Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2015

Tom-Lukas Kriel
Markus Schweighofer

Übungsblatt 3 zur Zahlentheorie

Aufgabe 1. (9P) (Zerlegung von Moduln in direkte Summen durch kurze exakte Sequenzen)

Sei R ein Ring. Ein (endliches oder unendliches) Diagramm von R-Modulhomomorphismen

$$\cdots\cdots\ M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1}\ \cdots\cdots$$

nennt man eine *Sequenz*. Man nennt diese Sequenz *exakt*, wenn $\ker(f_i) = \operatorname{im}(f_{i-1})$ für alle i gilt (für die M_i weder am Anfang noch am Ende des Diagramms steht). Sei eine weitere Sequenz derselben Gestalt

$$\cdots\cdots\ N_{i-1} \xrightarrow{g_{i-1}} N_i \xrightarrow{g_i} N_{i+1}\ \cdots\cdots$$

gegeben. Eine Familie von R-Modulisomorphismen $h_i\colon M_i \to N_i$ heißt ein *Isomorphismus* der beiden Sequenzen, wenn das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\cdots\cdots\ M_{i-1} \arrow[r, "f_{i-1}"] \arrow[d, "h_{i-1}"] & M_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "h_i"] & M_{i+1}\ \cdots\cdots \arrow[d, "h_{i+1}"] \\
\cdots\cdots\ N_{i-1} \arrow[r, "g_{i-1}"'] & N_i \arrow[r, "g_i"'] & N_{i+1}\ \cdots\cdots
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Eine *kurze Sequenz* ist eine Sequenz der Form

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0\,,$$

wobei 0 für den R-Nullmodul stehe. Zeige:

(a) Eine solche kurze Sequenz ist genau dann exakt, wenn f injektiv ist, g surjektiv ist und $\operatorname{im} f = \ker g$ gilt.

(b) Ist eine solche kurze Sequenz exakt, so ist $M/\operatorname{im} f \cong N$.

(c) Zeige, dass

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow L \times N \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

für alle R-Moduln L und N exakt ist, wobei ein unbeschrifteter Pfeil hier und im folgenden jeweils für den jeweiligen kanonischen Homomorphismus stehe.

(d) Es sei das Diagramm von R-Modulhomomorphismen

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[r] \arrow[d] & L \times N \arrow[r] \arrow[d, "h"] & N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"'] & M \arrow[r, "g"'] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

gegeben. Zeige, dass es eindeutig bestimmte Homomorphismen h_1 und h_2 gibt, für die

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[dr] \arrow[ddr, bend right, "h_1"'] & & N \arrow[dl] \arrow[ddl, bend left, "h_2"] \\
& L \times N \arrow[d, "h"] & \\
& M &
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Zeige, dass $(0, \mathrm{id}_L, h, \mathrm{id}_N, 0)$ genau dann ein Isomorphismus der beiden Zeilen des ersten Diagramms ist (das heißt h ist ein Isomorphismus, der das Diagramm zum kommutieren bringt), wenn die zweite Zeile des Diagramms exakt ist und sowohl $h_1 = f$ als auch $g \circ h_2 = \mathrm{id}_N$ gelten.

(e) Es sei das Diagramm von R-Modulhomomorphismen

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"] & N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r] & L \times N \arrow[r] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

gegeben. Zeige, dass es eindeutig bestimmte Homomorphismen h_1 und h_2 gibt, für die

$$\begin{tikzcd}
& M \arrow[d, "h"] \arrow[ddl, bend right, "h_1"'] \arrow[ddr, bend left, "h_2"] & \\
& L \times N \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
L & & N
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Zeige, dass $(0, \mathrm{id}_L, h, \mathrm{id}_N, 0)$ genau dann ein Isomorphismus der beiden Zeilen des ersten Diagramms ist, wenn die erste Zeile des Diagramms exakt ist und sowohl $h_1 \circ f = \mathrm{id}_L$ als auch $h_2 = g$ gelten.

(f) Es sei eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0\,,$$

gegeben. Zeige, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

(i) Es existiert ein R-Modulhomomorphismus $f' \colon M \longrightarrow L$ mit $f' \circ f = \mathrm{id}_L$.

(ii) Es existiert ein R-Modulhomomorphismus $g' \colon N \longrightarrow M$ mit $g \circ g' = \mathrm{id}_N$.

(iii) Die gegebene Sequenz ist isomorph zur Sequenz

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow L \times N \longrightarrow N \longrightarrow 0\,.$$

Unter diesen Bedingungen sagt man, dass die kurze exakte Sequenz *zerfällt*.

Aufgabe 2. (7P) (Anwendung von kurzen exakten Sequenzen)

(a) Sei A eine Menge. Betrachte den Ring $R := (\mathscr{P}(A), \Delta, \cap)$, wobei hier die Potenzmenge $\mathscr{P}(A)$ von A mit der symmetrischen Mengendifferenz ($D \,\Delta\, E := (D \backslash E) \cup (E \backslash D)$ für alle $D, E \in \mathscr{P}(A)$) als Addition und Schnitt als Multiplikation zu einem kommutativen Ring wird. Überprüfe, ob der R-Modul $\mathscr{P}(B)$ ein direkter Summand vom R-Modul $\mathscr{P}(A)$ ist, indem du eine konkrete kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathscr{P}(B) \xrightarrow{\mathrm{id}} \mathscr{P}(A) \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

mit einem Untermodul N von $\mathscr{P}(A)$ angibst oder zeigst, dass es kein direkter Summand ist.

(b) Sei R ein Ring mit $2 \in R^\times$ und $n \in \mathbb{N}$. Überprüfe, ob der R-Modul $SR^{n\times n}$ der symmetrischen $n \times n$-Matrizen über R ein direkter Summand vom R-Modul $R^{n\times n}$ ist, indem du eine konkrete kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow SR^{n\times n} \xrightarrow{\mathrm{id}} R^{n\times n} \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

mit einem Untermodul N von $R^{n\times n}$ angibst oder zeigst, dass es kein direkter Summand ist.

(c) Betrachte den Ring $A = \mathbb{R}[X]/(X^2)$. Betrachte die Kongrenzklasse $\overline{X} := \overline{X}^{(X^2)}$ von X bezüglich (X^2). Überprüfe, ob das davon in A erzeugte Ideal $B := (\overline{X})$ als A-Modul ein direkter Summand vom A-Modul A ist, indem du eine konkrete kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{\mathrm{id}} A \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

mit einem Untermodul N von A angibst oder zeigst, dass es kein direkter Summand ist.

Abgabe bis Dienstag, den 5. Mai um 12:00 Uhr in die Zettelkästen neben F411.