a \in S: ab \in M\}|$
$\leq |N(S)|$