Universität Konstanz Tom-Lukas Kriel
Fachbereich Mathematik und Statistik Markus Schweighofer
Sommersemester 2015

Übungsblatt 5 zur Zahlentheorie

Aufgabe 1. (8P) (Smithsche Normalform)

Sei R ein kommutativer Ring.

(a) Zeige, dass durch

$$A \sim B :\iff \exists P \in \mathrm{GL}_m(R) : \exists Q \in \mathrm{GL}_n(R) : B = PAQ \qquad (A, B \in R^{m\times n})$$

eine Äquivalenzrelation auf $R^{m\times n}$ definiert wird.

(b) Betrachte die üblichen Zeilenoperationen auf Matrizen, die man zum Beispiel vom Gauß-Algorithmus aus der linearen Algebra kennt, und die dazu analogen Spaltenoperationen. Zeige: Ist $A \in R^{m\times n}$ und erhält man aus dem Schema $\begin{array}{|c|c|}\hline A & I_m \\ \hline I_n \\ \cline{1-1}\end{array}$ durch Zeilenoperationen angewandt auf $\begin{array}{|c|c|}\hline A & I_m \\ \hline\end{array}$ und Spaltenoperationen angewandt auf $\begin{array}{|c|}\hline A \\ \hline I_n \\ \hline\end{array}$ ein neues Schema $\begin{array}{|c|c|}\hline B & P \\ \hline Q \\ \cline{1-1}\end{array}$, so ist $P \in \mathrm{GL}_m(R)$ und $Q \in \mathrm{GL}_n(R)$ mit $B = PAQ$.

(c) Zeige: Geht $B \in R^{m\times n}$ aus $A \in R^{m\times n}$ durch Zeilen- und Spaltenoperationen hervor, so gilt $A \sim B$.

(d) Sei R ein Hauptidealring und $\mathbb{P}_R$ sowie N_R wie in der Vorlesung. Eine Matrix $S = (s_{ij})_{1\le i\le m, 1\le j\le n} \in R^{m\times n}$ heißt in *Smithscher Normalform*, wenn es ein $r \in \{0, 1, \ldots, \min\{m, n\}\}$ gibt mit $s_{11}, \ldots, s_{rr} \in N_R \setminus \{0\}$, $s_{11}|s_{22}|\ldots|s_{rr}$ und $s_{ij} = 0$ für alle $(i, j) \in (\{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}) \setminus \{(1, 1), \ldots, (r, r)\}$. Zeige, dass es zu jedem $A \in R^{m\times n}$ genau ein $S \in R^{m\times n}$ in Smithscher Normalform mit $A \sim S$ gibt.

(e) Seien $A, B \in R^{m\times n}$, $P \in \mathrm{GL}_m(R)$ und $Q \in \mathrm{GL}_n(R)$ mit $B = PAQ$. Zeige, dass die Abbildung

$$R^m / \operatorname{im} A \to R^m / \operatorname{im} B,\ \overline{x} \mapsto \overline{Px} \quad (x \in R^m)$$

wohldefiniert und ein Modulisomorphismus ist.

(f) Jede Matrix $A \in R^{m\times n}$ definiert einen Modulhomomorphismus $f_A \colon R^n \to R^m$, $x \mapsto Ax$. Man nennt $\operatorname{im} A := \operatorname{im} f_A$ das *Bild* von A. Sei R ein Hauptidealring. Zeige, dass dann für alle $A, B \in R^{m\times n}$ gilt

$$A \sim B \iff R^m / \operatorname{im} A \cong R^m / \operatorname{im} B.$$

(g) Sei R ein Hauptidealring und seien $A \in R^{m\times n}$, $P = \begin{pmatrix} & * & \\ \hline b_{11} & \cdots\cdots\cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & \cdots\cdots\cdots & b_{km} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_m(R)$, $S \in R^{m\times n}$ in Smithscher Normalform und $Q \in \mathrm{GL}_n(R)$ mit $S = PAQ$. Dabei seien $k, l \in \mathbb{N}_0$ mit $l + k = m$, $l \leq \min(m, n)$ und $s_{i,i} = 1$ für $i \in \{1, ..., l\}$. Zeige, dass

$$\begin{aligned} R^m / \operatorname{im} A &\to \prod_{i=l+1}^{\min(m,n)} R/s_{i,i}R \times \prod_{i=\min(m,n)+1}^{m} R/0R \\ \overline{x} &\mapsto (\overline{b_{11}x_1 + \cdots + b_{1m}x_m}, \quad \ldots \quad , \overline{b_{k1}x_1 + \cdots + b_{km}x_m}) \qquad (x \in R^m) \end{aligned}$$

ein wohldefinierter R-Modulisomorphismus ist.

Aufgabe 2. (4P) (Berechnung der Smithschen Normalform)
Berechne die Smithsche Normalform der Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & -3 & 1 \\ 4 & -4 & 0 & 16 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{3\times 4}, \; B := \begin{pmatrix} 3 & 3 & 7 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{3\times 3} \text{ und}$$

$$C := \begin{pmatrix} 1 - X^2 & 1 + X \\ 1 - X & 1 + X + X^2 + X^3 \\ 1 - X & 1 + X \end{pmatrix} \in \mathbb{R}[X]^{3\times 2}.$$

Aufgabe 3. (4P) (Anwendung der Smithschen Normalform)

(a) Betrachte die Matrix $A := \begin{pmatrix} 413 & 140 \\ -385 & -126 \\ 427 & 147 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{3\times 2}$. Berechne die Smithsche Normalform $S \in \mathbb{N}_0^{3\times 2}$ von A.

(b) Gebe explizit einen Isomorphismus abelscher Gruppen

$$M := \mathbb{Z}^3 \Big/ \left(\mathbb{Z} \begin{pmatrix} 413 \\ -385 \\ 427 \end{pmatrix} + \mathbb{Z} \begin{pmatrix} 140 \\ -126 \\ 147 \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{\cong} (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/133\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}$$

an.

(c) Zeige, dass M isomorph ist zu einem direkten Produkt zyklischer Gruppen von Primzahlordnung oder Ordnung 0 und gebe explizit einen Isomorphismus an.

Abgabe bis Dienstag, den 19. Mai um 12:00 Uhr in die Zettelkästen neben F411.