Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
13. März 2017

Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Gabriel Lehéricy
Simon Müller
Wintersemester 2016/2017

Klausur zur Algebra (B3)

Klausurnummer: 1

Matrikelnummer: Pseudonym:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	$\sum$
erreichte Punktzahl								
Korrektor (Initialen)								
Maximalpunktzahl	10	10	10	10	10	10	10	

Wichtige Hinweise:

1. Überprüfen Sie Ihren Klausurbogen auf **Vollständigkeit**, d.h.auf das Vorhandensein aller **7 Aufgaben**.
2. Von den 7 Aufgaben werden nur die **besten 6 gewertet**.
3. Bei jeder Aufgabe ist der **vollständige Lösungsweg** zu dokumentieren. Nicht ausreichend begründete Lösungen können zu Punktabzug führen!
4. Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben selbstständig und **ohne die Verwendung von Hilfsmitteln** außer Schreibzeug und Papier.
5. Verwenden Sie für Ihren Aufschrieb ausschließlich einen **dokumentenechten Stift**, also insbesondere **keinen Bleistift**! Aufschriebe mit Bleistift werden nicht gewertet. Graphen und Skizzen dürfen mit Bleistift erstellt werden.
6. Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihre Matrikelnummer.
7. Schreiben Sie Ihre Antworten leserlich auf das Blatt unter die Aufgabenstellung oder, falls der Platz nicht ausreicht, unter Angabe der bearbeiteten Aufgabe, auf das weiße Arbeitspapier. Benutzen Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt. (Das gelbe Konzeptpapier dient lediglich für eigene Notizen. In der Wertung wird ausschließlich das berücksichtigt, was auf dem Klausurbogen oder dem weißen Arbeitspapier steht.)
8. In Aufgaben, in denen Definitionen verlangt werden, müssen Sie besonders die unter der Frage kursiv geschriebenen Anweisungen beachten. Sie dürfen immer sämtliche Begriffe aus den Vorlesungen Lineare Algebra I des Wintersemesters 2015/2016 und Lineare Algebra II des Sommersemesters 2016 als bekannt voraussetzen. Begriffe aus der Vorlesung Algebra (B3) müssen in der Regel definiert werden, es sei denn, die Anweisung besagt etwas anderes.
9. Die Bearbeitungszeit beträgt **180 Minuten**.

Matrikelnummer: **Seite 1 zu Aufgabe 1**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 1 (10 Punkte).

(a) (2 Punkte) Definieren Sie **maximales Ideal**. Geben Sie die **Charakterisierung von maximalen Idealen durch Faktorringe an**.

Dabei dürfen Sie die Begriffe „Ideal" und „Faktorring" sowie alle Begriffe aus den Vorlesungen Lineare Algebra I und II als bekannt voraussetzen. Alle anderen von Ihnen vewendeten Begriffe müssen definiert werden.

(b) Sei $I =< 2, X >$ das von 2 und X erzeugte Ideal in $\mathbb{Z}[X]$. Zeigen Sie:

(i) (3 Punkte) I ist ein maximales Ideal

(ii) (2 Punkte) I ist kein Hauptideal

Sie dürfen alle Definitionen, Notationen und Ergebnisse aus der Vorlesung und den Übungen verwenden, solange Sie diese klar benennen.

(c) (3 Punkte) Sei R ein kommutativer Ring mit 1 und P ein Primideal von R. Seien I, J Ideale von R, so dass $I \cap J \subseteq P$. Zeigen Sie, dass $I \subseteq P$ oder $J \subseteq P$ gilt.

Sie dürfen alle Definitionen, Notationen und Ergebnisse aus der Vorlesung und den Übungen verwenden, solange Sie diese klar benennen.

Lösung zu Aufgabe 1:

Seite 2 zu Aufgabe 1

Matrikelnummer: **Seite 3 zu Aufgabe 1**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 1:

Seite 4 zu Aufgabe 1

Matrikelnummer: **Seite 1 zu Aufgabe 2**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 2 (10 Punkte).

(a) (2 Punkte) Definieren Sie den Begriff **euklidischer Ring**

Dabei dürfen Sie alle Begriffe aus den Vorlesungen Lineare Algebra I und II als bekannt voraussetzen. Alle anderen von Ihnen vewendeten Begriffe müssen definiert werden.

