Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Gabriel Lehéricy
Lothar Sebastian Krapp
SoSe 2016

Universität Konstanz

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II (B2)

Blatt 2

Für ein Körper K und eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ bezeichnet $K_n[X]$ den Vektorraum aller Polynomen vom Grad $\leq n$.

Aufgabe 1
(3 Punkte)
Sei K ein Körper, $V := K_n[X]$ und $t_0, \ldots, t_n$ paarweise verschiedene Elemente von K. Für alle $i \in \{0, \ldots, n\}$ definieren wir die Abbildung $L_i \in V^*$ durch $L_i(f) := f(t_i)$.

a) Wir definieren:

$$P_i := \prod_{j \neq i} \frac{X - t_j}{t_i - t_j}$$

Zeigen Sie, dass für alle $i, j \in \{0, \ldots, n\}$ $L_i(P_j) = \delta_{i,j}$, wobei $\delta_{i,j}$ das Kronecker-Delta ist.

b) Folgern Sie aus a), dass $(L_0, \ldots, L_n)$ eine Basis von V^* ist und $(P_0, \ldots, P_n)$ eine Basis von V.

Aufgabe 2
(5 Punkte)
Sei K ein endlicher Körper.

a) Sei $x \in K$, $x \neq 0$. Zeigen Sie, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $x^n = 1$.

b) Zeigen Sie, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $x^n = x$ für alle $x \in K$. Folgern Sie, dass die Abbildung von Polynomen auf Polynomfunktionen über endlichen Körpern nicht injektiv ist.

Aufgabe 3
(7 Puntke)
Sei K ein Körper. D bezeichnet die formale Ableitung auf $K[X]$.

a) Hier betrachten wir $K = \mathbb{R}$. Bezeichne Φ die Isomorphie von $\mathbb{R}[X]$ auf $\widetilde{\mathbb{R}[X]}$ und δ die übliche Ableitung auf den Polynomfunktionen, wie sie in Analysis definiert ist. Wir haben also das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \overset{\Phi}{\to} & \widetilde{\mathbb{R}[X]} \\ \downarrow D & & \downarrow \delta \\ \mathbb{R}[X] & \overset{\Phi}{\to} & \widetilde{\mathbb{R}[X]} \end{array}$$

Zeigen Sie, dass dieses Diagramm kommutiert, d.h: es gilt $\Phi \circ D = \delta \circ \Phi$.

b) Zeigen Sie, dass D eine lineare Abbildung ist. Berechnen Sie dann $Ker(D)$ und $Im(D)$ im Fall $char(K) = 0$.

c) Sei jetzt $char(K) = p$ eine Primzahl. Zeigen Sie, dass $Ker(D) = K[X^p]$ und berechnen Sie $Im(D)$.

Aufgabe 4
(5 Punkte)
Sei K ein Körper mit $char(K) = 0$

a) Berechnen Sie die Taylorentwicklung von $X^3 - X^2 + 3$ in 1.

b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{B}' = (1, (X-1), (X-1)^2, \ldots, (X-1)^n)$$

eine Basis von $K_n[X]$ bildet. Sei $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \ldots, X^n)$. Geben Sie die Basiswechselmatrix von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{B}'$

Zusatzaufgabe für Interessierte
Wir wissen, dass ein Polynom $f \in K[X]$ mit $deg(f) \leq n$ höchstens n paarweise verschiedene Nullstellen in K hat. Ziel dieser Aufgabe ist zu zeigen, dass f in anderen Bereichen mehr als n Nullstellen haben kann.
$M_n(K)$ bezeichnet die Algebra der $n \times n$-Matrizen über K und I_n die Einheitsmatrix von $M_n(K)$. Für $A \in M_n(K)$ und $f = \sum_{i=0}^m a_i X^i$ definiert man $f(A)$ als die Matrix $\sum_{i=0}^m a_i A^i$

a) Sei $A, P \in M_n(K)$ mit P invertierbar und $f \in K[X]$. Zeigen Sie: aus $f(A) = 0$ folgt $f(P^{-1}AP) = 0$.

b) Sei $char(K) \neq 2$. Finden Sie mithilfe von a) drei verschiedene Nullstellen des Polynoms $X^2 - 4$ in $M_2(K)$.

Die folgende Aufgabe d) ist von a),b) unabhängig:

c) Sei K der Schiefkörper der Quaternionen und $f(X) = X^2 + 1$. Zeigen Sie, dass f unendlich viele Nullstellen in K hat.

Abgabe: Donnerstag, 28. April 2016, 10:00 Uhr, Briefkästen auf F4.