Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2015

Tom-Lukas Kriel
Markus Schweighofer

Übungsblatt 12 zur Zahlentheorie

Aufgabe 1. (6P) (Wieviele Einheiten hat $\mathbb{Z}/(n)$?)

Definiere $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto \#(\mathbb{Z}/(n))^\times$. Zeige:

(a) $$m, n \in \mathbb{N} : ((m,n) = (1) \implies \varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n))$$

(b) $$\forall p \in \mathbb{P} : \forall k \in \mathbb{N} : \varphi(p^k) = (p-1)p^{k-1}$$

(c) $$\forall n \in \mathbb{N} : \varphi(n) = n \prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \mid n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

Aufgabe 2. (3P) (Fermatsche Primzahlen)

Zahlen der Form $2^{2^n} + 1$ ($n \in \mathbb{N}_0$) nennt man *Fermatzahlen*. Fermatzahlen, die Primzahlen sind, nennt man *Fermatsche Primzahl*. Zeige, dass jede Primzahl der Form $2^n + 1$ ($n \in \mathbb{N}$) eine Fermatsche Primzahl ist.

Aufgabe 3. (7P) (Ein Beispiel für das Verzweigen von Idealen in quadratischen Zahlringen)

Sei $d \in \not\square_-$ und $d \not\equiv_{(4)} 1$.

(a) Zeige, dass für $\mathfrak{p} := (2, d + \sqrt{d}) \subseteq \mathscr{O}_d$ gilt $\mathfrak{p}^2 = (2)$.

(b) Zeige, dass $\mathfrak{p}$ ein Primideal ist.

(c) Überprüfe für welche d das Ideal $\mathfrak{p}$ ein Hauptideal ist.

Hinweis: Benutze die Norm des Zahlrings.

Abgabe bis Dienstag, den 7. Juli um 12:00 Uhr in die Zettelkästen neben F411.