Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
12. Juli 2016

Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Gabriel Lehéricy
Lothar Sebastian Krapp
Sommersemester 2016

Probeklausur zur Linearen Algebra II (B2)

Klausurnummer: 1

Matrikelnummer: Pseudonym:

Aufgabe	1	2	3	$\sum$
erreichte Punktzahl				
Korrektor (Initialen)				
Maximalpunktzahl	10	10	10	

Wichtige Hinweise:

1. Überprüfen Sie Ihren Klausurbogen auf **Vollständigkeit**, d.h. das Vorhandensein aller **3 Aufgaben**.
2. Bei jeder Aufgabe ist der **vollständige Lösungsweg** zu dokumentieren. Nicht ausreichend begründete Lösungen können zu Punktabzug führen!
3. Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben selbstständig und **ohne die Verwendung von Hilfsmitteln** außer Schreibzeug und Papier.
4. Verwenden Sie für Ihren Aufschrieb ausschließlich einen **dokumentenechten Stift**, also insbesondere **keinen Bleistift**! Aufschriebe mit Bleistift werden nicht gewertet. Graphen und Skizzen dürfen mit Bleistift erstellt werden.
5. Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihre Matrikelnummer.
6. Schreiben Sie Ihre Antworten leserlich auf das Blatt unter die Aufgabenstellung oder, falls der Platz nicht ausreicht, unter Angabe der bearbeiteten Aufgabe, auf das weiße Arbeitspapier. Benutzen Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt. (Das gelbe Konzeptpapier dient lediglich für eigene Notizen. In der Wertung wird ausschließlich das berücksichtigt, was auf dem Klausurbogen oder dem weißen Arbeitspapier steht.)
7. Wenn Sie eine Frage haben, melden Sie sich leise, indem Sie Ihre Hand heben. Wenn Sie zusätzliches Papier brauchen, melden Sie sich mit Papier der gewünschten Art (Arbeits- bzw. Konzeptpapier) in der Hand.
8. Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Matrikelnummer: **Seite 1 zu Aufgabe 1**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 1 (10 Punkte).

(a) (2 Punkte). Geben Sie die Definition der Determinante auf K^n an. Geben Sie dann die Formel der Determinante einer Matrix in $K^{n\times n}$ bezüglich ihrer Koeffizienten.

Dabei dürfen Sie die Begriffe „Permutation", „Einheitsmatrix" sowie grundlegende mengentheoretische Begriffe als bekannt voraussetzen. Alle anderen von Ihnen vewendeten Begriffe müssen definiert werden.

(b) (4 Punkte). Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrix in $\mathbb{R}^{7\times 7}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sie dürfen alle Definitionen, Notationen und Ergebnisse aus der Vorlesung und den Übungen verwenden, solange Sie diese klar benennen.

(c) (4 Punkte). Sei $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass Folgendes gilt:

(i) $\det(A) \in \mathbb{Z}$

(ii) Die Inverse von A existiert in $\mathbb{Z}^{n\times n}$ genau dann, wenn $\det(A) \in \{-1, 1\}$.

Sie dürfen alle Definitionen, Notationen und Ergebnisse aus der Vorlesung und den Übungen verwenden, solange Sie diese klar benennen.

Lösung zu Aufgabe 1:

(a) Siehe Vorlesung

(b) Mit Zeilenoperationen $Z_i \to Z_i - Z_1$ für $i \in \{2, \ldots, 7\}$ bekommen wir:

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Jetzt machen wir $Z_1 \to Z_1 + Z_2 + Z_3 + \cdots + Z_7$und bekommen

$$\det \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Das ist eine Diagonalmatrix, ihre Determinante ist also der Produkt aller Diagonaleinträge, also $6.(-1)^6 = 6$.

(c) (i) Nach der in (a) angegebenen Formel ist $\det(A)$ eine Summe von Produkten von Einträgen von A. Da alle Einträge von A in $\mathbb{Z}$ liegen, muss dann auch $\det(A)$ in $\mathbb{Z}$ liegen.

(ii) Sei A invertierbar in $\mathbb{Z}$. Nach (i) gilt dann $\det(A^{-1}) \in \mathbb{Z}$. Es gilt auch $\det(A)\det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det(I_n) = 1$, also ist $\det(A)$ invertierbar in $\mathbb{Z}$, also $\det(A) \in \{-1, 1\}$.

Umgekerht sei $\det(A) \in \{-1, 1\}$. Es gilt $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$. Jeder Eintrag von $adj(A)$ ist die Determinante einer Teilmatrix von A, also liegt dieser Eintrag in $\mathbb{Z}$. Die Einträge von $\frac{1}{\det(A)} adj(A)$ liegen also auch in $\mathbb{Z}$.

Matrikelnummer: **Seite 1 zu Aufgabe 2**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 2 (10 Punkte).

(a) (2 Punkte). Definieren Sie die Begriffe *Jordankette* bezüglich des Eigenwertes c von T und *Jordanzelle* der Dimension ℓ zum Eigenwert c.

Dabei dürfen Sie die Begriffe „Körper", „Vektorraum", „lineare Transformation", „Eigenwert" und „Darstellungsmatrix" sowie grundlegende mengentheoretische Begriffe als bekannt voraussetzen. Alle anderen von Ihnen vewendeten Begriffe müssen definiert werden.

(b) (5 Punkte). Sei

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -7 & -5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}.$$

Finden Sie $P \in \mathbb{C}^{3\times 3}$, sodass $P^{-1}AP$ in jordanscher Normalform ist und geben Sie die jordansche Normalform von A an.

