Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Robert Denk
Thilo Moseler
13. 12. 2007

10. Übung zur Funktionalanalysis

Die folgenden Aufgaben sind zum Vortragen in der Übungstunde am 7. 1. 2008 vorzubereiten. Alle Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und bis zum 20. 12. 2007 um 10.00 Uhr in den gekennzeichneten Briefkasten einzuwerfen.

(10. 1) Sei E Banachraum und seien T, S abgeschlossene lineare Operatoren in E mit $\overline{D(T)} = E$ und $\overline{D(S)} = E$. Zeigen Sie:

(a) $R_\lambda(T) - R_\mu(T) = (\lambda - \mu)R_\lambda(T)R_\mu(T)$ für alle $\lambda, \mu \in \rho(T)$;

Sei nun zusätzlich $D(T) = D(S)$. Zeigen Sie:

(b) $R_\lambda(T) - R_\lambda(S) = R_\lambda(T)(S - T)R_\lambda(S)$ für alle $\lambda \in \rho(T) \cap \rho(S)$.

(10. 2) Sei $E = L_2([0,1])$ und $T \in L(E)$ durch $Tf(t) := t \cdot f(t)$ definiert. Bestimmen Sie $\rho(T), \sigma_p(T), \sigma_c(T)$ und $\sigma_r(T)$.

(10. 3) Sei

$$k : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad k(s,t) := \begin{cases} (1-s)t, & 0 \le t \le s \\ (1-t)s, & s \le t \le 1 \end{cases}$$

der Kern des *Fredholmoperators*

$$T_k \colon : C([0,1]) \longrightarrow C([0,1]), \quad (T_k x)(s) := \int_0^1 k(s,t)x(t)dt, \quad s \in [0,1].$$

Zeigen Sie: Die Eigenwerte von T_k sind $\lambda_n = (n\pi)^{-2}, n \in \mathbb{N}$ mit zugehörigen Eigenfunktionen $x_n(s) = \sin(n\pi s), s \in [0,1]$, und jeder geometrische Eigenraum $E_n := \ker(T_k - \lambda_n)$ ist eindimensional.

Hinweis: Zeigen Sie, dass für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ aus $T_k x = \lambda x$ folgt $x \in C^\infty([0,1]), \lambda x'' + x = 0$ und $x(0) = x(1) = 0$.