Universität Konstanz
Department of Mathematics and Statistics
Wintersemester 2017/2018

Tom-Lukas Kriel
María López Quijorna
Cordian Riener

Reelle algebraische Geometrie I – Übungsblatt 11

Aufgabe 1 (4P) Sind $p_1, ..., p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]$, schreibe $T(p_1, \ldots, p_m) \subseteq \mathbb{R}[\underline{X}]$ für die von $p_1, \ldots, p_m$ erzeugte Präordnung. Zeigen Sie:

(i) $X \notin T(X^3)$

(ii) Falls $p \geq 0$ auf $[0, \infty)$ ist, so ist $p \in T(X)$

(iii) $T(1-X, 1+X) = T(1-X^2)$

(iv) Falls $p \geq 0$ auf $[-1, 1]$ ist, so ist $p \in T(1-X, 1+X)$

Aufgabe 2 (6P). Seien $p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{R}[t]$ univariate Polynome und $M(p_1, \ldots, p_m) \subseteq \mathbb{R}[t]$ der erzeugte quadratische Modul und sei $S(p_1, \ldots, p_m) := \{t \in T \mid p_1(t) \geq 0, \ldots, p_m(t) \geq 0\}$ eine kompakte Menge. Zeige, dass dann $M(p_1, \ldots, p_m)$ archimedisch ist.

Hinweis: Zeige mit dem Satz von Schmüdgen, dass es reicht ein $p \in M(p_1, ..., p_m)$ zu finden mit kompaktem $\{x \in \mathbb{R} \mid p(x) \geq 0\}$.

Aufgabe 3 (4P). Seien $A_0, A_1, ..., A_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrische Matrizen und $p_1, ..., p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]$ Polynome von Grad maximal 1. Sei $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto$ der kleinste Eigenwert von $A_0 + A_1 x_1 + ... + A_n x_n$. Schreibe das folgende Problem explizit als SDP:

$$\text{minimiere } \varphi(x) \text{ über } x \in \mathbb{R}^n \text{ mit } p_1(x) \geq 0, ..., p_m(x) \geq 0$$

Aufgabe 4 (4P). Seien $A_0, A_1, ..., A_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrische Matrizen und $P = A_0 + A_1 X_1 + ... + A_n X_n \in \mathbb{R}[\underline{X}]^{n \times n}$ und $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid P(x) \succeq 0\}$. Setze $p = \det(P) \in \mathbb{R}[\underline{X}]$ und sei $A_0 \succ 0$. Zeige:

(i) Das Innere S° von S ist gegeben durch $\{x \in \mathbb{R}^n \mid P(x) \succ 0\}$.

(ii) S° ist die größte zusammenhangende Teilmenge von $p^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, welche 0 enthält.

Abgabe bis 26.Januar, 2018, 12:00 im Briefkasten RAG I in der Nähe von Raum F411.