
Übungsblatt 7 zur Zahlentheorie

Aufgabe 1. (4P) (Einfachheit und algebraisch abgeschlossene Körper)

Sei K ein Körper. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

- (a) K ist algebraisch abgeschlossen.
- (b) Jeder einfache $K[X]$ -Modul ist als K -Vektorraum eindimensional.

Aufgabe 2. (6P) (Eine Anwendung von Cayley-Hamilton)

Seien R ein kommutativer Ring, M ein endlich erzeugter R -Modul und $f, g \in \text{End}(M)$ mit $fg = gf$. Zeige die Äquivalenz folgender Aussagen:

- (a) $\exists k \in \mathbb{N} : \text{im}(f^k) \subseteq \text{im}(g)$
- (b) $\exists n \in \mathbb{N} : \exists h \in \text{End}(M) : f^n = gh$

Aufgabe 3. (6P) („Nichtkommutative Körper“) Einen Ring R nennt man *Schiefkörper*, wenn $R^\times = R \setminus \{0\}$. Zeige die Äquivalenz folgender Aussagen:

- (a) Jeder R -Modul ist frei.
- (b) Jeder zyklische R -Modul ist frei.
- (c) R ist ein einfacher R -Modul.
- (d) In R gilt $0 \neq 1$ und für alle $a \in R \setminus \{0\}$ gibt es ein $b \in R$ mit $ab = 1$.
- (e) In R gilt $0 \neq 1$ und für alle $a \in R \setminus \{0\}$ gibt es ein $b \in R$ mit $ba = 1$.
- (f) R ist ein Schiefkörper.

Hinweis: Für (f) \implies (a) kann man 1.2.5 und 1.3.9 aus der Vorlesung benutzen.

Abgabe bis Dienstag, den 2. Juni um 12:00 Uhr in die Zettelkästen neben F411.