Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Robert Denk
Thilo Moseler
20. 12. 2007

11. Übung zur Funktionalanalysis

Die folgenden Aufgaben sind zum Vortragen in der Übungstunde am 14. 1. 2008 vorzubereiten. Alle Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und bis zum 10. 1. 2008 um 10.00 Uhr in den gekennzeichneten Briefkasten einzuwerfen.

(11. 1) Shift-Operatoren
Der Operator S in ℓ^2 sei definiert durch $Se^{(n)} := e^{(n+1)}$, wobei $\{e^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ die kanonische Orthonormalbasis in ℓ^2 sei.

(a) Bestimmen Sie $||S||$, S^*, SS^*, S^*S und $||S^*||$.

(b) Bestimmen Sie $\ker(S)$, $R(S)$, $\ker(S^*)$ und $R(S^*)$.

(11. 2) Multiplikations-Operatoren
Sei $E = C([0,1])$, $\varphi \in E$ und $T \in L(E)$ definiert durch $Tf(t) := \varphi(t) \cdot f(t)$ Bestimmen Sie $\sigma_p(T)$ und zeigen Sie, dass alle Eigenwerte von T unendliche Vielfachheit haben, d.h. es gilt $\dim\ker(T-\lambda) = \infty$ für $\lambda \in \sigma_p(T)$.

(11. 3) Sei E Banachraum und $T \in L(E)$. Zeigen Sie:

(a) Für alle $\lambda \in \rho(T)$ gilt

$$\operatorname{dist}(\lambda, \sigma(T)) = \lim_{n\to\infty} ||R_\lambda(T)^n||^{-\frac{1}{n}} = \sup_{n\in\mathbb{N}} ||R_\lambda(T)^n||^{-\frac{1}{n}}.$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst: $\operatorname{dist}((\lambda, \sigma(T)) \geq \sup_{n\in\mathbb{N}} ||R_\lambda(T)^n||^{-\frac{1}{n}}$ und danach $\operatorname{dist}(\lambda, \sigma(T)) \leq \liminf_{n\to\infty} ||R_\lambda(T)^n||^{-\frac{1}{n}}$.

(b) Folgern Sie daraus: Ist $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \rho(T)$ mit $\lambda_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_0$ und $\sup_{n\in\mathbb{N}} ||R_{\lambda_n}(T)|| < \infty$, so folgt $\lambda_0 \in \rho(T)$.

(11. 4) Sei E ein normierter Raum. Für eine Teilmenge $U \subset E'$ definiert man den *Annihilator* von U in E durch $U_\perp := \{x \in E \,|\, \forall\, f \in U : \, f(x) = 0\}$. Zeigen Sie:

(a) Sind E und F Banachräume und $T \in L(E,F)$ so gilt

$$\overline{R(T)} = (\ker(T'))_\perp.$$

(b) Ist zusätzlich $R(T)$ abgeschlossen, so ist die Operatorgleichung $Tx = y$ genau dann lösbar, wenn für $f \in F'$ aus $T'f = 0$ auf E folgt, dass $f(y) = 0$ gelten muss.

WIR WÜNSCHEN IHNEN FROHE WEIHNACHTEN UND VIEL ERFOLG IM NEUEN JAHR!