Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Gabriel Lehéricy
Lothar Sebastian Krapp
SoSe 2016

Universität Konstanz

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II (B2)

Blatt 6

K ist überall ein beliebiger Körper und I_n bezeichnet die Einheitsmatrix in $K^{n\times n}$.

Aufgabe 1
(5 Punkte)
Seien $A \in K^{r\times r}, B \in K^{r\times s}$ und $C \in K^{s\times s}$.

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\det\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} = \det(A)$

(b) Zeigen Sie, dass $\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(C)\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_s \end{pmatrix}$

(c) Zeigen Sie, dass $\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_s \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_s \end{pmatrix}$. Was ist $\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$?

Aufgabe 2
(5 Punkte)

(a) Seien $A, B \in K^{n\times n}$ invertierbare Matrizen. Zeigen Sie, dass:

(i) $\mathrm{adj}(AB) = \mathrm{adj}(B)\mathrm{adj}(A)$

(ii) $\det(\mathrm{adj}A) = (\det A)^{n-1}$

(iii) $\mathrm{adj}(\mathrm{adj}A) = (\det A)^{n-2}A$

(b) Benutzen Sie die Cramersche Regel, um das folgende lineare Gleichungssystem über $\mathbb{F}_5$ zu lösen:

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 2 \\ 4x_1 & +3x_2 & +x_3 & = & 4 \end{array}.$$

Aufgabe 3
(5 Punkte)
Sei $A \in K^{m\times n}$. Sind $1 \leq r \leq m$ und $1 \leq s \leq n$, so ist eine $r \times s$ *Untermatrix* von A eine Matrix, die man durch Streichen von $m - r$ Zeilen und $n - s$ Spalten aus A erhält.
Der *Determinantenrang* $\mathrm{detrang}(A)$ einer Matrix $A \neq 0$ ist das größte $1 \leq r \leq \min(n, m)$ so, dass eine $r \times r$ Untermatrix B von A existiert mit $\det B \neq 0$.

(a) Zeigen Sie, dass $\operatorname{detrang}(A) = \operatorname{rang}(A)$.

(b) Berechnen Sie den Determinantenrang der folgenden Matrix über $\mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4
(5 Punkte)
Sei

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -5 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Über jedem der Körper $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ berechnen Sie:

(i) das charakteristische Polynom von A,

(ii) die Eigenwerte von A

(iii) die Eigenräume von A

(iv) die Eigenvektoren von A.

Ist A diagonalisierbar über $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$?

Zusatzaufgabe für Interessierte
(3 extra Punkte)
Seien $A, B, C, D \in K^{n\times n}$.

(a) Wir nehmen an, dass D invertierbar ist und mit C kommutiert. Zeigen Sie, dass

$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = det(AD - BC)$ gilt.

(b) Gilt diese Formel auch wenn D nicht invertierbar ist?

(c) Gilt diese Formel auch wenn C und D nicht kommutieren?

Abgabe: Freitag, 27. Mai 2016, 10:00 Uhr, Briefkästen auf F4.