Sei $R := \mathbb{Z}[i] = \{n + im \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$ und $N : R \to \mathbb{N}$ die Abbildung $N(z) = \bar{z}z$, wobei $\bar{z}$ das Konjugierte von z als komplexe Zahl bezeichnet.

(b) (4 Punkte) Bestimmen Sie die Einheiten von R und zeigen Sie, dass $1 + i$ irreduzibel in R ist.

Sie dürfen alle Definitionen, Notationen und Ergebnisse aus der Vorlesung und den Übungen verwenden, solange Sie diese klar benennen.

(c) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass (R, N) ein euklidischer Ring ist. *Dabei dürfen Sie ohne Beweis benutzen, dass* $Quot(R) = \mathbb{Q}[i] = \{r + is \mid r, s \in \mathbb{Q}\}$.

Sie dürfen alle Definitionen, Notationen und Ergebnisse aus der Vorlesung und den Übungen verwenden, solange Sie diese klar benennen.

Lösung zu Aufgabe 2:

Seite 2 zu Aufgabe 2

Matrikelnummer: **Seite 3 zu Aufgabe 2**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 2:

Seite 4 zu Aufgabe 2

Matrikelnummer: **Seite 1 zu Aufgabe 3**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 3 (10 Punkte).

(a) (2 Punkte) Geben Sie das **Lemma von Gauss** und das **Eisensteinsche Kriterium** an.

Sie dürfen alle Definitionen der Vorlesung Algebra (B3) sowie alle Begriffe aus den Vorlesungen Lineare Algebra I und II als bekannt voraussetzen.

(b) (4 Punkte) Bestimmen Sie in jedem der folgenden Fälle, ob das angegebene Polynom im angegebenen Ring irreduzibel ist:

(i) $f_1 = 5X^7 + 10X^4 + 20X + 10$ in $\mathbb{Z}[X]$

(ii) $f_2 = 4X^4 + 8X^2 + 16X + 8$ in $\mathbb{Q}[X]$

(iii) $f_3 = X^3 + 6X + 1$ in $\mathbb{Q}[X]$

(iv) $f_4 = X^4 + 1$ in $\mathbb{R}[X]$

Sie dürfen alle Definitionen, Notationen und Ergebnisse aus der Vorlesung und den Übungen verwenden, solange Sie diese klar benennen.

(c) (4 Punkte) Sei R ein faktorieller Ring, K sein Quotientenkörper und $f, g \in K[X]$, so dass $fg \in R[X]$. Zeigen Sie: wenn a ein Koeffizient von f ist und b ein Koeffizient von g, dann gilt $ab \in R$.

Sie dürfen alle Definitionen, Notationen und Ergebnisse aus der Vorlesung und den Übungen verwenden, solange Sie diese klar benennen.

Lösung zu Aufgabe 3:

Seite 2 zu Aufgabe 3

Matrikelnummer: **Seite 3 zu Aufgabe 3**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 3:

Seite 4 zu Aufgabe 3

Matrikelnummer: **Seite 1 zu Aufgabe 4**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 4 (10 Punkte).

(a) (2 Punkte) Definieren Sie die Begriffe **endlich erzeugte Körpererweiterung** und **endliche Körpererweiterung**.

Sie dürfen alle Begriffe aus den Vorlesungen Lineare Algebra I und II als bekannt voraussetzen. Alle anderen von Ihnen vewendeten Begriffe müssen definiert werden.

(b) (4 Punkte) Sei L/K eine algebraische Körpererweiterung, $\alpha, \beta \in L$, f das Minimalpolynom von α über K und g das Minimalpolynom von β über K. Wir nehmen an, dass $\deg(f)$ und $\deg(g)$ teilerfremd sind. Zeigen Sie, dass f irreduzibel über $K(\beta)$ ist.

Sie dürfen alle Definitionen, Notationen und Ergebnisse aus der Vorlesung und den Übungen verwenden, solange Sie diese klar benennen.

(c) (4 Punkte) Bestimmen Sie den Grad der Erweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2}, \sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

Sie dürfen alle Definitionen, Notationen und Ergebnisse aus der Vorlesung und den Übungen verwenden, solange Sie diese klar benennen.

