Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Dieter Hoffmann
Thilo Moseler
17. 10. 2007

1. Übung zur Funktionalanalysis

Die folgenden Aufgaben sind zum Vortragen in der nächsten Übungstunde am 2x. 10. 2007 vorzubereiten.

(1. 1) Zeigen Sie, dass die folgenden Abbildungen Metriken sind, und beschreiben Sie die von ihnen induzierten Topologien:

(a) X sei eine nicht-leere Menge und $\delta\colon X^2 \longrightarrow [0,\infty[$ definiert durch

$$\delta(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{falls } x \neq y \end{cases}$$

für $x, y \in X$. δ heißt *diskrete Metrik*.

(b) p sei eine Primzahl und $\delta\colon \mathbb{Z}^2 \longrightarrow [0,\infty[$ definiert durch

$$\delta_p(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ p^{-k} & \text{falls } x \neq y,\text{ dabei } k \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } p^k \mid x-y \text{ und } p^{k+1} \nmid x-y \end{cases}$$

für $x, y \in \mathbb{Z}$. δ_p heißt *p-adische Metrik*.

(c) M sei eine nicht-leere Menge, X die Menge aller M-wertigen Folgen und $\delta\colon X^2 \longrightarrow [0,\infty[$ definiert durch

$$\delta(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ \frac{1}{n} & \text{falls } x \neq y,\text{ dabei } n \in \mathbb{N} \text{ minimal mit } x_n \neq y_n \end{cases}$$

für $x = (x_n) \in X$ und $y = (y_n) \in X$.

(1. 2) (X, δ) sei ein semimetrischer Raum. Für $x, y \in X$ definieren wir:

$$x \sim y \;:\Longleftrightarrow\; \delta(x,y) = 0$$

Zeigen Sie:

(a) $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf X.

(b) $\overline{\delta}(\overline{x}, \overline{y}) := \delta(x,y)$ für $x \in \overline{x} \in X_{/\sim}$ und $y \in \overline{y} \in X_{/\sim}$ definiert eine Metrik $\overline{\delta}$ auf $X_{/\sim}$.

(1. 3) Für zwei Metriken δ_1, δ_2 auf einer nicht-leeren Menge X definieren wir

$$\delta_1 \ll \delta_2 \;:\Longleftrightarrow\; \forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta > 0\; \forall\, x, y \in X\; (\delta_2(x,y) < \delta \Rightarrow \delta_1(x,y) < \varepsilon)$$

und nennen δ_1 und δ_2 genau dann *gleichmäßig äquivalent*, wenn $\delta_1 \ll \delta_2$ und $\delta_2 \ll \delta_1$ gelten.

(a) Zeigen Sie: $\quad \delta_1 \ll \delta_2 \implies \mathbb{O}(\delta_1) \subset \mathbb{O}(\delta_2)$

(b) Gleichmäßig äquivalente Metriken erzeugen also die gleiche Topologie. Zeigen Sie, dass die Umkehrung nicht gilt: Es gibt Metriken, die die gleiche Topologie erzeugen, aber nicht gleichmäßig äquivalent sind.

(c) Zeigen Sie: Ist d_1 eine Metrik auf X, dann wird durch $d_2(x,y) := \min\{1, d_1(x,y)\}$ für $x, y \in X$ eine zu d_1 gleichmäßig äquivalente Metrik d_2 auf X definiert.