Proseminar Graphentheorie
Zufallsgraphen

Marcel Kaiser

12. August 2018

Inhaltsverzeichnis

1 Probabilistische Methode, Zufallsgraphen

Die *probabilistische Methode* besteht darin, sich auf einer gewissen Grundmenge einen Wahrscheinlichkeitsraum zu erzeugen und dann gewisse Fragen über Eigenschaften dieser Menge zu untersuchen. Diese Methode ist bei dem Beweis des Satzes von Erdös entstanden, wobei sie auch verwendet wurde. Man hat sich hier als Grundmenge die Menge alle Graphen auf einer festen Knotenmenge V, $|V| = n$ genommen und auf ihr einen Wahrscheinlichkeitsraum erzeugt. Dann hat man mit Hife der Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Graphen, den sogenannten *Zufallsgraphen* Eigenschaften, wie z.B. die chromatische Zahl, Taillenweite, Kantenmenge, Umfang u.s.w. untersuchen können um somit schließlich den Satz von Erdös zu beweisen.

2 Definitionen

In diesem Abschnitt werden einige grundlegende Begriffe definiert, die man im weiteren Verlauf für den den Beweis von Erdös benötigt (sowohl direkt als auch indirekt).

2.1 Wahrscheinlichkeitsraum, Zufallsgraph

Seien $n \in \mathbb{N}, |V| = n$ und $p \in (0,1), e \in [V]^2$

(a) Für jedes e sei $(\Omega_e, \mathcal{P}(\Omega_e), P_e)$ der Wahrscheinlichkeitsraum mit $\Omega_e := \{1_e, 0_e\}$ und $P(1_e) = p, P(0_e) = q := 1 - p$.

(b) Wir bezeichnen mit $\mathcal{G}(n,p)$ den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P) = (\prod_{e \in [V]^2} \Omega_e\,, \mathcal{P}(\prod_{e \in [V]^2} \Omega_e)\,, P)$.

(c) Ein festes $\omega \in \Omega$ identifizieren wir mit dem Graphen G auf V mit der Kantenmenge

$$E(G) = \{e \,|\, \omega(e) = 1_e\}$$

und nennen G einen *Zufallsgraphen* auf V mit der Kantenwahrscheinlichkeit p.

(d) Als Ereignis bezeichnet man ein Element oder eine Teilmenge der zugrundeliegenden Menge des Wahrscheinlichkeitsraumes.

(e) Die Ereignisse $A_e := \{\omega \in \Omega \,|\, \omega(e) = 1_e\}$ sind unabhängig, d.h $\forall \{e_1, \ldots, e_k\} \subset [V]^2 : P(A_{e_1} \cap \ldots \cap A_{e_k}) = P(A_{e_1}) \cdot \ldots \cdot P(A_{e_k})$ $(k \in \mathbb{N})$

2.2 Zufallsgröße

Eine Abbildung

$$X : \mathcal{G}(n,p) \to [0, \infty)$$

nennt man auch nicht negative Zufallsgröße auf $\mathcal{G}(n,p)$.

2.3 Erwartungswert

Sei X eine nicht negative Zufallsgröße auf $\mathcal{G}(n,p)$. Der Erwartungswert oder Mittelwert der Zufallsgröße X ist die Zahl

$$E(X) := \sum_{G \in \mathcal{G}(n,p)} P(\{G\}) \cdot X(G).$$

3 Lemmata für den Beweis von Erdös

In diesem Abschnitt werden einige nützliche Lemmata bewiesen, mit denen man letztendlich den Satz von Erdös beweisen kann.

3.1 Lemma (1): Wahrscheinlichkeit unabhängiger Eckenmenge

Für jedes $n \geq k \geq 2$ gilt für die Wahrscheinlichkeit, dass $G \in \mathcal{G}(n,p)$ eine unabhängige Eckenmenge der Mächtigkeit k enthält

$$P[\,\alpha(G) \geq k\,] \;\leq\; \binom{n}{k} q^{\binom{k}{2}}$$

Beweis:
Sei $k \in \mathbb{N}$ und $U \in [V]^k$. Es gilt U unabhängig in $G \Leftrightarrow \forall\, u, v \in U : u \notin N(v)$. Damit folgt $P[\,U$ unabhängig in $G\,] = P[\,\overline{K^k} = G[U]\,] = q^{\binom{k}{2}}$. Da es nur $\binom{n}{k}$ solcher Mengen U in $[V]^k$ gibt, folgt somit die Behauptung.

□

3.2 Lemma (2): Mittlere Anzahl von Kreisen

Die mittlere Anzahl von Kreisen der Länge k in einem Zufallsgraphen $G \in \mathcal{G}(n,p)$ beträgt $\frac{(n)_k}{2k} p^k$.

