Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Gabriel Lehéricy
Simon Müller
WS 2016-2017

Universität Konstanz

Übungen zur Vorlesung Algebra B3

Blatt 12

Aufgabe 1
(5 Punkte)
In der Vorlesung haben Sie den Satz von Cayley gesehen:
Satz von Cayley: Jede Gruppe ist zu einer Permutationsgruppe isomorph.
Wir wollen jetzt explizite Beispiele betrachten.

a) Sei $V := C_2 \times C_2$ die Kleinsche Vierergruppe. Finden Sie eine Untergruppe G von S_4, die isomorph zu V ist, und geben Sie einen expliziten isomorphismus von V auf G an.

b) Sei D_4 die 4-te Diedergruppe. Finden Sie eine Untergruppe H von S_8, die isomorph zu D_4 ist, und geben Sie einen expliziten isomorphismus von D_4 auf H an.

Aufgabe 2
(5 Punkte)
Sei G eine endliche Gruppe, die auf einer endlichen Menge X operiert. Für $g \in G$ sei
$\mathrm{Fix}(g) := \{x \in M \mid gx = x\}$. Zeigen Sie, dass die Anzahl der G-Bahnen

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)|$$

ist.

Aufgabe 3
(5 Punkte)
Sei p eine Primzahl, $k \in \mathbb{N}$ und G eine Gruppe der Ordnung p^k. Zeigen Sie:

a) Das Zentrum C_G von G ist nicht trivial.

b) Falls $k = 2$ gilt, ist G abelsch.

Aufgabe 4
(5 Punkte)
In der Vorlesung haben wir für den Beweis von Sylow 1 den Satz von Cauchy benutzt:
Satz von Cauchy: Sei p eine Primzahl und G eine endliche abelsche Gruppe, deren Ordnung ein Vielfaches von p ist. Dann existiert ein $x \in G$ mit $|x| = p$.

Beweisen Sie den Satz von Cauchy, **ohne die Sylow-Sätze anzuwenden**.
Hinweis: Induktion über $|G|$

Zusatzaufgabe für Interessierte
(2 Punkte)
Zeigen Sie, dass alle Gruppen der Ordnung 45 abelsch sind und finden Sie für jede Isomorphieklasse einen Vertreter.

Abgabe: Freitag, 10. Februar 2017, 10:00 Uhr, Briefkästen auf F4.