Universität Konstanz
Department of Mathematics and Statistics
Wintersemester 2017/2018

Tom-Lukas Kriel
María López Quijorna
Cordian Riener

Reelle algebraische Geometrie I – Übungsblatt 7

Aufgabe 1 (4P) Sei A der Ring der stetige Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Bitte beantworte die folgenden Fragen:

(i) Sind die stetigen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}_{\geq 0}$ Quadrate in A?

(ii) Gibt es eine Einbettung angeordneter Mengen von $\{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ in die Menge aller Präordnungen von A (durch Inklusion angeordnet)?

(iii) Gibt es eine Präordnung P von A mit $P \cap -P = \{0\}$ und $P \cup -P = A$?

Aufgabe 2 (4P) Zeige dass die folgenden Teilmengen des R^n nicht R-semialgebraisch sind:

(i) Trumps geplante Mauer an der endlos langen Grenze zwischen USA und Mexiko:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0, y \leq |\lfloor x \rfloor - x + \frac{1}{2}| + 9\}$$

wobei $R := \mathbb{R}$.

(ii) Die Menge aller *infinitesimalen* Elementen in einem beliebigen nicht archimedischen reell abgeschlossenen Körper R.

Aufgabe 3 (3P) Wie **könnte** man mit Hilfe der Resultate der Vorlesung einen Algorithmus erstellen, welcher feststellt, ob ein Polynom $f \in \mathbb{Q}[X, Y]$ nur endlich viele Nullstellen hat.

Aufgabe 4 (4P) Sei A ein kommutativer Ring und $P \subseteq A$. Zeige dass den folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) P ist eine Anordnung von A.

(ii) P ist eine Präordnung von A und für alle $a, b \in A$ es gilt:

$$ab \in P \implies a \in P \text{ oder } -b \in P$$

(iii) P ist eine Präordnung und für alle $a, b \in A$ es gilt:

$$ab \in P \implies a, b \in P \text{ oder } -a, -b \in P$$

Aufgabe 5 (1P) Sei A ein kommutativer Ring und P, Q Anordnungen auf A mit $P \subseteq Q$. Zeige, dass dann $Q = P \cup \operatorname{supp}(Q)$.

Abgabe bis 15. Dezember, 2017, 11:45 im Briefkasten RAG I in der Nähe von Raum F411.