Beweis:
Sei $X : \mathcal{G}(n,p) \to \mathbb{N}$ die Zufallsgröße, die jedem Zufallsgraphen $G \in \mathcal{G}(n,p)$ die Anzahl seiner zu C^k isomorphen Teilgraphen zuordnet. Sei nun $\mathcal{C}_k$ die Menge aller Kreise der Länge k mit Ecken in V.
Da man $(n)_k := n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$ Möglichkeiten hat eine Folge verschiedener Kanten aus V zu wählen und davon jeweils $2k$ den selben Kreis beschreiben, folgt sofort

$$|\mathcal{C}_k| = \frac{(n)_k}{2k}$$

Sei weiter für festes $C \in \mathcal{C}_k$ die charakteristische Zufallsgröße $X_C : \mathcal{G}(n,p) \to \{0,1\}$ definiert durch

$$X_C : G \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } C \subseteq G \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Es gilt

$$E(X_C) \;=\; \sum_{G \,\in\, \mathcal{G}(n,p)} P(\{G\}) \cdot X_C(G) \;=\; \sum_{\substack{G \,\in\, \mathcal{G}(n,p) \\ C \,\subseteq\, G}} P(\{G\}) \;=\; P[\,C \subseteq G\,] \;=\; p^k$$

Weiter kann man X durch die einzelnen X_C darstellen, denn

$$X(G) = \sum_{C \,\in\, \mathcal{C}_k} X_C(G)$$

Aus der Linearität des Erwartungswertes folgt nun

$$E(X) \;=\; E(\sum_{C\,\in\,\mathcal{C}_k} X_C) \;=\; \sum_{C\,\in\,\mathcal{C}_k} E(X_C) \;=\; \sum_{C\,\in\,\mathcal{C}_k} p^k \;=\; \frac{(n)_k}{2k} p^k$$

$\square$

3.3 Lemma (3): Markov-Ungleichung

Es sei X eine nicht negative Zufallsgöße auf $\mathcal{G}(n,p)$ und $a \in \mathbb{R}^+$. Dann gilt

$$P[\,X \geq a\,] \leq \frac{E(X)}{a}$$

Beweis:
Nach Definition von $E(X)$ gilt

$$E(X) \;=\; \sum_{G\,\in\,\mathcal{G}(n,p)} P(\{G\}) \cdot X(G) \;\geq\; a \cdot \sum_{\substack{G\,\in\,\mathcal{G}(n,p)\\ X(G)\,\geq\,a}} P(\{G\}) \;=\; a \cdot P[\,X \geq a\,]$$

$\square$

3.4 Lemma (4): Grenzwert Unabhängigkeitszahl

Sei $G \in \mathcal{G}(n,p)$. Ist $k > 0$ und $p = p(n) \geq \frac{16k^2}{n}$ für alle hinreichend großen n, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} P[\,\alpha(G) \geq \frac{n}{2k}\,] = 0$$

Beweis:
Sei $G \in \mathcal{G}(n,p)$. Für alle ganzzahligen $n \geq r \geq 2$ gilt nach Lemma (1):

$$P[\,\alpha(G) \geq r\,] \;\leq\; \binom{n}{r} q^{\binom{r}{2}} \;\leq\; 2^n q^{\binom{r}{2}} \;\leq\; 2^n e^{-p\binom{r}{2}}$$

Setzt man nun $p \geq \frac{16k^2}{n}$ und $r \geq \frac{n}{2k} \geq 2$ so folgt:

$$P[\,\alpha(G) \geq r\,] \;\leq\; 2^n e^{\frac{-pr^2}{4}} \;\leq\; 2^n e^{\frac{-pn^2}{16k^2}} \;\leq\; 2^n e^{-n} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

$\square$

4 Der Satz von Erdös

4.1 Satz von Erdös

Zu jedem $k \in \mathbb{N}$ gibt es einen Graphen H mit Taillenweite $g(H) > k$ und chromatischer Zahl $\chi(H) > k$.

4.2 Grundidee des Beweises

Man will also einen Graphen H finden, bei dem sowohl $g(H) > k$, also es keiner Kreise der Länge kleiner als k gibt und bei dem $\chi(H) > k$, also es zwangsweise keine unabhängige Eckenmenge der Mächtigkeit größer als $\frac{|H|}{k}$ gibt (daraus würde nämlich folgen, dass die nötigen Farbklassen klein wären (kleiner als die Unabhängigkeitszahl) und man entsprechend viele von ihnen bräuchte um den Graphen zu färben).
Die Frage ist nun welche Wahrscheinlichkiet man passend wählen kann um so einen Graphen H zu finden. Es müsste einerseits p klein sein, damit man wenige Kreise der Länge kleiner k hat und groß, damit man nur wenige unabhängige Eckenmengen der Mächtigkeit kleiner $\frac{|H|}{k}$ erhält. Das Problem ist, dass sich die Bereiche für die Wahrscheinlichkeiten nicht überschneiden.
Man wählt nun einfach p so, dass man wenige Kreise der Länge kleiner als k zulässt und entfernt dann schließlich aus jedem dieser Kreise eine Ecke. Da die Unabhängigkeitszahl dabei nicht wächst, man aber erreichen kann dass es keine Kreise der Länge kleiner als k gibt, kann man somit einen gewünschten Graphen finden.