Lösung zu Aufgabe 4:

Seite 2 zu Aufgabe 4

Matrikelnummer: **Seite 3 zu Aufgabe 4**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 4:

Seite 4 zu Aufgabe 4

Matrikelnummer: **Seite 1 zu Aufgabe 5**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 5 (10 Punkte).

(a) (3 Punkte) Geben Sie die **Bahngleichung** und die **zweite Klassengleichung an**.

Sie dürfen die Begriffe „Gruppenaktion“ und „Index einer Untergruppe“ sowie alle Begriffe aus den Vorlesungen Lineare Algebra I und II als bekannt voraussetzen. Alle anderen von Ihnen vewendeten Begriffe müssen definiert werden.

(b) (3 Punkte) Sei G eine Gruppe der Ordnung 55, die auf eine Menge X der Ordnung 39 operiert. Zeigen Sie, dass diese Aktion einen Fixpunkt hat, d.h es existiert ein $x \in X$ mit $g.x = x$.

Sie dürfen alle Definitionen, Notationen und Ergebnisse aus der Vorlesung und den Übungen verwenden, solange Sie diese klar benennen.

(c) (4 Punkte) Sei G eine endliche Gruppe. Zeigen Sie, dass der Index des Zentrums von G keine Primzahl ist.

Sie dürfen alle Definitionen, Notationen und Ergebnisse aus der Vorlesung und den Übungen verwenden, solange Sie diese klar benennen.

Lösung zu Aufgabe 5:

Seite 2 zu Aufgabe 5

Matrikelnummer: **Seite 3 zu Aufgabe 5**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 5:

Seite 4 zu Aufgabe 5

Matrikelnummer: **Seite 1 zu Aufgabe 6**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 6 (10 Punkte).

(a) (3 Punkte) Geben Sie den **zweiten Sylow-Satz** an.

Sie dürfen alle Definitionen der Vorlesung Algebra B3 sowie alle Begriffe aus den Vorlesungen Lineare Algebra I und II als bekannt voraussetzen.

(b) (4 Punkte) Sei G eine einfache Gruppe der Ordnung 120. Wie viele Elemente der Ordnung 5 gibt es in G?

Sie dürfen alle Definitionen, Notationen und Ergebnisse aus der Vorlesung und den Übungen verwenden, solange Sie diese klar benennen.

(c) (3 Punkte) Sei G eine Gruppe der Ordnung 68. Zeigen Sie, dass G auflösbar ist.

Sie dürfen alle Definitionen, Notationen und Ergebnisse aus der Vorlesung und den Übungen verwenden, solange Sie diese klar benennen.

Lösung zu Aufgabe 6:

Seite 2 zu Aufgabe 6

Matrikelnummer: **Seite 3 zu Aufgabe 6**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 6:

Seite 4 zu Aufgabe 6

Matrikelnummer: **Seite 1 zu Aufgabe 7**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 7 (10 Punkte).

(a) (3 Punkte) Geben Sie den **Hauptsatz der Galoistheorie** an.

Sie dürfen alle Definitionen der Vorlesung Algebra (B3) sowie alle Begriffe aus den Vorlesungen Lineare Algebra I und II als bekannt voraussetzen.

(b) (4 Punkte) Sei $f := (X^2 - 5)(X^2 - 6) \in \mathbb{Q}[X]$ und K der Zerfällungskörper von f. Geben Sie alle Zwischenkörper der Erweiterung $K/\mathbb{Q}$ an.

Sie dürfen alle Definitionen, Notationen und Ergebnisse aus der Vorlesung und den Übungen verwenden, solange Sie diese klar benennen.

(c) (3 Punkte) Sei L/K eine Galoiserweiterung vom Grad 2^n, $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass es eine Galoiserweiterung von K vom Grad 2 gibt, die in L enthalten ist.

Sie dürfen alle Definitionen, Notationen und Ergebnisse aus der Vorlesung und den Übungen verwenden, solange Sie diese klar benennen.

Lösung zu Aufgabe 7:

Seite 2 zu Aufgabe 7

Matrikelnummer: **Seite 3 zu Aufgabe 7**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 7:

Seite 4 zu Aufgabe 7