Fachbereich Mathematik und Statistik — SS 2017
der Universität Konstanz — 14.06.2017
Dr. Merlin Carl — Zettel 8
Gabriel Lehericy

Übungen zur Mathematischen Logik

Aufgabe 1: Es sei $X \in \mathcal{A}$. Eine Menge $S \subseteq \mathcal{A}$ heißt 'X-Tableau-konsistent', falls $S \nvdash_{\text{pt}} X$.

(a) Zeige: Die Menge der X-Tableau-konsistenten Mengen ist eine AKE.

(b) Ist $S \subseteq \mathcal{A}$ X-Tableau-konsistent, so auch $S \cup \{\neg X\}$.

Aufgabe 2: Es seien $X \in \mathcal{A}$ und $S \subseteq \mathcal{A}$. Zeige: Es ist $S \models_{\text{p}} X$ gdw. $S \vdash_{\text{pr}} X$.

Aufgabe 3: Wir betrachten die logische Sprache $\mathfrak{L}_{FA}$ erster Stufe mit Gleichheit und folgenden weiteren Relationszeichen:

- Wx x ist weiblich
- Mx x ist männlich
- Kxy y ist Kind von x
- Vxy x und y sind verheiratet

Formalisieren Sie nun die folgenden Aussagen:
a) x ist Schwester von y. (2 Punkte)
b) x ist Großmutter väterlicherseits von y. (2 Punkte)
c) x und y sind Halbgeschwister. (2 Punkte)
d) Jeder Onkel hat einen Bruder. (Auch angeheiratete Onkel zählen!)
(2 Punkte)
e) Jeder Mensch hat höchstens einen Ehepartner. (2 Punkte)

Zusatzaufgabe für Interessierte: 'Was wäre, wenn...?'

In vielen Kontexten betrachtet man Folgerungen aus bekanntermaßen falschen Annahmen, etwa bei Aussagen wie 'Wäre ich eine halbe Stunde füher aufgestanden, hätte ich den Bus noch erreicht' (*). Wir wollen solche Aussagen logisch analysieren. Dazu führen wir ein neues Symbol $\rightarrow_c$ ein, wobei wir $A \rightarrow_c B$ lesen wollen als 'Wenn A wahr wäre, so wäre such B wahr'. Dieser neue Junktor hat etwas merkürdige Eigenschaften: Z.B. kann (*) wahr sein, während zugleich 'Wäre ich eine halbe Stunde füher aufgestanden und hätte eine Stunde länger gefrühstückt, hätte ich den Bus noch erreicht' falsch sein kann. Mehr Annahmen können also eine Folgerung wieder aufheben! Bei solchen Aussagen scheint es also darum zu gehen, die Beschreibung der Tatsachen nur gerade soweit zu ändern, wie nötig ist, um A wahr zu machen.

Wir interpretieren $\rightarrow_c$ semantisch daher so: Sei ν eine Boolesche Bewertung, $A, B \in \mathcal{A}$[1]. Dann ist $\nu(A \rightarrow_c B) = w$ gdw. $\nu'(B) = w$ für alle Booleschen Bewertungen ν' mit $\nu'(A) = w$ und folgender Eigenschaft: Bezeichnet $D(\nu_0, \nu_1)$ für zwei Boolesche Bewertungen ν_0, ν_1 die Menge der aussagenlogischen Variablen P mit $\nu_0(P) \neq \nu_1(P)$, so gilt $\nu''(A) = f$ für jedes ν'' mit $D(\nu, \nu'') \subsetneq D(\nu, \nu')$.

[1] Beachte, dass $\mathcal{A}$ wie bisher definiert ist, also insbesondere keine Formeln enthält, in denen $\rightarrow_c$ vorkommt.

Anschaulich ist also $\nu(A \to_c B) = w$, falls B unter allen Belegungen ν' gilt, unter denen A wahr ist und die sich dabei 'so wenig wie möglich von ν unterscheiden'.

(a) Es seien $A, B \in \mathcal{A}$, $\nu(A) = w$. Zeige: Dann ist $\nu(A \to_c B) = w$ genau dann, wenn $\nu(A \to B) = w$.

(b) Es seien $A, B \in \mathcal{A}$, $\nu(A) = f$. Folgt dann, dass $\nu(A \to_c B) = w$?

(c) Es seien $A, B, C \in \mathcal{A}$, $\nu(A \to_c C) = w$. Folgt dann auch $\nu((A \wedge B) \to_c C) = w$?

(d) Zeige: $(A \to B) \vee (B \to A)$ ist für alle $A, B \in \mathcal{A}$ eine Tautologie. Ist auch $\nu((A \to_c B) \vee (B \to_c A)) = w$ für alle $A, B \in \mathcal{A}$ und jede Boolesche Bewertung ν?

(e) Es sei $\nu(A \to_c B) = \nu(B \to_c C) = w$. Folgt dann, dass auch $\nu(A \to_c C) = w$?

(f) Vergleiche die Ergebnisse aus (a)-(e) mit dem Alltagsverständnis von 'was wäre, wenn'. Gib ggf. Beispiele an, die zeigen, dass die jeweilige Regel intuitiv plausible oder unplausibel ist.

(g) Falls dir einige der Konsequenzen der oben angegebenen Interpretation von $\to_c$ nach (f) unplausibel erscheinen – hast du eine Idee, wie man die Interpretation von $\to_c$ passend ändern könnte?

Bei jeder Aufgabe sind, wenn nichts anderes gesagt ist, bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe am 21.06.2017 vor der Vorlesung in den Briefkasten Ihrer Übungsgruppe.