Universität Konstanz
Department of Mathematics and Statistics
Wintersemester 2017/2018

Tom-Lukas Kriel
María López Quijorna
Cordian Riener

Reelle algebraische Geometrie I – Übungsblatt 12

Lade dir das Paket Yalmip (YALMIP: `https://yalmip.github.io/`) für Matlab herunter (ist in Phyma wahrscheinlich schon installiert), welches SDP lösen kann, und lese dir die Einführung zu Yalmip auf der entsprechenden Webseite durch.

Aufgabe 1 (6P) (Eigenwerte ausrechnen mit SDP) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix mit den Eigenwerten $\lambda_1 \geq ... \geq \lambda_n \in \mathbb{R}$ (je nach Vielfachheit mehrfach aufgeführt). Sei $k \in \{1, ..., n\}$. Sei $h \in \{1, ..., n\}$. $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt Projektion, wenn $P^2 = P^T = P$. Eine alternative Charakterisierung ist, dass P symmetrisch und nur die Eigenwerte 1 und 0 besitzt. In diesem Fall beschreibt P die orthogonale Projektion von $\mathbb{R}^n$ auf $\mathrm{im}(P) \subseteq \mathbb{R}^n$. Alternativ kann man auch $\overline{P} : \mathbb{R}^n \to \mathrm{im}(P) = \mathbb{R}^{\mathrm{rk}(P)}, x \mapsto Px$ betrachten. Es gilt dann $\overline{P}\,\overline{P}^T = I$, d.h. $\overline{P}^T$ ist eine Isometrie. Umgekehrt ist für jede Isometrie $Q : \mathbb{R}^h \to \mathbb{R}^n$ die Abbildung $QQ^T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die Projektion auf $\mathrm{im}(Q)$. Zeige:

(a) Die konvexe Hülle von $\{YY^T \mid Y \in \mathbb{R}^{n\times k},\ Y^TY = I\}$ ist gerade

$$\{X \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid X \text{ symmetrisch und } I \succeq X \succeq 0, \mathrm{tr}(X) = k\}$$

(b) $\lambda_1 + ... + \lambda_k = \max\{\mathrm{tr}(CYY^T) \mid Y \in \mathbb{R}^{n\times k},\ Y^TY = I\} = \max\{\mathrm{tr}(CX) \mid X \in \mathbb{R}^{n\times n},\ X \text{ symmetrisch und } I \succeq X \succeq 0, \mathrm{tr}(X) = k\}$ (Hinweis für $\geq$: Nehme D als diagonal an und rechne $\mathrm{tr}(CX)$ aus.)

(c) Wähle eine symmetrische Matrix A und versuche mit obigem Verfahren und Yalmip die Eigenwerte von A auszurechnen.

Aufgabe 2 (6P) (Gram-Matrix Methode)

(a) Sei $k \in \mathbb{N}$ und $h \in \sum \mathbb{R}[\underline{X}]_{2k+1}$. Sei v der Spaltenvektor, welcher genau aus den verschiedenen Monomen in $\mathbb{R}[\underline{X}]_k$ besteht (in einer beliebigen fest gewählten Reihenfolge). Sei d die Länge von v. Dann ist $h \in \sum \mathbb{R}[\underline{X}]^2$ genau dann wenn es eine positiv semidefinite Matrix $A \in S\mathbb{R}^{d\times d}$ gibt mit $h = v^TAv$ (das ist ein SDP!). In diesem Fall ist h eine Summe von $\mathrm{rank}(A)$ Quadraten.

(b) Sei $p = X^2Y^4 + X^4Y^2 - 3X^2Y^2 + 1$ das Motzkinpolynom. Zeige mit Yalmip, dass p keine Quadratsumme ist, aber $(1 + X^2)p$ und finde eine explizite Quadratsummenzerlegung.

Aufgabe 3 (4P) Schreibe ein Programm, dass du einem gegebenen $n \in \mathbb{N}$ die ϑ-Funktion des Kreises C_n der Länge n bestimmt. Verifiziere dadurch die Formel

$$\vartheta(C_{2n+1}) = \frac{(2n+1)cos(\pi/(2n+1))}{1+cos(\pi/(2n+1)}$$

für kleine n. (Bonus: Finde einen Beweis für diese Aussage)

Aufgabe 4 (4P) Seien $n > 1$, $h_1, \ldots, h_{n+1} \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ gegeben durch

$$h_i := X_i - \frac{1}{2}, \, i = 1, \ldots, n$$

$$h_{n+1} = 1 - \prod_{I=1}^{n} X_i.$$

Zeige, dass die entsprechende Menge

$$S := \{x \in \mathbb{R}^n \, : \, h_i(x) \geq 0\}$$

kompakt ist, dass aber der quadratische Modul, der von den h_i erzeugt wird, nicht archimedisch ist. (Hinweis: Es ist erlaubt sich die Aufgabe einfacher zu machen und n als gerade vorauszusetzen)

Abgabe bis 9.Februar, 2018, 12:00 im Briefkasten RAG I in der Nähe von Raum F411.