4.3 Beweis des Satzes von Erdös

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $0 < \varepsilon < \frac{1}{k}$ fest gewählt und $p := n^{\varepsilon - 1}$. Sei X die Zufallsgröße, die jedem Graphen $G \in \mathcal{G}(n, p)$ die Anzahl seiner Kreise mit einer Länge als kleiner k zuordnet.
Es gilt nach Lemma (2):

$$E(X) \; = \; \sum_{i=3}^{k} \frac{(n)_i}{2i} p^i \; \leq \; \frac{1}{2} \sum_{i=3}^{k} n^i p^i \; \leq \; \frac{1}{2} \sum_{i=3}^{k} n^k p^k \; = \; \frac{1}{2}(k-2) n^k p^k$$

Mit Lemma (3) folgt nun weiter:

$$P[\, X \geq \frac{n}{2} \,] \; \leq \; \frac{E(X)}{\frac{n}{2}} \; = \; (k-2) n^{k-1} p^k \; = \; (k-2) n^{k-1} n^{(\varepsilon-1)k} \; = \; (k-2) n^{k\varepsilon - 1}$$

Da $k\varepsilon - 1 \; < \; k\frac{1}{k} - 1 = \; 0$ folgt hieraus:

$$\lim_{n \to \infty} P[\, X \geq \frac{n}{2} \,] \; \leq \; \lim_{n \to \infty} (k-2) n^{k\varepsilon - 1} = 0$$

Wähle nun n so groß, dass $P[\, X \geq \frac{n}{2} \,] < \frac{1}{2}$ und $P[\, \alpha(G) \geq \frac{n}{2k} \,] < \frac{1}{2}$, was aufgrund des Lemmas (4) und der Wahl von p möglich ist. Dann existiert ein Graph $G \in \mathcal{G}(n, p)$ mit $\alpha(G) < \frac{n}{2k}$ und weniger als $\frac{n}{2}$ Kreisen der Länge kleiner als k. Entferne nun aus jedem dieser Kreise der Länge kleiner als k des Graphen G eine Ecke. Der neu entstandene Graph

H besitzt noch mindestens $\frac{n}{2}$ Ecken, jedoch keine Kreise der Länge kleiner als k mehr, also $g(H) > k$. Weiter gilt nun nach Wahl von G:

$$\chi(H) \;\geq\; \frac{|H|}{\alpha(H)} \;\geq\; \frac{\frac{n}{2}}{\alpha(G)} \;>\; \frac{2nk}{2n} \;=\; k$$

Damit folgt, dass ein Graph H mit den Eigenschaften $g(H) > k$ und $\chi(H) > k$ existiert und somit die Behauptung.

$\square$

5 Nutzen des Satzes von Erdös

Man will die globale definierte Eigenschaft der chromatischen Zahl auf lokale Phänomene im Graphen reduzieren. Sei also G ein Graph mit $\chi(G) > k$, so stellt sich die Frage, ob G immer einen zu K^k isomorphen Teilgraphen, also einen vollständigen Teilgraphen mit $|K| = k$, enthält. Die chromatische Zahl $\chi(G)$, müsste dann also automatisch größer oder gleich $\chi(K^k) = k$ sein und somit wäre eine anspruchsvolle Untersuchung des gesamten Graphen überflüssig.

Der Satz von Erdös besagt nun aber, dass dies nicht für alle Graphen G, $|G| = V$ mit $\chi(G) > k$ der Fall ist. Betrachtet man eine Teilknotenmenge $U \subset V$, $|U| \leq k$ der ursprünglichen Knotenmenge von G, so gilt, dass für alle betrachteten Untergraphen auf der gewählten Menge U, also allen $G[U]$, gelten muss, dass diese keine Kreise enthalten, denn $g(G) > k$, doch ist $|U| \leq k$. Damit ist aber nun aber jeder der möglichen betrachteten Untergraphen $G[U]$ 2-färbbar, denn wenn in einem Graphen kein Kreis vorliegt, so ist er automatisch bipartit. Damit kann also im gesamten Graphen kein K^k enthalten sein und man muss den gesamten Graphen prüfen um festzustellen weshalb $\chi(G) > k$.

Literatur

[1] **Diestel:** Graphentheorie, 5.Auflage, Springer