Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2015

Tom-Lukas Kriel
Markus Schweighofer

Übungsblatt 9 zur Zahlentheorie

Aufgabe 1. (6P) (Dedekindringe und Primfaktorzerlegung)

(a) Berechne $\mathbb{Z}[X] : (2, X)$.

(b) Zeige, dass $\mathbb{Z}[X]$ kein Dedekindring ist.

(c) Beweise oder widerlege: Jeder faktorielle Ring ist ein Dedekindring.

(d) Finde einen kommutativen Ring R, in dem nicht jedes Ideal $\neq (0)$ eine eindeutige Primidealzerlegung hat.

Aufgabe 2. (4P) (Ringerweiterungen und Körper)

Sei $A \subseteq B$ eine ganze Ringerweiterung von Integritätsringen. Zeige:
A ist Körper $\iff$ B ist Körper.

Aufgabe 3. (6P) (Ein Rechenbeispiel in einem Zahlring)

(a) Berechne $\mathscr{O}_d^\times$ für $d \in \not\square_-$.

(b) Zeige, dass $N \colon \mathscr{O}_2 \mapsto \mathbb{Z}, a + b\sqrt{2} \mapsto a^2 - 2b^2$ $(a, b \in \mathbb{Z})$ multiplikativ ist.

(c) Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ und betrachte $u := a + b\sqrt{2} \in \mathscr{O}_2$. Zeige:

$$u \in \mathscr{O}_2^\times \iff a^2 - 2b^2 \in \{-1, 1\}.$$

(d) Sei $u := a + b\sqrt{2} > 1$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ und gelte $u \in \mathscr{O}_2^\times$. Folgere $a > 0$ und $b > 0$.

(e) Zeige, dass $1 + \sqrt{2}$ das einzige Element von $\mathscr{O}_2^\times$ im Intervall $(1, 1 + \sqrt{2}]$ ist und als Inverses $-1 + \sqrt{2}$ besitzt.

(f) Zeige $\mathscr{O}_2^\times = \{\pm(1 + \sqrt{2})^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Abgabe bis Dienstag, den 16. Juni um 12:00 Uhr in die Zettelkästen neben F411.