Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Gabriel Lehéricy
Simon Müller
WS 2016-2017

Universität Konstanz

Übungen zur Vorlesung Algebra B3

Blatt 2

R ist überall ein kommutativer Ring mit 1.

Aufgabe 1
(4 Punkte)
Sei $I \lhd R$ ein Ideal.

a) Wir definieren durch Induktion: $I^1 = I$ und $I^{n+1} = II^n$. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ I^n ein Ideal von R ist und $I^n \subseteq I$.

b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{rad}(I) = \{a \in R \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ mit } a^n \in I\}$ ein Ideal von R ist.

Aufgabe 2
(6 Punkte)

a) Sei K ein Körper. Zeigen Sie, dass jeder K-Vektorraum V mit $V \neq \{0\}$ eine Basis besitzt.

Beachten Sie, dass die Dimension von K nicht unbedingt endlich ist!

b) Sei S eine multiplikative Teilmenge von R mit $0 \notin S$. Zeigen Sie:

i) Es existiert ein echtes Ideal $I \lhd R$, das maximal mit der Eigenschaft $S \cap I = \varnothing$ ist.
Achtung: Das bedeutet nicht, dass I ein maximales Ideal ist!

ii) jedes solche Ideal ist prim.

Hinweis: Für a) und b)i) benutzen Sie das Lemma von Zorn.

Aufgabe 3
(4 Punkte)

a) Seien $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{Z}$ mit $ggT(n_i, n_j) = 1$ für alle $i \neq j$. Seien $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass es $x \in \mathbb{Z}$ gibt, so dass für $1 \leq i \leq k$

$$x \equiv a_i \bmod n_i.$$

Zeigen Sie, dass x eindeutig mod $n_1 \ldots n_k$ ist.

b) Finden Sie $x \in \mathbb{Z}$, so dass:

$$x \equiv 2 \bmod 3, \quad x \equiv 4 \bmod 25, \quad x \equiv 9 \bmod 14$$

gilt.

Aufgabe 4
(6 Punkte)
Ein kommutativer Ring heißt *lokal*, wenn er genau ein maximales Ideal besitzt.

a) Zeigen Sie, dass die Teilmenge

$$R = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \text{ ungerade } \} \subseteq \mathbb{Q}$$

ein lokaler Unterring von $\mathbb{Q}$ ist und dass 2 das maximale Ideal von R erzeugt.

b) Sei R ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$. Zeigen Sie, dass $R \backslash \mathfrak{m}$ die Menge der Einheiten von R ist.

c) Sei R ein Ring. Zeigen Sie, dass R genau dann lokal ist, wenn die Teilmenge aller Nichteinheiten von R ein Ideal ist.

Zusatzaufgabe für Interessierte
(2 Punkte)
Seien $I_1, \ldots, I_n$ Primideale von R. Sei J ein Ideal von R, so dass $J \nsubseteq I_k$ für alle k. Zeigen Sie, dass $J \nsubseteq \bigcup_{1 \leq k \leq n} I_k$.

Abgabe: Freitag, 11. November 2016, 10:00 Uhr, Briefkästen auf F4.