Universität Konstanz Tom-Lukas Kriel
Fachbereich Mathematik und Statistik Markus Schweighofer
Sommersemester 2015

Übungsblatt 1 zur Zahlentheorie

Aufgabe 1. (7P) (Basen von Moduln) Welche der folgenden Moduln besitzen eine Basis? Gib eine Basis an (du brauchst in diesem Falle ausnahmsweise keine Begründung angeben), zeige abstrakt die Existenz einer Basis oder beweise, dass keine Basis existiert.

(a) $\mathbb{Z}^{2\times 2} \times \mathbb{Z}[X] \times (2\mathbb{Z})$ als $\mathbb{Z}$-Modul.

(b) $2(\mathbb{Z}/(16))$ als $\mathbb{Z}/(16)$-Modul.

(c) $\mathbb{Q}$ als $\mathbb{Z}$-Modul.

(d) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}^3 \mid x_1 - 5x_2 + x_3 = 0,\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\}$ als $\mathbb{Z}$-Modul.

(e) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}^3 \mid 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0\}$ als $\mathbb{Z}$-Modul.

(f) $C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig}\}$ als $\mathbb{R}$-Modul bzgl. punktweiser Addition.

(g) $M = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A \text{ ist obere Dreiecksmatrix und die Diagonale besteht aus Nullen}\}$ als $\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A \text{ ist obere Dreiecksmatrix}\}$-Modul bzgl. der normalen Matrixrechenregeln und mit einem $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2. (5P) (Ein Modul, der eine einelementige und eine zweielementige Basis besitzt) Sei V eine abelsche Gruppe, die zu V^2 isomorph ist (z.B. $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$) und $\varphi : V \to V^2$ ein Gruppenisomorphismus. Wir wissen, dass $R := \operatorname{End}(V)$ mittels Hintereinanderausführung als Multiplikation einen Ring bildet. Auf kanonische Weise sind damit R und R^2 schon R-Moduln. Zeige:

(a) Die abelsche Gruppe $M = \operatorname{Hom}(V^2, V)$ wird mittels folgender Skalarmultiplikation zu einem R-Modul:
Für $\alpha \in R$ und $\lambda \in M$ sei

$$\alpha \cdot \lambda := \alpha \circ \lambda.$$

(b) Zeige mit Hilfe der folgenden zwei Schritte, dass R und R^2 als R-Moduln isomorph sind.

- $f : M \to R,\ \lambda \mapsto \lambda \circ \varphi$ ist ein R-Modulisomorphismus.
- $g : M \to R^2,\ \lambda \mapsto ([V \to V, v \mapsto \lambda(v, 0)]\ ,\ [V \to V, v \mapsto \lambda(0, v)])$ ist ein R-Modulisomorphismus.

(c) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ besitzt R eine n-elementige Basis.

Aufgabe 3. (4P) (Könnte man bei einem Modul auch Skalare von rechts multiplizieren?)

(a) Sei R ein Ring mit Multiplikation $\cdot_R$. Warum wird im Allgemeinen $M = R$ durch die Skalarmultiplikation $\cdot_S : R \times M \to M$ definiert durch $a \cdot_S b := b \cdot_R a$ für $a \in R, b \in M$ nicht zu einem R-Modul?

(b) Finde einen Ring R und eine Element $h \in R$ so, dass die Mengen hR und Rh verschieden viele Elemente enthalten.

Hinweis: Falls du in (b) nicht weiter kommst, verwende einen Ring bestehend aus oberen Dreiecksmatrizen über einem endlichen Körper.

Abgabe bis Mittwoch, den 22. April 2015 , um 11:42 Uhr in die Zettelkästen neben F411.