Universität Konstanz
Department of Mathematics and Statistics
Winter Term 2017

Tom-Lukas Kriel
María López Quijorna
Cordian Riener

Reelle algebraische Geometrie I - Übungsblatt 10

Aufgabe 1(4P) Sei $(K, \leq)$ ein angeordneter Oberkörper von $\mathbb{R}$.

(a) Zeige, dass

$$\mathscr{O}_{(k,\leq)} := \{a \in k \mid \exists N \in \mathbb{N} : |a| \leq \frac{1}{N}\}$$

ein Unterring von K mit einzigem maximalen Ideal

$$\mathfrak{m}_{(k,\leq)} := \{a \in K \mid \forall N \in \mathbb{N} : |a| \leq \frac{1}{N}\}$$

und Einheitengruppen

$$\mathscr{O}^x_{(k,\leq)} = \mathscr{O}_{(k,\leq)} \setminus \mathfrak{m}_{(k,\leq)} = \{a \in K \mid \exists N \in \mathbb{N} : \frac{1}{N} \leq |a| \leq N\}$$

(b) Zeige, dass es zu jedem $a \in \mathscr{O}_{(k,\leq)}$ genau ein $b \in \mathbb{R}$ mit $a - b \in \mathfrak{m}_{(k,\leq)}$. Wir nennen dieses b den *Standardteil* von a und notieren es mit $\operatorname{st}(a)$.

(c) Zeige, dass $\mathscr{O}_{(k,\leq)} \to \mathbb{R}, a \mapsto \operatorname{st}(a)$ ein Ringhomomorphirmus mit Kern $\mathfrak{m}_{(k,\leq)}$ ist.

(d) Zeige, dass für alle $a, b \in \mathscr{O}_{(k,\leq)}$ mit $\operatorname{st}(a) > \operatorname{st}(b)$ gilt $a < b$.

Aufgabe 2(4P) Sei R eine reell abgeschlossener Körper. Zeige dass $p \in R[\underline{X}]$ ist nicht-negativ on R^n genau wenn $p \in P$ für alle $P \in \operatorname{sper} R[\underline{X}]$.

Aufgabe 3(4P) Seien A, B kommutative Ringen, $\phi : A \to B$ eine Ringhomomorphismus und $P \in \operatorname{sper} A$. Dann gibt es $Q \in \operatorname{sper} B$ mit $\phi^{-1}(Q) = P$ genau wenn für alle $r \in \mathbb{N}$ und alle $a, a_1, \ldots, a_r \in P$ mit $a \notin -P$ und all $b_1, \ldots, b_r \in B$ es gilt:

$$\phi(a) + \sum_{i=1}^{r} \phi(a_i) b^2 \neq 0$$

Aufgabe 4(4P) Sei A ein kommutative Ring. Zeige dass eine Anordnung P von A ist minimal genau wenn:

$$\forall a \in \operatorname{supp}(P) : \exists k \in \mathbb{N}_0 : \exists g \in \sum (P \setminus -P) A^2, f \in P \setminus -P : 0 = a^{2k} f + g$$

Please submit until Friday, January 19, 2018, 12:00 in the box named RAG II near to the room F411.