Universität Konstanz Tom-Lukas Kriel
Department of Mathematics and Statistics María López Quijorna
Wintersemester 2017/2018 Cordian Riener

Reelle algebraische Geometrie I – Übungsblatt 6

Aufgabe 1 (2P) Seien $m \in \mathbb{N}$ und $p_1, ..., p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]$. Schreibe $p_i = \sum_{j=\alpha_i}^{\beta_i} q_{i,j}$ mit $q_{i,j} \in \mathbb{R}[\underline{X}]$ homogen vom Grad j sowie $q_{i,\alpha_i} \neq 0, q_{i,\beta_i} \neq 0$ für alle $i \in \{1, ..., m\}$. Sei $\alpha = 2\min\{\alpha_i \mid i \in \{1, ..., m\}\}$ und $\beta = 2\max\{\beta_i \mid i \in \{1, ..., m\}\}$. Dann können wir $p_1^2 + ... + p_m^2 = \sum_{j=\alpha}^{\beta} r_j$ mit $r_j \in \mathbb{R}[\underline{X}]$ homogen vom Grad j schreiben. Dabei sind r_α, r_β nichttriviale Quadratsummen.

Aufgabe 2 (4P) Im Folgenden wollen wir ein Beispiel geben, dass es nichtnegative Polynome gibt, welche keine Quadratsummen sind. Vervollständige hierzu den folgenden Beweis, indem du die teils knappen Erklärungen durch eigene Kommentare ergänzt:

Lemma: Sei $n = 5$ und $f = \sum_{i=1}^{5} \prod_{j \in \{1,...,5\} \setminus \{i\}} (X_i - X_j) \in \mathbb{R}[\underline{X}]$. f ist nichtnegativ, allerdings keine Summe von Quadraten von reellen Polynomen.

Beweis: Zuerst bemerken wir, dass f unter der Wirkung der S_5 invariant ist. Das bedeutet für jedes $x \in \mathbb{R}^5$ und jede Permutation $\varphi \in S_5$ schon $f(x) = f(\varphi(x))$ ist. Nun sei $x \in \mathbb{R}^5$. Um $f(x) \geq 0$ zu zeigen, können wir annehmen, dass $x_1 \geq ... \geq x_5$. Nun ist

$$
\begin{aligned}
f(x) = &\left[(x_1 - x_2)\Big[(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_1 - x_5) - (x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_2 - x_5)\Big]\right] \\
&\left[(x_4 - x_5)\Big[(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3) - (x_5 - x_1)(x_5 - x_2)(x_5 - x_3)\Big]\right] \\
&\left[(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4)(x_3 - x_5)\right] \geq 0.
\end{aligned}
$$

Angenommen es gibt $m \in \mathbb{N}$ und $p_1, ..., p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]$ mit $f = \sum_{k=1}^{m} p_k^2$. Dann sind alle p_k homogene Polynome vom Grad 2. Wir wollen zeigen, dass $p_1 = 0$. Sei $y, z \in \mathbb{R}$ und $\sigma \in S_5$. Schreibe $x = (y, y, z, z, z)$. Dann gilt $f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}, x_{\sigma(5)}) = 0$. Damit ist auch $p_1(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}, x_{\sigma(5)}) = 0$. p_1 erfüllt nun die folgende Eigenschaft (Q).

(Q): Schreibe $p_1 = \sum_{i,j \subseteq \{1,...,5\}} a_{i,j} X_i X_j$ mit $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ und $a_{i,j} = a_{j,i}$ für alle i, j. Für jedes $\sigma \in S_5$ ist:

$$
\begin{aligned}
a_{\sigma(1),\sigma(1)} + a_{\sigma(2),\sigma(2)} + 2a_{\sigma(1),\sigma(2)} &= 0 \\
a_{\sigma(3),\sigma(3)} + a_{\sigma(4),\sigma(4)} + a_{\sigma(5),\sigma(5)} + 2a_{\sigma(3),\sigma(4)} + 2a_{\sigma(4),\sigma(5)} + 2a_{\sigma(3),\sigma(5)} &= 0 \\
2a_{\sigma(1),\sigma(3)} + 2a_{\sigma(1),\sigma(4)} + 2a_{\sigma(1),\sigma(5)} + 2a_{\sigma(2),\sigma(3)} + 2a_{\sigma(2),\sigma(4)} + 2a_{\sigma(2),\sigma(5)} &= 0
\end{aligned}
$$

Nun man kann man ein Computerprogramm erstellen, welches verifiziert, dass ein p_1, welches (Q) erfüllt, schon 0 ist. (Das Computerprogramm muss nicht implementiert werden; es reicht die Existenz zu zeigen. Zur Vereinfachung darf angenommen, dass man reelle Zahlen exakt in den Computer eingeben kann und dieser auch exakt mit diesen rechnen kann).

Exercise 3 (6P). Welche der folgenden Aussagen gelten für alle reell abgeschlossenen Körper R? Gib einen Beweis oder ein Gegenbeispiel!

(a) Jedes Polynom $f \in R[\overline{X}]$ nimmt ein Minimum auf der Menge

$$\left\{ x \in R^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1 \right\} \text{ an.}$$

(b) In R gilt $\lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{m} = 1$. Hierbei ist für jedes $m \in \mathbb{N}$ $\sqrt[m]{m}$ als das eindeutige $x \in R_{>0}$ mit $x^m = m$ definitiert, welches nach der Regel von Descartes existiert. $\lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{m} = 1$ soll bedeuten, dass für jedes $\epsilon \in R_{>0}$ ein $M \in \mathbb{N}$ existiert so, dass $|1 - \sqrt[m]{m}| \leq \epsilon$

(c) Sei $f \in R[X]$ und $a, b \in R$. Dann gibt es $c, d \in R$ mit $\{f(x) \mid x \in [a, b]_R\} = [c, d]_R$.

Exercise 4 (8P). Sei R ein reell abgeschlossener Körper und $n \in \mathbb{N}_0$. Betrachte die "Distanzfunktion" $d \colon R^n \to R, x \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ und die Mengen $B(x, \epsilon) = \{y \in R^n \mid d(x, y) < \epsilon\}$ für $x \in R^n$ und $\epsilon \in R$. Welche der folgenden Mengen sind semialgebraisch für semialgebraisches $S \subseteq R^n$?

(a) Das *Innere* $\mathring{S} := \{x \in R^n \mid \exists \epsilon \in R_{>0} : \ B(x, \epsilon) \subseteq S\}$ von S.

(b) Die Menge

$$\Sigma(S) := \left\{ \sum_{i=1}^{k} x_i \mid k \in \mathbb{N}, \ x_1, \ldots, x_k \in S \right\}.$$

(c) Der R-Zariski-Abschluss $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall f \in \mathbb{R}[\overline{X}] : f(S) \subseteq \{0\} \implies f(x) = 0\}$ von S in R^n.

(d) Die Menge aller über R diagonalisierbaren Matrizen $A \in R^{n\times n} \cong R^{n^2}$.

Abgabe bis 1.Dezember, 2017, 11:45 im Briefkasten RAG I in der Nähe von Raum F411.