Universität Konstanz
Department of Mathematics and Statistics
Wintersemester 2017/2018

Tom-Lukas Kriel
María López Quijorna
Cordian Riener

Reelle algebraische Geometrie I – Übungsblatt 8

Aufgabe 1 (4P). Sei K ein angeordneter Körper mit reellem Abschluss R. Sei $\mathscr{R}$ ein reell abgeschlossener Oberkörper von R. Zeige, dass jede R-semialgebraische Teilmenge des $\mathscr{R}^n$ auch K-semialgebraisch ist.

Aufgabe 2 (4P). Sei $A := C([0,1],\mathbb{R})$ der kommutative Ring der stetigen reellwertigen Funktionen auf $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$. Welche der folgenden Mengen sind Primkegel von A?

(a) $P := \{f \in A \mid \exists \epsilon > 0 : f((0,\epsilon)) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}\}$

(b) $Q := \{f \in A \mid \exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \neq (0)_{n\in\mathbb{N}} \text{ in } f^{-1}(\mathbb{R}_{\geq 0}) : \lim_{n\to\infty} a_n = 0\}$

(c) $R := \{f \in A \mid f(0) \geq 0\}$

Notation: Sei A ein kommutativer Ring und P eine Anordnung auf A. Für $a, b \in A$ schreiben wir $a \geq_P b$ falls $\overline{a}^{P\cap -P} \geq \overline{b}^{P\cap -P}$ im angeordneten Körper $(A/(P \cap -P), P)$.

Aufgabe 3 (5P). Sei A ein kommutativer Ring und $P, Q \in \operatorname{sper} A$. Zeige, dass das folgende äquivalent ist:

(a) Es gibt keine Anordnung H in A mit $P \subseteq H$ sowie $Q \subseteq H$.

(b) Es gibt $f \in A$ mit $f \geq_P 1$ sowie $f \leq_Q 0$.

Hinweis: Finde $p \in P$, $q \in Q$ mit $pq \leq_P -1$ und mache eine Fallunterscheidung, je nachdem ob q_P in $(A/(P \cap -P), P)$ infinitesimal ist oder nicht.

Aufgabe 4 (5P). Sei $A = \mathbb{R}[\underline{X}]$.

(a) Finde eine Kette $P_0 \subset ... \subset P_n$ von Anordnungen in $\mathbb{R}[\underline{X}]$.

(b) Kann es eine unendlich lange Kette von solchen Anordnungen geben?

Hinweis: Verwende die lexikographische Monomordnung, um eine Ordnung auf P auf $\mathbb{R}[\underline{X}]$ zu konstruieren mit $P \cap -P = \{0\}$ und $mX_1 < X_2, mX_2 <_P X_3, ..., mX_{n-1} <_P X_n, mX_n < 1$ für alle $m \in \mathbb{N}$ bzgl. P und setze $P = P_0$.

Abgabe bis 22. Dezember, 2017, 11:45 im Briefkasten RAG I in der Nähe von Raum F411.