(c) (3 Punkte). Sei A eine Matrix mit Einträgen aus K, sodass $\text{Char.Pol}(A) = (X-1)^2(X+1)^2$. Finden Sie alle jordanschen Normalformen, die für A infrage kommen. Begründen Sie Ihre Antwort kurz.

Sie dürfen alle Definitionen, Notationen und Ergebnisse aus der Vorlesung und den Übungen verwenden, solange Sie diese klar benennen.

Lösung zu Aufgabe 2:

(a) Siehe Vorlesung

(b) Wir müssen zunächst die Eigenwerte von A finden. Dafür berechnen wir das charakteristische Polynom:

$Char.Pol(A) = \det \begin{pmatrix} X-2 & 1 & 0 \\ -1 & X-4 & 0 \\ 7 & 5 & X-1 \end{pmatrix}$

Entwickelung nach der letzten Spalte ergibt :

$$\begin{aligned} Char.Pol(A) &= (X-1).\det \begin{pmatrix} X-2 & 1 \\ -1 & X-4 \end{pmatrix} \\ &= (X-1)((X-2)(X-4)+1) \\ &= (X-1)(X-3)^2 \end{aligned}$$

also sind die Eigenwerte 1 und 3. Der Eigenwert 1 hat algebraische Vielfachheit 1, also hat es auch geometrische Vielfachheit 1. $v_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist Eigenvektor zu 1.

Jetzt berechnen wir $(A-3I_3)^2$: $A - 3I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & -5 & -2 \end{pmatrix}$

$$(A-3I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 16 & 12 & 4 \end{pmatrix}$$

Wir nehmen einen Vektor in $Ker(A-3I_3)^2 \backslash Ker(A-3I_3)$: $v_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Dann liegt $v_2 := (A-3I_3)v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ in $Ker(A-3I_3)$. Es gilt: $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ mit $P = (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$

(c) Sei N die Jordansche Normalform von A. Wir bemerken zuerst, dass die Größe der Matrix $\deg(Char.Pol(A)) = 4$ ist. A hat zwei Eigenwerte 1 und -1. Sei V_1 der Eigenraum zu 1. 1 hat algebraische Vielfachheit 2 in $Char.Pol(A)$, also gilt $\dim(V_1) \in \{1,2\}$. Falls $\dim(V_1) = 2$, ist $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ein Teilmatrix von N. Falls $\dim(V_1) = 1$, gibt es $v \in Ker(A-I)^2 \backslash Ker(A-I)$ und $((A-I)v, v)$ ist dann eine Jordankette der Länge 2, also ist $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ eine Teilmatrix von N. Ähnlich für -1: N muss entweder $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ als Teilmatrix haben. Die Möglichkeiten für N sind also:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matrikelnummer: **Seite 1 zu Aufgabe 3**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 3 (10 Punkte).
Sei
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

(a) (3 Punkte). Zeigen Sie, dass für $x, y \in \mathbb{R}^2$ durch
$$(x \mid y) := x^t A y$$
ein Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^2$ definiert ist.

(b) (4 Punkte). Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^2$ bezüglich des in (a) definierten Skalarproduktes.

(c) (3 Punkte). Sei $(.|.)$ ein Skalarprodukt auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum V und sei $\|.\|$ die induzierte Norm, d. h. für alle $x \in V$ gilt $\|x\|^2 = (x|x)$. Beweisen Sie den verallgemeinerten Satz des Pythagoras:
$$\forall x, y \in V : \|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\mathrm{Re}(x|y).$$

Sie dürfen alle Definitionen, Notationen und Ergebnisse aus der Vorlesung und den Übungen verwenden, solange Sie diese klar benennen.

Lösung zu Aufgabe 3:

1. Nach Berechnung erhlaten wir: $(x \mid y) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 - x_1y_2 - y_1x_2$.

   Wir sehen sofort aus dieser Formel, dass wir x und y tauschen können, also $(x \mid y) = (y \mid x)$. Es gilt auch für alle $x \in V$: $(x \mid x) = 2(x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2) = 2((\frac{1}{2}x_1 - x_2)^2 + \frac{3}{4}x_1^2) \geq 0$, und $(x \mid x) = 0$ genau dann, wenn $(\frac{1}{2}x_1 - x_2)^2 + \frac{3}{4}x_1^2 = 0$ also genau dann, wenn $x_1 = x_2 = 0$ also genau dann, wenn $x = 0$. Zudem gilt $(x + cy \mid z) = (x + cy)^t Az = (x^t + cy^t)Az = x^t Az + cy^t Az = (x \mid z) + c(y \mid z)$.

2. Wir wenden Gram-Schmidt auf die kanonische Basis (e_1, e_2) an. Es gilt $||e_1|| = \sqrt{(e_1 \mid e_1)} = \sqrt{2}$, also definieren wir $v_1 := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$. $v_2' := e_2 - (e_2 \mid v_1)v_1$

   $(e_2 \mid v_1) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, also $v_2' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$. Es gilt $||v_2'|| = \sqrt{2(\frac{1}{2}^2 + 1^2 - \frac{1}{2})} = \sqrt{\frac{3}{2}}$, also definieren wir $v_2 := \sqrt{\frac{2}{3}} v_2' = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2\sqrt{3} \\ \sqrt{2}/\sqrt{3} \end{pmatrix}$. (v_1, v_2) ist dann eine orthonormale Basis.

3. Es gilt:
$$\begin{aligned} ||x - y||^2 &= (x - y \mid x - y) \\ &= (x \mid x - y) - (y \mid x - y) \\ &= (x \mid x) - (x \mid y) - (y \mid x) + (y \mid y) \\ &= ||x||^2 - (x \mid y) - \overline{(x \mid y)} + ||y||^2 \\ &= ||x||^2 - 2Re(x \mid y) + ||y||^2 \end{aligned}$$