Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Gabriel Lehéricy
Simon Müller
WS 2016-2017

Universität Konstanz

Übungen zur Vorlesung Algebra B3

Blatt 3

R ist überall ein kommutativer Ring mit 1.

Aufgabe 1
(5 Punkte)
Erinnerung: $a \in R$ heißt **nilpotent**, falls ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $a^n = 0$.
Sei $a \in R$. Zeigen Sie:

a) Wenn a nilpotent ist, liegt a im Schnitt aller Primideale von R.

b) a ist genau dann invertierbar, wenn es in keinem maximalen Ideal enthalten ist.

c) a ist genau dann im Schnitt aller maximalen Ideale von R, wenn $1 - ab$ invertierbar ist für alle $b \in R$.

Aufgabe 2
(5 Punkte)
Sei R ein Integritätsbereich, S eine multiplikative Teilmenge von R. Wir identifizieren R mit einem Teilring von $S^{-1}R$ durch die Einbettung $r \mapsto \frac{r}{1}$. Für jedes Ideal I von R bezeichnet $IS^{-1}R$ das von I erzeugte Ideal in $S^{-1}R$.

a) Zeigen Sie, dass jedes Ideal in $S^{-1}R$ von der Form $IS^{-1}R$ ist, wobei I ein Ideal von R ist.

b) Zeigen Sie, dass für jedes Primideal $\mathfrak{p} \lhd R$ mit $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$ das Ideal $\mathfrak{p}S^{-1}R$ ein Primideal von $S^{-1}R$ ist.

c) Zeigen Sie, dass jedes Primideal von $S^{-1}R$ von der Form $\mathfrak{p}S^{-1}R$ ist, wobei $\mathfrak{p}$ ein Primideal von R mit $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$ ist.

Aufgabe 3
(5 Punkte)
Wir betrachten den Ring $R := \mathbb{Z}[\sqrt{-2}] = \{n + mi\sqrt{2} \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$ und den Körper $K := \mathbb{Q}[\sqrt{-2}] = \{r + si\sqrt{2} \mid r, s \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{C}$. Wir definieren $N(r + si\sqrt{2}) := r^2 + 2s^2$ für alle $r, s \in \mathbb{Q}$. N definiert also eine Norm auf R und wir wollen zeigen, dass (R, N) ein euklidischer Ring ist.

a) Zeigen Sie, dass $N(ab) = N(a)N(b)$ für alle $a, b \in K$.

b) Zeigen Sie, dass K der Quotientenkörper von R ist.

c) Zeigen Sie: für alle $a, b \in R$ gibt es $c \in R$, so dass $N(\frac{a}{b} - c) < 1$.

d) Folgern Sie aus c), dass (R, N) ein euklidischer Ring ist.

Aufgabe 4
(5 Punkte)

a) Sei $I \lhd \mathbb{Z}[X]$ ein Ideal. Wir nehmen an, dass es ein normiertes Polynom $f \in I$ gibt, so dass für alle $h \in I \backslash \{0\}$ $\deg(f) \leq \deg(h)$. Zeigen Sie, dass I ein Hauptideal ist.

b) Finden Sie ein Beipsiel für ein Ideal in $\mathbb{Z}[X]$, das kein Hauptideal ist. Begründen Sie dabei Ihre Antwort

Zusatzaufgabe für Interessierte
(3 Punkte)
Wir sagen, dass ein euklidischer Ring R mit der Norm N die Eigenschaft (E) erfüllt, falls folgendes gilt:

Für alle $a, b \in R$ existieren **eindeutige** $q, r \in R$ mit $r = 0$ oder $N(r) < N(b)$, so dass $a = bq + r$ (E)

a) Geben Sie ein Beispiel eines euklidischen Rings R, der (E) nicht erfüllt. Begründen Sie dabei Ihre Antwort.

Sei jetzt (R, N) ein euklidischer Ring, der kein Körper ist und die Eigenschaft (E) erfüllt. Sei $n := \min(N(R \backslash \{0\}))$.

b) Zeigen Sie: für alle $a, b \in R$ mit $a \mid b$ gilt $N(a) \leq N(b)$.

c) Folgern Sie aus b), dass $R^\times = \{a \in R \backslash \{0\} \mid N(a) = n\}$.

d) Zeigen Sie, dass es einen Körper K gibt, so dass R isomorph zu $K[X]$ ist.

Abgabe: Freitag, 18. November 2016, 10:00 Uhr, Briefkästen auf F4.